# 交换环与星型算子理论

王芳贵　著

科学出版社
www.sciencep.com

## 内 容 简 介

本书比较系统地介绍了交换环上的模范畴、经典的 Noether 环的理想理论、凝聚环的同调方法、整扩张理论、维数理论，以及近年来众多学者关注的整环上的星型算子理论．此外，还介绍了整体维数为 2 的交换环上的 Bass-Quillen 问题和方法．在全书中，重点突出了局部化方法与 $w$-算子的作用．对交换环的外幂方法及 Fitting 不变理想的作用也作了全面的介绍．本书留下许多未给出证明的例题以作习题之用，这些例题将有助于读者对相关概念的理解与衔接以及对交换环的理论与方法的理解和把握．

本书适合数学系和计算机系的本科生、研究生、教师阅读参考．

**图书在版编目(CIP)数据**

交换环与星型算子理论/王芳贵 著．—北京：科学出版社，2006

ISBN 7-03-017095-4

Ⅰ.交… Ⅱ.王… Ⅲ. ①交换环 ②算子 Ⅳ. O187.3

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2006) 第 028789 号

责任编辑：张 扬 潘继敏／责任校对：包志虹

责任印制：安春生／封面设计：王 浩

科学出版社 出版

北京东黄城根北街16号

邮政编码:100717

http://www.sciencep.com

双青印刷厂 印刷

科学出版社发行 各地新华书店经销

*

2006年5月第 一 版 开本：B5(720×1000)

2006年5月第一次印刷 印张：32 3/4

印数：1—3 000 字数：627 000

**定价：65.00 元**

(如有印装质量问题，我社负责调换〈环伟〉)

# 前　言

交换代数的基础理论是代数数论与代数几何这两门学科的基本工具. 与非交换环相比, 交换环及其模范畴的理论显得更加精妙, 研究方法更具特色. 其中, 局部化方法、外幂方法与行列式技巧是全面体现交换环特性的基本方法. 近 20 年来, 国际上众多环论学者对各类整环及整环上星型算子的讨论, 更是极大地丰富了交换代数的内容. 作者在为四川师范大学研究生教授交换代数课程的时候, 深深感到师范类学校相关书籍比较匮乏, 以至于学生们在追溯许多交换代数理论的重要结果时极为不便. 因此, 本书在编写中尽量包含更多的交换代数理论中的经典结论及其证明, 使得读者能够以备不时之需.

在本书的第 1 章, 我们介绍了交换代数的一些基本概念, 着重介绍了交换环的素理想方法与局部化方法. 自然地, 也介绍了环的素谱理论与连通环, 而连通环的出现完全是为了体现素谱的作用. 谈交换环也必须讨论其上的模范畴. 尽管模范畴理论可以单独开设, 但作为本书结构的需要, 我们还是在第 2 章与第 3 章用两章的篇幅来介绍交换环上模范畴的相关结论. 我们对模的拉回图, 还有推出图给予了很大的关注, 这对第 10 章讨论环的拉回图是很重要的. 限于篇幅, 我们没有专门讨论模的正向极限, 但讨论了子模的直接并, 这对于本书来说已经足够了. 用外幂方法研究有限生成平坦模与有常秩的投射模, 在第 3 章有详细的介绍.

同调代数是一门重要的代数课程. 作为工具, 对交换环理论的研究起了关键性的作用. 我们把同调代数的基本方法压缩为一章, 即第 4 章, 这使得本书更具有系统性. 本章不仅讨论了导出函子、整体维数、弱整体维数、各种维数的换环定理、多项式环的整体维数等基本内容, 也给出了环的 finitistic 维数. 这些内容可使那些没有学过同调代数课程的学生, 阅读本书也不会感到困难.

众所周知, 经典的 Noether 环理论是交换代数的重要内容. 但交换环理论的发展, 已包含了大量的非 Noether 环理论. 当然, 这些新的理论大多是 Noether 环理论的推广, 而凝聚环就是 Noether 环的一个很好的推广. 在第 5 章, 我们根据先一般后特殊的原则, 先后介绍了凝聚环与 Noether 环及其许多重要的结果. 非交换环理论也会涉及凝聚环与 Noether 环, 但在第 5 章, 我们更多地介绍了交换情形下的一些特殊的凝聚环与 Noether 环, 如 Prüfer 整环、Bézout 整环、赋值环以及 Dedekind 整环. 此外, 我们顺便介绍了 (交换) 完全环与半完全环.

在第 5 章里, 我们还没有来得及介绍经典的 Noether 环理论, 如 Krull 交定理与主理想定理. 但这些在第 6 章得到了完全展开. 为此, 我们讨论了环的整扩张理论,

相关的有 Going Up 定理与 Going Down 定理. 同时, 我们也讨论了环的 Krull 维数. 它是一个重要的不变量, 在代数与几何中具有极其重要的地位, 在交换环理论自身的研究中也起着非常重要的作用.

Noether 多项式环的 Krull 维数与正则局部环是交换环理论中一个极其重要的内容. 为了处理这部分内容, 我们在第 7 章引入了分次环与分次模的概念、环与模的拓扑结构及其完备化. 不过本书在对于模的 $I$- 进拓扑的处理中, 没有假定 Hausdorff 条件. 这种处理, 反而使得我们对后面的讨论更加方便. 在这一章里, 我们也介绍了 Noether 环上有限生成模的深度, Noether 局部环的 Auslander-Buchsbaum 定理与模的有限自由分解.

20 世纪 80 年代以来, 由于星型算子工具的引进, 整环的研究显得非常活跃. 1990 年, D.Costa 和 M.Roitman 又对交换环做出了一个出色的结果: 任何一个交换环都是一个整环关于一个主理想的同态像. 正是基于以上情况, 我们在第 8 章和第 9 章对各类整环及整环上的星型算子进行了集中细致的讨论. 经典的星型算子主要有 $v$- 算子与 $t$- 算子. 1997 年我们又引入了一个新的星型算子, 即 $w$- 算子, 并对其展开讨论. 这引起了国际同行的高度关注, 同时他们的工作也使得 $w$- 算子理论的研究更加深入. 在第 8 章, 我们讨论了整环上星型算子的一般性质, 同时对多项式环中一类叫作 UTZ 的素理想作了详细的介绍. 在第 9 章, 我们利用星型算子的方法刻画了一些特殊环类, 如 H 整环、TV 整环、Mori 整环、SM 整环、PVMD 及 Krull 整环等.

在第 10 章, 我们主要讨论环的拉回图. 环的拉回图理论在代数 K- 理论中有很好的应用. 对一个环的拉回图 $RR_1R_2S$, 我们常常需要用 $R_1$ 与 $R_2$ 的性质来确定 $R$ 的性质. 此外, 我们对许多问题需要给出反例, 拉回图是构造反例的一个相当有力的工具. 为此, 我们讨论强 Milnor 方图 $RDTF$ 的性质和作用. 在本章的最后我们还介绍了整环的赋值维数, 这是在许多文献中经常出现的一个重要概念.

在第 11 章, 我们刻画了整体维数为 2 的环的结构. 在此章, 我们能够看到 Fitting 不变理想所起的巨大作用. 为了顺利推导 Fitting 不变理想的相关结论, 我们借助了行列式理想的概念, 这样就把 2 维环的讨论与星型算子有机地结合起来了. 在本章我们还对多项式环的凝聚性与 GE 环作了详细的介绍. 同时, 我们也讨论了整体维数为 2 的环上的 Bass-Quillen 问题. 我们给出了整体维数为 2 的 Noether 环与 Krull 维数为 0 的环上的 Bass-Quillen 猜测成立的完全证明. 而限于篇幅, 我们对 Prüfer 整环与整体维数为 2 的环只给出了 $n=1$ 这一情形的证明.

本书没有配置习题. 但是, 在编排过程中, 作者有意识地留下一些例、推论与若干处定理没有给出证明. 这些相关结论的证明不是很困难, 读者不应该回避, 可以在阅读过程中作出验证. 也还有几个定理, 限于本书的编排结构没有给出证明, 但

我们给出了证明的出处, 读者可以很快地找到原始证明.

本书出版得到四川师范大学、四川省科技厅应用基础研究基金、四川省重点学科建设项目 (SZD0406) 和国家自然科学基金 (10271502) 的支持和资助, 一些代数同行表示了极大的关注并提出了许多宝贵意见, 在此表示衷心的感谢. 本书作为硕士研究生讲义已使用三届, 我的学生陈幼华对全部书稿的输入错误、证明的疏漏进行了仔细的检查、核对和补遗, 倾注了大量心血. 我的另一名学生尹华玉又再次进行了全面检查. 其中的反反复复, 勿庸赘述. 但学生们这种对待学问极其认真的学习态度和精神, 作为导师, 我是非常高兴的. 尽管我们已经作了仔细认真的修改补遗工作, 但水平有限, 书中错误和不足之处在所难免, 真诚请各位同行原谅并批评指正.

王芳贵

2006 年 2 月 22 日

# 目　录

# 第 1 章　交换环的基本概念

## §1.1　理　　想

**交换幺群**　设 $S$ 是非空集合. 如果 $S$ 上有一个二元运算, 称为乘法, $S$ 中两个元素 $a, b$ 相乘用 $ab$ 表示, 且满足条件:

(1) 结合律: 对任何 $a, b, c \in S$, 有 $(ab)c = a(bc)$.

(2) 交换律: 对任何 $a, b \in S$, 有 $ab = ba$.

(3) $S$ 中存在元素 $e$, 使得对任何 $a \in S$, 有 $ea = ae = a$.

则 $S$ 称为一个交换幺群.

容易看到, 条件 (3) 中的元素 $e$ 是唯一确定的, 称为 $S$ 中的 (乘法) 单位元, 我们用 1 表示.

如果幺群 $S$ 还满足:

(4) 对任何 $a \in S$, 存在 $b \in S$, 使得 $ab = 1$.

则 $S$ 就称为一个**Abel群**.

对 Abel 群, 我们也经常将其二元运算称为加法, 其中两个元素 $a, b$ 相加用 $a+b$ 表示, 并且用 0 来表示其加法的单位元, 叫作零元.

**交换环**　设 $R$ 是非空集合. 如果 $R$ 上有两个二元运算, 称为加法与乘法, 满足条件:

(1) $R$ 在加法之下构成一个 Abel 群;

(2) $R$ 在乘法之下构成一个交换幺群;

(3) 分配律成立, 即对任何 $a, b, c \in R$, 等式

$$a(b+c) = ab + ac$$

成立, 则我们就称 $R$ 是一个交换环.

如上所述, 在一个环 $R$ 中, 我们总是用 0 表示加法的单位元, 叫作零元; 用 1 表示乘法的单位元, 叫作单位元.

注意, 本书在不特别声明时, 提到的环皆指交换环, 并且假定 $1 \neq 0$.

对 $a \in R$, $a \neq 0$, 我们规定

$$a^0 = 1,\ a^1 = a,\ \cdots,\ a^n = a^{n-1}a.$$

**单位**　设 $R$ 是环, $a \in R$. 如果存在 $b \in R$, 使得 $ab = 1$, 则 $a$ 叫作 $R$ 中的单位(或**可逆元**). $R$ 中的单位组成的集合用 $u(R)$ 表示, 称为 $R$ 的**单位群**.

**零因子**　设 $R$ 是环, $a \in R$. 如果存在 $b \in R$, $b \neq 0$, 使得 $ab = 0$, 则 $a$ 叫作 $R$ 中的零因子. 当 $a \neq 0$ 时, $a$ 称为 $R$ 的**非平凡的**零因子.

**零化子**　设 $R$ 是环, $x \in R$, 定义

$$\operatorname{ann}(x) = \{ r \in R \mid rx = 0 \},$$

叫作元素 $x$ 的零化子.

**幂零元**　设 $R$ 是环, $a \in R$. 如果存在正整数 $n$, 使得 $a^n = 0$, 则 $a$ 叫作 $R$ 中的幂零元.

**整环**　设 $R$ 是环, 如果 $R$ 中没有非平凡的零因子, 则 $R$ 叫作整环.

**域**　设 $R$ 是环, 如果 $R$ 中任何非零元都是单位, 则 $R$ 叫作域.

显然域一定是整环. 本书在不特别声明时, 提到的整环皆不是域.

**例 1.1.1**　在环 $R$ 中, 二项式定理成立, 即对任何 $a, b \in R$, 有

$$(a+b)^n = \sum_{i=0}^{n} C_n^i a^{n-i} b^i.$$

**理想**　设 $R$ 是环, $I$ 是 $R$ 的非空子集. 如果对任何 $a, b \in I$, $r \in R$, 有

$$a + b \in I, \quad ra \in I,$$

则 $I$ 叫作 $R$ 的一个理想.

**例 1.1.2**　显然, $\{0\}$ 是 $R$ 的理想, 称为**零理想**, 仍用 0 表示. 此外, 理想 $I = R$ 当且仅当 $I$ 中包含 $R$ 的一个单位.

**例 1.1.3**　设 $R$ 是环, $\{ I_i \mid i \in \Gamma \}$ 是 $R$ 的一簇理想, 则 $\bigcap\limits_i I_i$ 也是 $R$ 的理想.

**理想的和**　设 $I_1, I_2, \cdots, I_n$ 是环 $R$ 的理想, 定义

$$I_1 + I_2 + \cdots + I_n = \{ a_1 + a_2 + \cdots + a_n \mid a_i \in I_i,\ i = 1, 2, \cdots, n \}.$$

容易看到, $I_1 + I_2 + \cdots + I_n$ 是 $R$ 的理想, 叫作理想 $I_1, I_2, \cdots, I_n$ 的和. 更一般地, 设 $\{ I_i \mid i \in \Gamma \}$ 是环 $R$ 的一簇理想, 定义

$$\sum_i I_i = \{ a_{i_1} + a_{i_2} + \cdots + a_{i_n} \mid a_{i_k} \in I_{i_k},\ i_k \in \Gamma \},$$

则 $\sum\limits_{i \in \Gamma} I_i$ 也是 $R$ 的理想, 叫作理想簇 $\{ I_i \mid i \in \Gamma \}$ 的 **和**.

设 $I_1, I_2$ 是环 $R$ 的理想, 定义

$$I_1I_2 = \left\{ \sum_{i=1}^{m} a_ib_i \,|\, m \in \mathbb{N},\ a_i \in I_1,\ b_i \in I_2 \right\},$$

则 $I_1I_2$ 是 $R$ 的理想, 称为理想 $I_1$ 与 $I_2$ 的**积**. 更一般地, 设 $I$ 和 $I_1, I_2, \cdots, I_n$ 都是环 $R$ 的理想, 归纳定义

$$I_1I_2\cdots I_n = (I_1I_2\cdots I_{n-1})I_n$$

及

$$I^1 = I, I^2 = II, \cdots, I^n = (I^{n-1})I.$$

它们仍是 $R$ 的理想. 显然有 $I_1I_2\cdots I_n \subseteq I_1 \bigcap I_2 \bigcap \cdots \bigcap I_n$.

**一个子集生成的理想** 设 $X$ 是环 $R$ 的子集, 则所有包含 $X$ 的理想的交

$$\bigcap\{\, I \,|\, I\text{是 } R \text{ 的理想, 且} X \subseteq I \,\}$$

是 $R$ 中包含 $X$ 的最小理想, 称为由集合 **$X$生成的理想**, 记为 $(X)$. 当 $X$ 是由元素 $a_1, a_2, \cdots, a_n$ 构成的有限集时, 我们把 $X$ 生成的理想就记为 $(X) = (a_1, a_2, \cdots, a_n)$.

当 $X$ 为空集时, 显然有 $(X) = 0$.

**例 1.1.4** 设 $X$ 是环 $R$ 的非空子集, 则

$$(X) = \{\, r_1a_1 + r_2a_2 + \cdots + r_na_n \,|\, n\text{是正整数},\ r_i \in R,\ a_i \in X,\ i = 1, 2, \cdots, n \,\}.$$

特别地, 若 $X = \{\, a_1, a_2, \cdots, a_n \,\}$ 是有限集, 则

$$(X) = \{\, r_1a_1 + r_2a_2 + \cdots + r_na_n \,|\, r_i \in R, i = 1, 2, \cdots, n \,\} = Ra_1 + Ra_2 + \cdots + Ra_n.$$

**证** 记右端为 $I$. 对任何 $x \in X$, 有 $x = 1x \in I$, 于是 $X \subseteq I$. 因此有 $(X) \subseteq I$. 反之, 对任何 $x \in I$, 有 $x = r_1a_1 + r_2a_2 + \cdots + r_na_n$, 其中 $r_i \in R$, $a_i \in X$. 由于 $(X)$ 是理想, 我们知 $x \in (X)$. 因此 $I = (X)$. □

**理想的生成系、有限生成的理想与主理想** 设 $I$ 是 $R$ 的理想, 如果存在子集 $X \subseteq I$, 使得 $I = (X)$, 则称 $I$ 是由子集 $X$ 生成的理想, 称 $X$ 为 $I$ 的一个生成系, $X$ 中的元素叫作理想 $I$ 的生成元. 注意, 每个理想都有生成系, 如 $I = (I)$. 如果有 $I = (X)$, 其中 $X$ 是有限集, 则 $I$ 叫作有限生成的理想. 对于集合 $X$, 我们用 $|X|$ 表示其**基数**(cardinal number). 若 $|X| = 1$, 则 $I$ 称为主理想. 任何主理想 $I$ 可表示为 $I = (a) = Ra$, 对某个 $a \in I$. 主理想 $(a) = R$, 当且仅当 $a$ 是单位.

**子理想** 设 $I, J$ 都是 $R$ 的理想, 且 $I \subseteq J$, 我们也称 $I$ 是 $J$ 的子理想.

**商环**　设 $R$ 是环, $I$ 是 $R$ 的一个真理想, 即 $I \neq R$. 由于 $I$ 也是 $R$ 的子群, 我们可得一个 Abel 商群 $\overline{R} = R/I$. 对 $a \in R$, 用 $\overline{a}$ 表示陪集 $a + I$. 则 $\overline{R}$ 中的加法为

$$\overline{a} + \overline{b} = \overline{a + b}.$$

在 $\overline{R}$ 中定义乘法

$$\overline{a}\overline{b} = \overline{ab},$$

则 $\overline{R}$ 就成为一个环, 叫作 $R$ 关于理想 $I$ 的商环.

**定理 1.1.1**　设 $N$ 是环 $R$ 的理想, $\overline{R} = R/N$.

(1) 设 $J$ 是 $R$ 的理想且 $N \subseteq J$, 则 $\overline{J} \overset{\text{def}}{=} J/N$ 是环 $\overline{R}$ 的理想;

(2) 环 $\overline{R}$ 中的任何理想可表示为 $J/N$, 其中 $J$ 是 $R$ 的理想且 $N \subseteq J$;

(3) 环 $R$ 的包含 $N$ 的理想的集合与环 $\overline{R}$ 中的所有理想的集合是一一对应的.

**证**　留作练习. □

**子环与扩环**　设 $T$ 是环, $R$ 是 $T$ 的非空子集. 如果 $R$ 也是 $T$ 的一个加法子群, 而且 $R$ 还是 $T$ 的一个乘法子幺群, 即 $1 \in R$, 且 $R$ 在 $T$ 的乘法之下是封闭的, 这时 $R$ 已经成为一个环, 称为 $T$ 的子环, 另外, 我们也称 $T$ 是环 $R$ 的扩环.

由我们的子环要求单位元 1, 故理想 $I$ 是 $R$ 的子环当且仅当 $I = R$, 子环 $T$ 是 $R$ 的理想当且仅当 $T = R$.

**环的直积**　设 $R_1, R_2, \cdots, R_n$ 都是环, 在集合直积 $\prod\limits_{i=1}^{n} R_i$ 中规定

$$(a_1, a_2, \cdots, a_n) + (b_1, b_2, \cdots, b_n) = (a_1 + b_1, a_2 + b_2, \cdots, a_n + b_n),$$

$$(a_1, a_2, \cdots, a_n)(b_1, b_2, \cdots, b_n) = (a_1 b_1, a_2 b_2, \cdots, a_n b_n).$$

这时, $\prod\limits_{i=1}^{n} R_i$ 就成为一个环, 称为环 $R_1, R_2, \cdots, R_n$ 的直积, 其零元为 $0 = (0, 0, \cdots, 0)$, 单位元为 $1 = (1, 1, \cdots, 1)$.

更一般地, 设 $\{ R_i \mid i \in \Gamma \}$ 是一簇环, 定义

$$\prod_{i \in \Gamma} R_i = \{ [r_i] \mid i \in \Gamma,\ r_i \in R_i \},$$

在其中规定

$$[a_i] + [b_i] = [a_i + b_i] \quad 与 \quad [a_i][b_i] = [a_i b_i],$$

则 $\prod\limits_{i \in \Gamma} R_i$ 是一个环, 称为环簇 $\{ R_i \mid i \in \Gamma \}$ 的直积.

**幂等元**　设 $R$ 是环, $e \in R$. 如果 $e^2 = e$, 则 $e$ 称为幂等元. 两个幂等元 $e_1, e_2$ 称为**正交的**, 是指关系 $e_1 e_2 = 0$ 成立.

**幂等元的完全正交系**　设 $\{e_1, \cdots, e_n\}$ 是 $R$ 的幂等元集. 若诸 $e_i$ 是两两正交的, 且 $e_1 + \cdots + e_n = 1$, 则 $\{e_1, \cdots, e_n\}$ 称为 $R$ 的一个幂等元的完全正交系.

**例 1.1.5** 0 和 1 都是环 $R$ 的幂等元, 称为平凡的幂等元. 对幂等元 $e$, $\{e, 1-e\}$ 就是一个幂等元的完全正交系. 由 $e(1-e)=0$ 知当 $R$ 是整环时, 0 和 1 是 $R$ 仅有的幂等元.

**例 1.1.6** 设 $R=R_1\times\cdots\times R_n$, $e_i=(0,\cdots,1,\cdots,0)$, 即 $e_i$ 是第 $i$ 个分量为 1, 其余分量为 0 的元素, 则 $e_i$ 是幂等元, $\{e_1,\cdots,e_n\}$ 是一个幂等元的完全正交系.

**例 1.1.7** 设 $R=R_1\times\cdots\times R_n$, $x=(x_1,\cdots,x_n)\in R$, 则 $x$ 是单位当且仅当每一分量 $x_i$ 是单位.

## §1.2 极大理想与素理想

在本书的许多结论的证明中需要用到集合理论中的 Zorn 引理.

**拟序集与偏序集** 设 $P$ 是非空集合, $\leqslant$ 是 $P$ 上的一个二元关系, 满足:

(1) 对任何 $x\in P$, 有 $x\leqslant x$.

(2) 设 $x,y,z\in P$. 若 $x\leqslant y$, $y\leqslant z$, 则 $x\leqslant z$.

则 $(P,\leqslant)$ 称为一个拟序集.

(3) 设 $x,y\in P$. 若 $x\leqslant y$, $y\leqslant x$, 则 $x=y$.

则 $(P,\leqslant)$ 称为一个偏序集.

**全序集** 设 $(P,\leqslant)$ 是一个偏序集. 如果对任何 $x,y\in P$, $x\leqslant y$ 与 $y\leqslant x$ 必有一个成立, 则 $(P,\leqslant)$ 称为一个全序集.

**例 1.2.1** 设 $S$ 是非空集合, $P(S)$ 表示由 $S$ 的一切子集构成的集合, 称为 $S$ 的**幂集**. 则 $P(S)$ 按 $S$ 的包含关系构成一个偏序集.

容易看到偏序集的非空子集是偏序集, 全序集的非空子集还是全序集. 对于偏序集 $P$ 的全序子集, 我们常称之为 $P$ 中的一个**链**.

**理想链** 设 $R$ 是环, 则 $R$ 的所有理想构成的集合在包含关系之下构成一个偏序集. 此偏序集中的全序子集叫作 $R$ 的一个理想链.

**例 1.2.2** 设 $\{I_i\,|\,i\in\Gamma\}$ 是环 $R$ 的一个理想链, 则 $I=\bigcup\limits_i I_i$ 是 $R$ 的理想; 且若每一个 $I_i$ 是真理想时, $I$ 也是真理想. 如果 $I$ 是有限生成的, 则有一个下标 $k$, 使得 $I=I_k$.

**上 (下) 界** 设 $P$ 是偏序集, $a\in P$. 设 $B$ 是 $P$ 的一个子集, 如果对任何 $x\in B$, 恒有 $x\leqslant a$(或 $x\geqslant a$), 则称 $a$ 为子集 $B$ 的一个上 (下) 界. 注意, 上 (下) 界 $a$ 未必在 $B$ 中.

**极大 (小) 元** 设 $P$ 是偏序集, $a\in P$. 若对 $x\in P$, 由 $a\leqslant x$(或 $a\geqslant x$) 能推出 $x=a$, 则称 $a$ 是 $P$ 的一个极大 (小) 元. 注意, 极大 (小) 元素未必存在, 且存在时也未必只有一个.

**最大 (小) 元** 设 $P$ 是偏序集, $a \in P$. 若对任何 $x \in P$, 恒有 $x \leqslant a$(或 $x \geqslant a$), 则 $a$ 称 $P$ 的最大 (小) 元. 最大 (小) 元存在时必唯一.

**Zorn 引理** 设 $P$ 是偏序集, 如果 $P$ 中任何全序子集 (或每一个链) 都有上界, 则 $P$ 中有极大元.

**良序集** 设 $A$ 是偏序集. 如果 $A$ 的每个非空子集有最小元素, 则 $A$ 称良序集. 此时 $A$ 一定是全序集.

Zorn 引理与下面的良序原理是等价的.

**良序原理** 任何集合 $A$ 都是可以良序的, 即 $A$ 上有一个序关系, 使得 $A$ 成为一个良序集.

**极大理想** 设 $R$ 是环, $\mathfrak{m}$ 是 $R$ 的真理想. 如果 $\mathfrak{m}$ 与 $R$ 之间无其他的理想, 即如果 $I$ 是 $R$ 的理想, 且 $\mathfrak{m} \subseteq I \subseteq R$, 则或者 $I = \mathfrak{m}$, 或者 $I = R$, 此时我们称 $\mathfrak{m}$ 是 $R$ 的极大理想.

**定理 1.2.1** 设 $I$ 是环 $R$ 的真理想, 则存在 $R$ 的极大理想 $\mathfrak{m}$, 使得 $I \subseteq \mathfrak{m}$. 特别地, 任何环一定有极大理想.

**证** 令

$$\Gamma = \{\, J \mid J \text{ 是 } R \text{ 的真理想, 且} I \subseteq J \,\}.$$

由 $I \in \Gamma$, 故 $\Gamma$ 非空. 显然 $\Gamma$ 在子集的包含关系之下成为一个偏序集. 设 $\{\, J_i \,\}$ 是 $\Gamma$ 中的理想链, 易见 $J = \bigcup_i J_i$ 是 $R$ 的真理想且包含 $I$. 因此 $J$ 是链 $\{\, J_i \,\}$ 在 $\Gamma$ 中的上界. 由 Zorn 引理知 $\Gamma$ 中有一个极大元, 设为 $\mathfrak{m}$. 下证 $\mathfrak{m}$ 是 $R$ 的极大理想.

若有 $R$ 的理想 $N$, 使得 $N \neq R$ 但 $\mathfrak{m} \subseteq N$, 则 $N \in \Gamma$. 由于 $\mathfrak{m}$ 是 $\Gamma$ 的极大元, 故有 $N = \mathfrak{m}$. 于是我们看到 $\mathfrak{m}$ 是极大理想.

最后取 $I = 0$, 则 $R$ 有极大理想 $\mathfrak{m}$. □

**定理 1.2.2** 设 $\mathfrak{m}$ 是环 $R$ 的理想, 则 $\mathfrak{m}$ 是极大理想当且仅当 $R/\mathfrak{m}$ 是域.

**证** 留作练习. □

**素理想** 设 $\mathfrak{p}$ 是环 $R$ 的真理想. 如果由 $a, b \in R$, $ab \in \mathfrak{p}$ 能推出或者 $a \in \mathfrak{p}$, 或者 $b \in \mathfrak{p}$, 则 $\mathfrak{p}$ 叫作 $R$ 的素理想.

**定理 1.2.3** 设 $\mathfrak{p}$ 是环 $R$ 的真理想, 则 $\mathfrak{p}$ 是素理想当且仅当 $R/\mathfrak{p}$ 是整环. 因此, $R$ 是整环当且仅当零理想是素理想.

**证** 留作练习. □

**推论 1.2.1** 极大理想一定是素理想.

注意, 素理想未必是极大理想. 如在整数环中, 理想 0 是素理想, 但不是极大理想.

**定理 1.2.4** 设 $\{\, \mathfrak{p}_i \,\}$ 是 $R$ 的素理想链, 则 $\bigcup_i \mathfrak{p}_i$ 与 $\bigcap_i \mathfrak{p}_i$ 都是素理想.

**证** 设 $\mathfrak{p}=\bigcup_i \mathfrak{p}_i$, 则 $\mathfrak{p}$ 一定是 $R$ 的真理想. 设 $x,y\in R$, $xy\in\mathfrak{p}$, 则存在下标 $i$, 使得 $xy\in\mathfrak{p}_i$. 由于 $\mathfrak{p}_i$ 是素理想, 故或者 $x\in\mathfrak{p}_i$, 或者 $y\in\mathfrak{p}_i$. 因此有 $x\in\mathfrak{p}$, 或者 $y\in\mathfrak{p}$. 即 $\mathfrak{p}$ 是素理想.

对第二个断语, 令 $\mathfrak{p}=\bigcap_i \mathfrak{p}_i$, $\mathfrak{p}$ 是真理想. 设 $x,y\in R$, $xy\in\mathfrak{p}$, 于是对一切下标 $i$, $xy\in\mathfrak{p}_i$. 若对一切 $i$, $x\in\mathfrak{p}_i$, 则 $x\in\mathfrak{p}$. 今设存在下标 $k$, 使得 $x\notin\mathfrak{p}_k$. 因此有 $y\in\mathfrak{p}_k$. 对任何 $\mathfrak{p}_i$, 若 $\mathfrak{p}_k\subseteq\mathfrak{p}_i$, 则 $y\in\mathfrak{p}_i$. 若 $\mathfrak{p}_i\subseteq\mathfrak{p}_k$, 由 $x\notin\mathfrak{p}_k$ 知 $x\notin\mathfrak{p}_i$, 故 $y\in\mathfrak{p}_i$. 于是对一切 $i$, $y\in\mathfrak{p}_i$, 从而 $y\in\mathfrak{p}$. 故 $\mathfrak{p}$ 是素理想. □

**定理 1.2.5** 设 $\Gamma$ 表示 $R$ 的所有非有限生成的理想的集合, 若 $\mathfrak{p}$ 是 $\Gamma$ 的极大元, 则 $\mathfrak{p}$ 是素理想.

**证** 设 $a,b\in R$, 使得 $ab\in\mathfrak{p}$. 若 $a\notin\mathfrak{p}$, 且 $b\notin\mathfrak{p}$, 令 $J=\{r\in R|ra\in\mathfrak{p}\}$, 则 $b\in J$. 于是 $\mathfrak{p}\subset\mathfrak{p}+Ra$, $\mathfrak{p}\subset J$, 因此 $\mathfrak{p}+Ra$ 与 $J$ 都是有限生成的. 设 $\{p_1+r_1a,\cdots,p_n+r_na\}$ 是 $\mathfrak{p}+Ra$ 的生成系, $p_1,\cdots,p_n\in\mathfrak{p}$, $r_1,\cdots,r_n\in R$, 及 $\{x_1,\cdots,x_m\}$ 是 $J$ 的生成系.

对任何 $x\in\mathfrak{p}$, 有 $x\in\mathfrak{p}+Ra$. 故可记

$$x=\sum_{i=1}^n c_i(p_i+r_ia)=\sum_{i=1}^n c_ip_i+\left(\sum_{i=1}^n c_ir_i\right)a,$$

其中 $c_i\in R$. 设 $s=\sum\limits_{i=1}^n c_ir_i$, 则 $sa=x-\sum\limits_{i=1}^n c_ip_i\in\mathfrak{p}$. 故 $s\in J$. 于是有 $s=\sum\limits_{j=1}^m d_jx_j$, 其中 $d_j\in R$. 因此

$$x=\sum_{i=1}^n c_ip_i+\sum_{j=1}^m d_jx_ja.$$

这样我们得到 $\{p_i,x_ja\,|\,i=1,\cdots,n,\ j=1,\cdots,m\}$ 是 $\mathfrak{p}$ 的生成系, 故 $\mathfrak{p}$ 是有限生成的. 这与 $\mathfrak{p}\in\Gamma$ 的事实矛盾, 因此 $\mathfrak{p}$ 是素理想. □

**定理 1.2.6** 设 $N$ 是环 $R$ 的理想, $\overline{R}=R/N$.

(1) 设 $\mathfrak{p}$ 是 $R$ 的素理想且 $N\subseteq\mathfrak{p}$, 则 $\overline{\mathfrak{p}}\overset{\text{def}}{=}\mathfrak{p}/N$ 是环 $\overline{R}$ 的素理想;

(2) 环 $\overline{R}$ 中的任何素理想可表示为 $\mathfrak{p}/N$, 其中 $\mathfrak{p}$ 是 $R$ 的素理想且 $N\subseteq\mathfrak{p}$;

(3) 环 $\overline{R}$ 中的任何极大理想可表示为 $\mathfrak{m}/N$, 其中 $\mathfrak{m}$ 是 $R$ 的极大理想且 $N\subseteq\mathfrak{m}$;

(4) 环 $R$ 的包含 $N$ 的素理想的集合与环 $\overline{R}$ 中的所有素理想的集合是一一对应的;

(5) 环 $R$ 的包含 $N$ 的极大理想的集合与环 $\overline{R}$ 中的所有极大理想的集合是一一对应的.

**证** 留作练习. □

**定理 1.2.7** 设 $I,\mathfrak{p}_0$ 是 $R$ 的理想, $\mathfrak{p}_1,\mathfrak{p}_2,\cdots,\mathfrak{p}_n$ 是素理想. 若

$$I\subseteq\mathfrak{p}_0\bigcup\mathfrak{p}_1\bigcup\mathfrak{p}_2\bigcup\cdots\bigcup\mathfrak{p}_n,$$

则存在 $i$, $0 \leqslant i \leqslant n$, 使得 $I \subseteq \mathfrak{p}_i$.

**证**　$n=0$ 的情形是显然的. 若对任何 $i$, $I \not\subseteq \mathfrak{p}_i$, 则在给定的并里面去掉多余的 $\mathfrak{p}_i$, 我们可以假设 $n \geqslant 1$, 且 $n$ 是使得 $I \subseteq \mathfrak{p}_0 \bigcup \mathfrak{p}_1 \bigcup \cdots \bigcup \mathfrak{p}_n$ 成立的最小正整数, 即对 $i=0,1,\cdots,n$, 有 $I \not\subseteq \bigcup\limits_{j \neq i} \mathfrak{p}_j$. 从而对每一个 $i$, 存在 $x_i \in I - \bigcup\limits_{j \neq i} \mathfrak{p}_j$. 由 $I \subseteq \bigcup\limits_{j=0}^{n} \mathfrak{p}_j$ 知 $x_i \in \mathfrak{p}_i$.

考虑元素 $x = x_n + x_0 x_1 \cdots x_{n-1}$, 则 $x \in I$. 于是存在下标 $i$, 使得 $x \in \mathfrak{p}_i$. 若 $x \in \mathfrak{p}_n$, 则 $x_0 x_1 \cdots x_{n-1} \in \mathfrak{p}_n$. 由于 $\mathfrak{p}_n$ 是素理想, 因此, 有某个下标 $i < n$, 使得 $x_i \in \mathfrak{p}_n$. 这与 $x_i$ 的选取矛盾. 若 $x \in \mathfrak{p}_k$, $k < n$. 由 $x_0 x_1 \cdots x_{n-1} \in \mathfrak{p}_k$, 有 $x_n \in \mathfrak{p}_k$, 这与 $x_n$ 的选取矛盾. □

**定理 1.2.8**　设 $\mathfrak{p}, \mathfrak{p}_1, \mathfrak{p}_2, \cdots, \mathfrak{p}_n$ 是 $R$ 的素理想. 若

$$\mathfrak{p}_1 \bigcap \mathfrak{p}_2 \bigcap \cdots \bigcap \mathfrak{p}_n = \mathfrak{p},$$

则存在 $i$, $1 \leqslant i \leqslant n$, 使得 $\mathfrak{p}_i = \mathfrak{p}$.

**证**　留作练习. □

**环的极小素理想**　设 $\mathfrak{p}$ 是 $R$ 的素理想, 若 $\mathfrak{p}$ 不包含其他的素理想, 则 $\mathfrak{p}$ 叫作 $R$ 的极小素理想.

设 $R$ 是整环, 则零理想就是极小素理想.

**定理 1.2.9**　对 $R$ 的任何素理想 $\mathfrak{p}$, 必存在极小素理想 $\mathfrak{q}$, 使得 $\mathfrak{q} \subseteq \mathfrak{p}$. 因此, 任何环 $R$ 必有极小素理想.

**证**　令 $\Gamma$ 是 $R$ 的所有包含在 $\mathfrak{p}$ 中的素理想的集合, 由于 $\mathfrak{p} \in \Gamma$, 故 $\Gamma$ 非空. 定义 $\Gamma$ 的序关系为子集的反包含关系. 由定理 1.2.4 知 $\Gamma$ 的任何全序子集有上界, 从而 $\Gamma$ 有极大元 $\mathfrak{q}$, 即 $R$ 的极小素理想. □

**在一个理想上的极小素理想**　设 $I$ 是 $R$ 的理想, $\mathfrak{p}$ 是 $R$ 的素理想. 如果 $I$ 与 $\mathfrak{p}$ 之间无其他的素理想, 则称 $\mathfrak{p}$ 为理想 $I$ 上的极小素理想.

显然, $\mathfrak{p}$ 是理想 $I$ 上的极小素理想当且仅当 $\mathfrak{p}/I$ 是环 $R/I$ 的极小素理想.

仿照定理 1.2.9 的证明方法, 我们可得：

**定理 1.2.10**　设 $I$ 是 $R$ 的理想, $\mathfrak{p}$ 是 $R$ 中包含 $I$ 的素理想. 则存在 $I$ 上的极小素理想 $\mathfrak{q}$, 使得 $\mathfrak{q} \subseteq \mathfrak{p}$.

## §1.3　环的诣零根与 Jacobson 根

**幂零理想**　设 $I$ 是 $R$ 的理想, 如果存在正整数 $n$, 使得 $I^n = 0$, 则 $I$ 称为 $R$ 的幂零理想.