旋转二次曲面光学系统的成像理论

郑世旺 著

兵器工业出版社

旋转二次曲面光学系统的成像理论

郑世旺　著

兵器工业出版社

内 容 简 介

本书利用椭球面、双曲面和抛物面的标准方程及利用二次曲面的统一解析方程，选择表示旋转二次曲面特征的焦点和焦点参数作为基本量，成功地研究了旋转二次曲面和旋转二次曲面透镜及其组合光学系统的成像问题，给出了近轴成像公式和一系列结论，这些结果形式简洁统一，具有一般性，而球面和平面的成像理论仅是该结果的特例。从折射定律出发，用几何方法导出了旋转二次曲面折射成像的球差公式，利用该公式可精确计算旋转椭球面、抛物面、双曲面和球面对任意孔径光线折射成像的实际球差，并由此比较了不同类型二次曲面及其透镜的成像质量，发现非球面二次曲面薄透镜的成像质量优于球面薄透镜的成像质量。所以，利用本书所述研究成果有助于进一步开发高质量的光学元件。

本书可作为高等院校物理学、光学专业的教师、高年级学生、研究生的教学参考书，也可供光学科技人员参考。

图书在版编目(CIP)数据

旋转二次曲面光学系统的成像理论 / 郑世旺著. —北京：兵器工业出版社，2006.7

ISBN 7-80172-699-5

Ⅰ. 旋... Ⅱ. 郑... Ⅲ. 二次曲面—光学系统—成像—研究 Ⅳ. 043

中国版本图书馆 CIP 数据核字（2006）第 069464 号

出版发行：兵器工业出版社　　责任编辑：张小洁
发行电话：010-68962596，68962591　　封面设计：李　晖
邮　　编：100089　　责任校对：郭　芳
社　　址：北京市海淀区车道沟 10 号　　责任印制：赵春云
经　　销：各地新华书店　　开　　本：850×1168　1/32
印　　刷：北京市登峰印刷厂　　印　　张：6
版　　次：2006 年 7 月第 1 版第 1 次印刷　　字　　数：200 千字
印　　数：1—2000　　定　　价：20.00 元

前　言

由于光学仪器中使用的大都是球面透镜，国内外光学文献多数是研究球面及其透镜的成像问题，但是，球面透镜易形成较大像差，而非球面透镜能克服球面透镜的缺点，对校正像差十分有利。过去，制作非球面透镜有较大困难，随着用计算机控制透镜研磨技术的逐步完善，目前，生产非球面透镜已有了技术保证。椭球面、双曲面和抛物面属于非球面，但和球面一样同属二次曲面，都是最基本最重要的几何曲面。然而国内外光学文献对这些曲面的成像问题研究甚少，大都借助于曲率中心和曲率半径研究光在平面、球面上折射和反射的成像问题，但这仅限于平面和球面。旋转椭球面、双曲面、抛物面等旋转二次曲面及其透镜能否理想成像呢？其理想成像的条件如何？成像公式、成像规律如何？其成像质量是否优于球面及其透镜等问题，没有人进行过系统研究，可见，几何光学的成像理论仍不完善，还存在缺陷。我们承担的商丘科技攻关项目“旋转二次曲面及其透镜的成像研究及应用”和河南省高校教学研究项目“旋转二次曲面成像在物理教学中的应用研究”，对以上问题进行了专题研究，后一个项目曾获四年一度的河南省优秀教学成果一等奖。本书分别利用椭球面、双曲面和抛物面的标准方程及利用二次曲面的统一解析方程，选择表示旋转二次曲面特征的焦点和焦点参数（正焦弦长度的一半）作为基本量，成功地研究了旋转二次曲面和旋转二次曲面透镜及其组合光学系统的成像问题，给出了近轴成像公式和一系列结论，这些结果形式简洁统一，具有一般性，而球面和平面的成像理论仅是该结果的特例。所以，以旋转二次曲面的成像理论覆盖球面的成像理论，会使几何光学的成像理论更完善、更系统、更一般。以

二次曲面的焦点和焦点参数为基本量研究旋转二次曲面的成像比以曲率中心、曲率半径为基本量研究其成像更科学、更方便。

旋转二次曲面透镜有无开发价值取决于其成像质量是否优于常用的球面透镜，故对旋转二次曲面及其透镜成像质量的研究有重要意义。虽然，旋转二次曲面及其透镜在近轴条件下可理想成像，但在实际光学仪器中，往往要求入射光线为宽光束，即近轴条件得不到满足。为研究旋转二次曲面的成像质量，本书从折射定律出发，用几何方法推导出了旋转二次曲面折射成像的统一球差公式，利用该公式可精确计算旋转椭球面、抛物面、双曲面和球面对任意孔径光线折射成像的实际球差，并由此比较了不同类型旋转二次曲面及其透镜的成像质量，结果发现，旋转椭球面、抛物面和双曲面双凸薄透镜的成像质量都优于球面双凸薄透镜，不仅如此，旋转椭球面平凸薄透镜对无限远物点的成像质量远高于最佳型球面薄透镜。

我们近几年已经把旋转二次曲面成像研究的成果应用于课堂教学。实践表明，把原光学教材中只研究球面及其透镜的成像扩展到旋转二次曲面的成像，能拓宽学生的知识面，开扩学生视野，提高学生的创造思维能力，有利于提高学生的综合素质。有不少学生以旋转二次曲面成像问题研究作为自己毕业论文的选题，并立志以实际行动在光学元件开发和光学仪器改进的领域中做出贡献。

本书在写作过程中得到了傅景礼教授的大力支持和帮助，在这里表示感谢。由于时间仓促和作者的水平有限，书中难免有些疏漏，敬请读者批评指正。

作　者

2006 年春

目　　录

第 1 章　二次曲线和二次曲面

研究二次曲面光学系统的成像性质必须知道二次曲面的结构方程及其性质，这些知识也是本书的基础。在光学系统中主要是应用轴对称曲面，对于这种曲面用它的子午截线方程表示曲面方程即可，故我们必须掌握不同类型二次曲线的解析方程及其性质。本章详细介绍圆、椭圆、双曲线和抛物线在不同坐标系下的解析方程及其性质，最后介绍二次曲面的解析方程和性质。

1.1　圆的解析方程和性质

球面的截线是圆，圆是二次曲线的一种。本节主要讨论圆的定义、解析方程及切线方程。

1.1.1　圆的定义和解析方程

1. 圆的定义

在平面上，到定点的距离等于定长的所有点的集合称为圆，定点称为圆心，定长称为圆的半径。

2. 圆的解析方程

1）圆的标准方程

在直角坐标平面内，如图 1.1.1 所示，当圆心在点

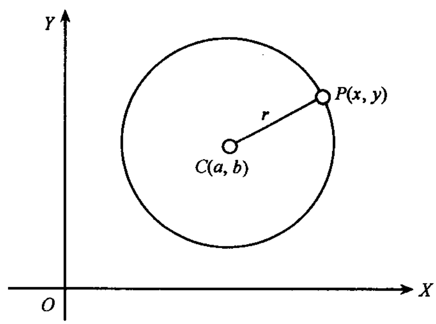

图 1.1.1　圆心在 C 点的圆

$C(a,b)$，r 为半径的圆的方程是

$$(x-a)^2+(y-b)^2=r^2 \tag{1.1.1}$$

这个方程叫圆的标准方程。

以坐标原点为圆心的圆的标准方程为

$$x^2+y^2=r^2 \tag{1.1.2}$$

2）圆的一般方程

圆的一般方程为

$$x^2+y^2+Dx+Ey+F=0 \tag{1.1.3}$$

圆的一般方程可以化为

$$\left(x+\frac{D}{2}\right)^2+\left(y+\frac{E}{2}\right)^2=\frac{D^2+E^2-4F}{4} \tag{1.1.4}$$

当 $D^2+E^2-4F>0$ 时，它就表示圆心是点 $\left(-\frac{D}{2},-\frac{E}{2}\right)$，半径是 $\frac{1}{2}\sqrt{D^2+E^2-4F}$ 的一个圆。

当 $D^2+E^2-4F=0$ 时，它只表示唯一的一个点 $\left(-\frac{D}{2},-\frac{E}{2}\right)$。通常把这个轨迹叫做点圆。

当 $D^2+E^2-4F<0$ 时，这个方程所表示的曲线不存在。通常把这个轨迹叫虚圆。

例 1.1.1 $\triangle ABC$ 的三个顶点分别是 $A(5,1)$、$B(0,-1)$、$C(2,-3)$，求它的外接圆的方程，并且求出这个圆的圆心的坐标和半径。

解 设所求圆的方程是

$$x^2+y^2+Dx+Ey+F=0$$

因为它是 $\triangle ABC$ 的外接圆，所以点 A、B、C 都在圆上，就是

$$\begin{cases}5D+E+F+26=0\\-E+F+1=0\\2D-3E+F+13=0\end{cases}$$

解这个方程组，得

$$D=-\frac{37}{7},E=\frac{5}{7},F=-\frac{2}{7}$$

所以,所求圆的方程是

$$x^2+y^2-\frac{37}{7}x+\frac{5}{7}y-\frac{2}{7}=0$$

这个圆的圆心坐标是$\left(\frac{37}{14},-\frac{5}{14}\right)$,半径$r=\frac{5\sqrt{58}}{14}$。

1.1.2 圆的切线方程

1. 经过圆上的切线方程

定理 1 设$P_1(x_1,y_1)$是圆

$$x^2+y^2=r^2$$

上的一点,那么经过点$P_1(x_1,y_1)$的圆的切线方程是

$$x_1x+y_1y=r^2 \tag{1.1.5}$$

证明 设$P(x,y)$是切线上的任意一点(见图 1.1.2),那么切线的斜率

$$k=\frac{y-y_1}{x-x_1}$$

半径的斜率

$$k'=\frac{y_1}{x_1}$$

根据圆的切线性质,有$OP_1\perp PP_1$,所以

$$kk'=-1$$

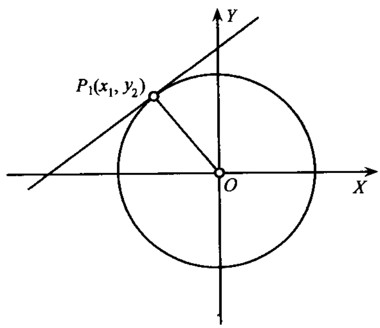

图 1.1.2 圆心在坐标原点的圆

即

$$\frac{y-y_1}{x-x_1}=-\frac{x_1}{y_1}$$

化简后,得

$$x_1x+y_1y=x_1^2+y_1^2$$

因为$P_1(x_1,y_1)$在圆上,所以

$$x_1^2 + y_1^2 = r^2$$

代入上式得到

$$x_1x + y_1y = r^2$$

定理 2 设 $P_1(x_1, y_1)$是圆

$$x^2 + y^2 + Dx + Ey + F = 0$$

上的一点,那么经过点 $P_1(x_1, y_1)$的圆的切线方程是

$$x_1x + y_1y + \frac{D}{2}(x + x_1) + \frac{E}{2}(y + y_1) + F = 0 \tag{1.1.6}$$

证明方法类似于定理 1。

2. 经过圆外的切线方程

例如:求经过圆($x^2+y^2=r^2$)外一点 $P_0(x_0, y_0)$的切线方程,可以按照下面的步骤来解:

(1) 设切点是 $P_1(x_1, y_1)$,写出经过点 $P_1(x_1, y_1)$的切线方程

$$x_1x + y_1y = r^2 \tag{1.1.7}$$

(2) 根据 $P_0(x_0, y_0)$在切线上和 $P_1(x_1, y_1)$在圆上这两个条件,列出方程组

$$\begin{cases} x_1x_0 + y_1y_0 = r^2 \\ x_1^2 + y_1^2 = r^2 \end{cases}$$

这里,x_0、y_0、r 都是常数,x_1、y_1 是未知数。

(3) 解这个方程组,求出 x_1、y_1 的值。

(4) 再代入方程(1.1.7),就得到所求的切线方程。

例 1.1.2 求和圆($x^2+y^2=1$)相切的直线方程,(1)已知这条直线经过点 $P_1\left(\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$;(2)已知这条直线经过点 $P_2(-1, -2)$。

解 (1) 因为点 $P_1\left(\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$的坐标满足圆的方程

$$\left(\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 = 1$$

所以点 $P_1\left(\frac{1}{2},\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$ 在圆上，故经过点 $P_1\left(\frac{1}{2},\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$ 并和圆相切的直线方程是

$$\frac{1}{2}x+\frac{\sqrt{3}}{2}y=1$$

即

$$x+\sqrt{3}y-2=0$$

(2) 点 $P_2(-1,-2)$的坐标不满足圆的方程

$$(-1)^2+(-2)^2=5>1$$

所以点 $P_2(-1,-2)$在圆外。设直线和圆的切点是 $P_0(x_0,y_0)$，则切点是 $P_0(x_0,y_0)$的切线方程是

$$xx_0+yy_0=r^2$$

这条切线经过点 $P_2(-1,-2)$，所以

$$-x_0-2y_0=1 \tag{1.1.8}$$

因为切点 $P_0(x_0,y_0)$是圆上的一点，它的坐标适合于圆的方程，就是

$$x_0^2+y_0^2=1 \tag{1.1.9}$$

解(1.1.8)和(1.1.9)式组成的方程组得

$$\begin{cases}x_0=-1\\y_0=0\end{cases}\text{和}\begin{cases}x_0=\dfrac{3}{5}\\y_0=-\dfrac{4}{5}\end{cases}$$

故得两条和圆相切的直线方程分别是

$$\begin{cases}x+1=0\\3x-4y-5=0\end{cases}$$

1.2 椭圆的解析方程和性质

椭圆是二次曲线中的一种重要曲线，圆是椭圆的一个特例。本节主要讨论椭圆的定义、解析方程与性质。

1.2.1 椭圆的定义和解析方程

1. 椭圆的定义

如果平面内一个动点到两个定点的距离之和等于定长，我们称这个动点的轨迹为椭圆。这两个定点叫做焦点，两个焦点的距离叫做焦距。

2. 椭圆的标准方程

如图 1.2.1，取经过椭圆的两个焦点 F_1 和 F_2 的直线做 x 轴，F_1F_2 的垂直平分线做 y 轴，建立直角坐标系 XOY，并且设焦距 $|F_1F_2|=2c$，也就是设这两个焦点是 $F_1(-c,0)$ 和 $F_2(c,0)$，则动点到两个焦点间的距离之和为

$$|PF_1| + |PF_2| = 2a$$

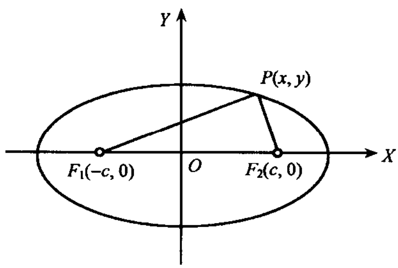

图 1.2.1　焦点在 x 轴上的椭圆

这时，椭圆的方程可以写成

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \tag{1.2.1}$$

的形式，这里，$b^2=a^2-c^2$。方程(1.2.1)叫做椭圆的标准方程。

证明：如图 1.2.1 所示，设 $P(x,y)$ 是椭圆上任意一点，因

$$|PF_1| + |PF_2| = 2a$$

所以

$$\sqrt{(x-c)^2+y^2} + \sqrt{(x+c)^2+y^2} = 2a$$

化简后得

$$(a^2-c^2)^2x^2 + a^2y^2 = a^2(a^2-c^2)$$

因为 $a>c$，在这里有

$$a^2-c^2>0$$

设 $b^2=a^2-c^2$，代入上式并整理得

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$$

所以椭圆上的点的坐标一定适合这个方程。

如果在方程(1.2.1)里，把 x 和 y 对调，则就可以得出椭圆方程的另一种标准形式

$$\frac{x^2}{b^2}+\frac{y^2}{a^2}=1 \qquad (1.2.2)$$

方程(1.2.2)所表示椭圆(见图 1.2.2)的两个焦点在 y 轴上，它们的坐标分别是 $(0,-c)$ 和 $(0,c)$，这里

$$c=\sqrt{a^2-b^2} \qquad (1.2.3)$$

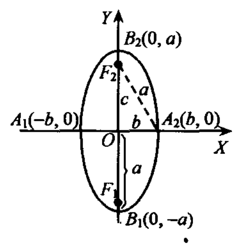

图 1.2.2 焦点在 y 轴上的椭圆

1.2.2 椭圆的性质

下面我们根据椭圆的标准方程

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$$

来研究椭圆的一些性质。

1) 截距

从方程(1.2.1)可以得出椭圆在 x 轴上的截距是 a 和 $-a$，y 轴上的截距是 b 和 $-b$，所以椭圆交 x 轴于点 $A_1(-a,0)$ 和点 $A_2(a,0)$，交 y 轴于点 $B_1(0,-b)$ 和点 $B_2(0,b)$，我们把 A_1、A_2、B_1、B_2 四点叫做椭圆的顶点，线段 A_1A_2 叫做椭圆的长轴，它的长等于 $2a$，线段 B_1B_2 叫做椭圆的短轴，它的长等于 $2b$。a 是椭圆半长轴的长，b 是椭圆半短轴的长，两轴的交点 $O(0,0)$ 叫做椭圆的中心。椭圆的焦点 F_1 和 F_2 在长轴上，如图 1.2.3 所示。

2) 对称性

若以 $-y$ 代 y，以 $-x$ 代 x，方程(1.2.1)都不变，所以椭圆是关于长轴、短轴和中心对称的图形。

3) 范围(见图 1.2.4)

由方程(1.2.1)得