高考数学专项夺标

GAOKAO
SHUXUE JIETIFA
JIEMI

高考数学解题法揭秘

高考数学研究组 组编

ZHEJIANG UNIVERSITY PRESS
浙江大學出版社

高考数学解题法揭秘

主　编　马茂年　张金良

编　委　（按姓氏笔画为序）

马茂年　王小海　王　新　王旭斌　方夏婴
李惟峰　许静香　朱进初　张金良　陈　伟
陈红艳　徐国君　徐小明　倪志香　俞　昕
俞建光　韩国梁　蒋瑞龙　谢春计　蔡小雄

浙江大學出版社

图书在版编目(CIP)数据

高考数学解题法揭秘 / 高考数学研究组组编. --杭州：浙江大学出版社,2006.3
ISBN 7-308-04655-9

Ⅰ.高... Ⅱ.高.... Ⅲ.数学课—高中—解题—升学参考资料 Ⅳ.G634.605

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2006)第 018457 号

出版发行 浙江大学出版社
(杭州浙大路 38 号 邮政编码 310027)
(E mail:zupress@mail.hz.zj.cn)
(网址:http://www.zjupress.com)
责任编辑 阮海潮
排　　版 浙江大学出版社电脑排版中心
印　　刷 余杭人民印刷有限公司
开　　本 787mm×960mm 1/16
印　　张 12.25
字　　数 329 千字
版 印 次 2006 年 3 月第 1 版 2006 年 4 月第 2 次印刷
书　　号 ISBN 7-308-01655-9·G·1033
定　　价 15.00 元

前　言

高考复习是循序渐进、不断综合、不断深入、不断提高的过程,也是再学习、再研究、再认识、再质变的过程。数学作为高考三大工具学科之首,在高考中的地位是显而易见的。那么,怎样才能学好数学呢?特别提醒考生要注意以下几点:

1. 要真正做到了解自己,要了解自己的知识薄弱环节,寻找相关题目,进行有选择性、有针对性的训练。

2. 在做题过程中,要掌握解决问题的基本方法,注重通性通法,做题要有主动意识,要及时总结和反思,力争通过做一题,得到一类问题的解决方法。

3. 在做题过程中,要注重解题的思考过程,注重研究解题的方向和策略,逐步提高自身的解题能力。

4. 在做题过程中,要有一个阶段对选择题、填空题、中档题、综合题进行专门训练,要加强准确度的训练,提高解题速度,只有这样才能在高考中取得好成绩。

5. 在做题过程中,应该学会数学思维与数学方法,数学思维方法都不是单独存在的,都有其对立面,并且两者能够在解决问题的过程中相互转换、补充,领悟数学思维中的哲学思想和在哲学思想的指导下进行数学思维,是提高学生数学素养、培养学生数学能力的重要方法。

6. 加强自身解题规范性的训练,了解试卷批改中的给分点,严格按评分标准书写解答题,熟练、准确地用文字语言、符号语言、逻辑语言表达解题过程,字迹工整,力争会做的题目不丢步骤分,不完全会做的题目也能拿到部分分数。

"高考数学专项达标丛书"以其鲜活的素材,准确的信息,新

颖的体例，独特的风格呈现给读者。丛书包括《高考数学新颖题解读》、《高考数学解题法揭秘》、《高考数学选择题突破》、《高考数学填空题巧解》、《高考数学中档题攻略》、《高考数学综合题透析》、《高考数学展望与对策》共七个分册。丛书内容全面细致，容量大，既抓住主干知识的重点、难点、热点，又不留知识死角。题型全面，题量充分，体例设计科学，构思奇巧。丛书可以带领你进入数学的殿堂，领略殿堂的美丽和奥妙，掌握更熟练的方法和技巧。

丛书由高考数学研究组组织编写。尽管在成书过程中，我们本着近乎苛刻的态度，题题推敲，层层把关，力求能够帮助读者更好地把握丛书的脉络和精华，但书中也难免有疏忽和纰漏之处，诚挚地希望广大师生批评指正。

目　录

第1讲　集合与简易逻辑

基础知识扫描

1. $A\cap B=A\Leftrightarrow A\subseteq B$；$A\cup B=B\Leftrightarrow A\subseteq B$；

2. $\complement_U(A\cap B)=(\complement_U A)\cup(\complement_U B)$；$\complement_U(A\cup B)=(\complement_U A)\cap(\complement_U B)$；

3. 若 $A\subseteq B$，$B\subseteq C$，则 $A\subseteq C$；若 $A\subsetneqq B$，$B\subsetneqq C$，则 $A\subsetneqq C$；

4. 逻辑联结词：或、且、非.

解题方法揭秘

1. 集合的概念与“全体”的区别：集合虽然也有全体的意思，但与通常所解释的全体是有区别的，集合中的元素必须是确定的，必须能判断任何一个对象是不是它的元素，而全体则不一定能成为一个集合.

2. “A 是 B 的子集”的理解是集合 A 中的任何一个元素都是 B 的元素，但不能解释为 A 是由 B 中部分元素组成的集合，例如 $\varnothing\subseteq B$，$B\subseteq B$.

3. “且”和“或”是两个逻辑联结词，“且”的理解与通常理解的“既是……，同时……”是一样的，“或”的意思与通常理解的“非此即彼”有区别，它是两者可兼的.

4. 注意元素与集合的关系是从属关系，集合与集合是包含关系.

5. 四种命题反映出命题之间的内在联系，要注意结合实际问题，理解其关系（尤其是两种等价关系）的产生过程，关于逆命题、否命题与逆否命题，也可以叙述为：

(1) 交换命题的条件和结论，所得命题就是原命题的逆命题；

(2) 同时否定命题的条件和结论，所得新命题就是原命题的否命题；

(3) 交换命题的条件和结论，并且同时否定，所得的新命题就是原命题的逆否命题.

6. 注意否命题与命题的否定的区别.

7. 常用正面词语与它的否定的区别.

正面词语	等于	大于 (>)	小于 (<)	是	都是	任意的	所有的	任意两个	至多一个
否定词语	不等于	不大于 (≤)	不小于 (≥)	不是	不都是	某个	某些	某两个	至少两个
正面词语	至少有一个					至多有 n 个			
反面词语	一个也没有					至少有 $n+1$ 个			

经典例题剖析

例1（2004年全国卷）　设集合 $M=\{(x,y)\mid x^2+y^2=1,x\in\mathbf{R},y\in\mathbf{R}\}$，$N=\{(x,y)\mid x^2-y=0,x\in\mathbf{R},y\in\mathbf{R}\}$，则集合 $M\cap N$ 中元素的个数为（　　）

A. 1　　B. 2　　C. 3　　D. 4

高考数学解题法揭秘

解法一　将两个方程联立为方程组消元，通过判别式判断方程组公共解的个数即可，即求$\begin{cases}x^2+y^2=1\\x^2-y=0\end{cases}$解的个数，消去$x$得$y^2+y-1=0$，因为$\Delta>0$，所以有两个解，一正、一负，又因为$y\geqslant 0$，所以负根舍去，代入原方程$x$有两个解，则方程组有两组解，故对应两个交点，应选B.

解法二　一个方程表示以原点为圆心，半径为1的圆，另一个方程表示顶点为坐标原点，开口向上的抛物线，两图像交点的个数为2，从而得到答案B.

说明　解法一，应用了传统解题思路，联立方程组消元，再对化简后的方程利用二次方程的判别式判断有几个实根，从而达到求两个集合交集的元素个数的目的；解法二，在同一坐标系中，绘制两个方程表示的曲线的图像，通过判断交点的个数情况，达到求两个集合的交集的元素个数的目的. 对比两解法，我们不难发现，数形结合思想在解题中简便实用.

例2(2003年上海卷)　设集合$A=\{x||x|<4\}$，$B=\{x|x^2-4x+3>0\}$，则集合$\{x|x\in A$且$x\notin A\cap B\}=$________.

解　集合$A=\{x|-4<x<4\}$，$B=\{x|x>3$或$x<1\}$.

$\because A\cap B=\{x|-4<x<1$或$3<x<4\}$，

$\therefore\{x|x\in A$且$x\notin A\cap B\}=\{x|1\leqslant x\leqslant 3\}$.

故应填$\{x|1\leqslant x\leqslant 3\}$.

说明　本题容易在三个方面出现错误：①化简集合A、B；②对“$x\in A$且$x\notin A\cap B$”的理解；③$A\cap B$求解错误. 错误原因，一是求解含绝对值符号的不等式，一元二次不等式方法不熟，基本功不扎实；二是集合的运算概念混淆，以及“且”“或”“$\notin$”等的理解出现偏差.

例3　设全集$U=\{(x,y)|x\in\mathbf{R},y\in\mathbf{R}\}$，$A=\{(x,y)|x-2y+m>0\}$，$B=\{(x,y)|2x+3y-n\leqslant 0\}$，则点$P(1,4)\in A\cap(\complement_U B)$的充要条件是　(　　)

A. $m>7,n<14$　　　B. $m>7,n>14$

C. $m<7,n<14$　　　D. $m<7,n>14$

解　$\because \complement_U B=\{(x,y)|2x+3y-n>0\}$，由$P(1,4)\in A\cap(\complement_U B)$，可得$1-2\times4+m>0$，$2\times1+3\times4-n>0$，即$m>7,n<14$，故选A.

说明　解决本题的关键是理解$P(1,4)\in A\cap(\complement_U B)$的具体意义和$\complement_U B$的具体意义和$\complement_U B$的表达式，通过将$P(1,4)$代入两个不等式，从而求得$m$与$n$的取值范围.

例4　设已知集合$A=\{x|10+3x-x^2\geqslant 0\}$，$B=\{x|m+1\leqslant x\leqslant 2m-1\}$. 如果$A\cap B=\varnothing$，求$m$的取值范围.

解　本题着重考查交集，$\varnothing$和集合之间关系和分类讨论的数学思想，兼顾一元二次不等式的解法，关键是隐含的分类讨论问题.

由题设$A=\{x|10+3x-x^2\geqslant 0\}=\{x|-2\leqslant x\leqslant 5\}$.

$B=\{x|m+1\leqslant x\leqslant 2m-1\}$，又$A\cap B=\varnothing$.

所以共有三种情况：

(ⅰ)$B=\varnothing$，即$m+1>2m-1\Rightarrow m<2$.

(ⅱ)$\begin{cases}m+1\leqslant 2m-1\\2m-1<-2\end{cases}$，此时无解.

(ⅲ) $\begin{cases} m+1\leqslant 2m-1 \\ m+1>5 \end{cases} \Rightarrow m>4$.

综上可知 $m>4$ 或 $m<2$.

说明　由 $A\cap B=\varnothing\Rightarrow B=\varnothing$ 或其他情况时易漏掉 $B=\varnothing$ 的情况；对于集合 B 应理解为 $m+1\leqslant 2m-1$ 时 $B\neq\varnothing$，$m+1>2m-1$ 时 $B=\varnothing$；另外，有的学生易把三种情况 m 的值求交集，也容易搞错.

例 5　已知命题 p：方程 $x^2-mx+1=0$ 有两个不等的正实数根；命题 q：方程 $4x^2-4(m-2)x+m^2=0$ 无实数根，若"p 或 q"为真，"p 且 q"为假，则下列结论：①p、q 都为真；②p、q 都为假；③p、q 一真一假；④p、q 中至少有一个为真；⑤p、q 中至少有一个为假.

其中正确结论的序号是________，m 的取值范围是________.

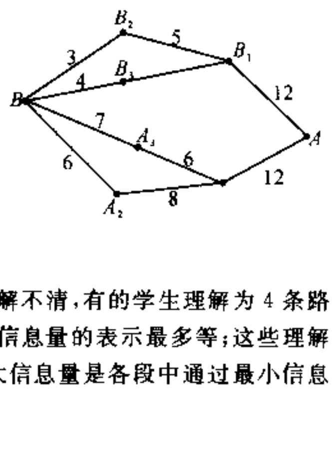
解　命题 p 中方程 $x^2-mx+1=0$ 有两个不等的正实数根，当且仅当 $\begin{cases} \Delta=m^2-4>0, \\ x_1+x_2=m>0, \\ x_1x_2=1>0, \end{cases}$ 即 $m>2$；命题 q 中方程 $4x^2-4(m-2)x+m^2=0$ 无实数根，当且仅当 $\Delta=16[(m-2)^2-m^2]<0$，即 $m>1$."p 或 q"为真当且仅当 p、q 中至少一个为真，"p 且 q"为假当且仅当 p、q 中至少一个为假，故结论③正确，推得 m 的取值范围为 $1<m\leqslant 2$，结论④、⑤推得不彻底，不正确. 故分别填③和 $1<m\leqslant 2$.

说明　简易逻辑为新增内容，要求学生掌握一些简单逻辑常识，简单命题与复合命题，命题真假的判断，四种命题之间的关系等，常用到等价转化思想.

例 6(2001 年全国高考题)　如图所示，小圆点表示网络的结点，结点之间的连线表示它们有网线相联，连线标注的数字表示该段网线单位时间内可以通过的最大信息量. 现从结点 A 向结点 B 传递信息，信息可以分开沿不同的路线同时传递，则单位时间内传递的最大信息量是　(　　)

A. 26　　B. 24　　C. 20　　D. 19

解　本题主要考查由图形进行逻辑推理，进而求解，是高考的新题型.



由图可知 $A\to B$ 共有 4 条路径，每条路径单位时间内传递的最大信息量是：

(1)$A\to B_1\to B_2\to B$：3　(2)$A\to B_1\to B_3\to B$：4

(3)$A\to A_1\to A_2\to B$：6　(4)$A\to A_1\to A_3\to B$：6

∴4 条路径在单位时间内传递的最大信息量总共是 $3+4+6+6=19$，故应选 D.

说明　本题其他三个答案均容易错答，原因是学生对题意理解不清，有的学生理解为 4 条路径中哪一条传递信息量最大，有的学生理解为每条路径要通过的信息量的表示最多等；这些理解都没有对图形分析后进行分析推理得出应是每条路径通过的最大信息量是各段中通过最小信息量，从而使问题得以解决.

例 7　集合 $A=\{x\mid x^2-3x+2=0\}$，$B=\{x\mid x^2-ax+(a-1)=0\}$，$C=\{x\mid x^2-mx+2=0\}$.

已知 $A\cup B=A$，$A\cap C=C$，求 a，m 之值.

解　本题着重考查交集、并集及集合之间的关系，兼顾一元二次方程求解的技能，特别是 $A\cup B=A\Rightarrow$(ⅰ)$B\neq\varnothing$，(ⅱ)$B=A$，(ⅲ)$B\subsetneqq A$ 和 $A\cap C=C\Rightarrow$(ⅰ)$A=C$，(ⅱ)$A\supsetneqq C$，(ⅲ)$C=\varnothing$ 的推理是本题的重点也是关键.

由题设知 $A=\{x|x^2-3x+2=0\}=\{1,2\}$，$B=\{x|x^2-ax+(a-1)=0\}=\{1,a-1\}$. 又由 $A\cup B=A$.

$\therefore B=\{1\}$ 或 $B=\{1,2\}$.

若 $B=\{1\}$，则 $a-1=1$，$\therefore a=2$.

若 $B=\{1,2\}$，则 $a-1=2$，$\therefore a=3$.

又 $A\cup C=C$，则 $C=\varnothing$ 或 $\{1\}$ 或 $\{2\}$ 或 $\{1,2\}$.

若 $C=\varnothing$，则 $\Delta=m^2-4\times2=m^2-8<0$，$\therefore -2\sqrt{2}<m<2\sqrt{2}$.

若 $C=\{1\}$ 或 $\{2\}$，则 $\Delta=0$，即 $m=\pm2\sqrt{2}$ 且 $\frac{m}{2}=1$ 或 2.

$\therefore m=\pm2\sqrt{2}$ 且 $m=2$ 或 4，此为矛盾.

若 $C=\{1,2\}$，则 $m=3$.

综上可知 $a=2$ 或 3，所求 m 的值为 3.

说明　本题易对条件 $A\cup B=A$ 和 $A\cap C=C$ 运用时，要么不会转换，要么转换时漏掉 $B=\varnothing$ 或 $C=\varnothing$ 的情况，要强调 $A\cup B=A\Rightarrow B\subseteq A$ 或 $A\cap C=C\Rightarrow C\subseteq A$ 和不能漏掉空集的情况.

例 8　已知函数 $f(x)$ 满足下列条件：(1) $f(\frac{1}{2})=1$；(2) $f(xy)=f(x)+f(y)$；(3) $f(x)$ 的值域为 $[-1,1]$，求证：$\frac{1}{4}$ 不在 $f(x)$ 的定义域内.

解　本题主要考查利用函数的性质求值和反证法.

假设 $\frac{1}{4}$ 在 $f(x)$ 的定义域内，则 $f(\frac{1}{4})$ 有意义，且 $f(\frac{1}{4})\in[-1,1]$.

又由题设，得 $f(\frac{1}{4})=f(\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2})=f(\frac{1}{2})+f(\frac{1}{2})=2\notin[-1,1]$，

此与 $f(\frac{1}{4})\in[-1,1]$ 矛盾.

故假设不成立，从而 $\frac{1}{4}$ 不在 $f(x)$ 的定义域内.

说明　运用反证法时常见词语的否定方式有："在"⇒"不在"；"是"⇒"不是"；"都是"⇒"不都是"；"大于"⇒"不大于"；"所有的…"⇒"至少有一个不…"；"至少有一个"⇒"一个也没有"；"任意一个"⇒"存在某个不…"；等等.

变题　若三条抛物线 $y=x^2+4ax-4a+3$，$y=x^2+(a-1)x+a^2$，$y=x^2+2ax-2a$ 中至少有一条与 x 轴有公共点，求 a 的取值范围.

解　若按一般思维习惯，对三条抛物线与 x 轴公共点情况一一分类讨论，则较为繁琐. 若从其反面思考，先求"三抛物线均与 x 轴无公共点的 a 的范围"则很简单.

$$由\begin{cases}\Delta_1=(4a)^2-4(-4a+3)<0,\\ \Delta_2=(a-1)^2-4a^2<0,\\ \Delta_3=4a^2-4(-2a)<0\end{cases}$$

解之得$-\frac{3}{2}<a-1$，$A=(-\frac{3}{2},-1)$，

则所求a的范围是$\complement_{\mathbf{R}}A=(-\infty,-\frac{3}{2}]\cup[-1,+\infty)$.

素质能力检测

一、选择题：本大题共12小题，每小题5分，共60分．在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的．

1. 设集合$P=\{1,2,3,4,5,6\}$，$Q=\{x|2\leqslant x\leqslant 6,x\in\mathbf{N}\}$，那么下列结论正确的是 ( )

A. $P\cap Q=P$　　B. $P\cap Q\supsetneqq Q$　　C. $P\cup Q=Q$　　D. $P\cap Q\subsetneqq P$

2. 设A、B、I均为非空集合，且满足$A\subseteq B\subseteq I$，则下列各式中错误的是 ( )

A. $(\complement_I A)\cup B=I$　　B. $(\complement_I A)\cup(\complement_I B)=I$

C. $A\cap(\complement_I B)=\varnothing$　　D. $(\complement_I A)\cap(\complement_I B)=\complement_I B$

3. 在$\triangle ABC$中，“$A>30^\circ$”是“$\sin A>\frac{1}{2}$”的 ( )

A. 充分而不必要条件　　B. 必要而不充分条件

C. 充分必要条件　　D. 充分不必要条件

4. 对任意实数a,b,c，在下列命题中，真命题是 ( )

A. “$ac>bc$”是“$a>b$”的必要条件　　B. “$ac=bc$”是“$a=b$”的必要条件

C. “$ac>bc$”是“$a>b$”的充分条件　　D. “$ac=bc$”是“$a=b$”的充分条件

5. 函数$f(x)=x^2-2ax-3$在区间$[1,2]$上存在反函数的充分必要条件是 ( )

A. $a\in(-\infty,1]$　　B. $a\in[2,+\infty)$

C. $a\in[1,2]$　　D. $a\in(-\infty,1]\cup[2,+\infty)$

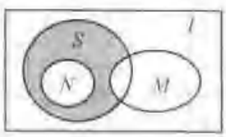
6. 已知$a\in\mathbf{R}$，集合$A=\{x|x^2=1\}$与$B=\{x|ax=1\}$，若$A\cup B=A$，则实数a能取到的所有值是 ( )

A. 1　　B. -1　　C. -1或1　　D. -1，0或1

7. 如图，I是全集，M、N、S是I集的子集，则图中阴影部分所示的集合是 ( )

A. $(\complement_I M\cap\complement_I N)\cap S$　　B. $\complement_I(M\cap N)\cap S$

C. $(\complement_I N\cap S)\cup M$　　D. $(\complement_I M\cap S)\cap N$



8. 若命题$p:x\in A\cup B$，则$\neg p$是 ( )

A. $x\notin A\cap B$　　B. $x\notin A$或$x\notin B$

C. $x\notin A$且$x\notin B$　　D. $x\in A\cap B$

9. 用反证法证明命题：“若整系数一元二次方程$ax^2+bx+c=0(a\neq 0)$有有理数根，那么a,b,c中至少有一个是偶数”时，下列假设中正确的是 ( )

A. 假设a,b,c都是偶数　　B. 假设a,b,c都不是偶数

C. 假设a,b,c至多有一个是偶数　　D. 假设a,b,c至多有两个是偶数

10. 设集合 $M=\{x\mid x=3m+1,m\in\mathbf{Z}\}$，$N=\{y\mid y=3n+2,n\in\mathbf{Z}\}$，若 $x_0\in M,y_0\in N$，则 x_0y_0 与集合 M、N 的关系是　(　　)

A. $x_0y_0\in M$　　B. $x_0y_0\notin M$　　C. $x_0y_0\in N$　　D. $x_0y_0\notin N$

11. 下列四个命题中，与命题 $A\subseteq B$ 等价的共有　(　　)

①$A\cap B=A$　②$A\cup B=B$　③$A\cap(\complement_U B)=\varnothing$　④$A\cup B=U$

A. 1 个　　B. 2 个　　C. 3 个　　D. 4 个

12. 函数 $f(x)=\begin{cases}x,x\in P,\\-x,x\in M,\end{cases}$ 其中 P、M 为实数集 $\mathbf{R}$ 的两个非空子集，又规定 $f(P)=\{y\mid y=f(x),x\in P\}$，$f(M)=\{y\mid y=f(x),x\in M\}$. 给出下列四个判断：①若 $P\cap M=\varnothing$，则 $f(P)\cap f(M)=\varnothing$；②若 $P\cap M\neq\varnothing$，则 $f(P)\cap f(M)\neq\varnothing$；③若 $P\cup M=\mathbf{R}$，则 $f(P)\cup f(M)=\mathbf{R}$；④若 $P\cup M\neq\mathbf{R}$，则 $f(P)\cup f(M)\neq\mathbf{R}$. 其中正确的判断有　(　　)

A. 1 个　　B. 2 个　　C. 3 个　　D. 4 个

二、填空题：本大题共 4 小题，每小题 4 分，共 16 分，把答案填在题中横线上.

13. 设集合 $A=\{5,\log_2(a+3)\}$，集合 $B=\{a,b\}$. 若 $A\cap B=\{2\}$，则 $A\cup B=$________.

14. 已知 $M=\{f(x)\mid f(x_1+x_2)=f(x_1)\cdot f(x_2)\}$，$N=\{f(x)\mid$ 若 $x_1<x_2$，则 $f(x_1)>f(x_2)\}$，满足条件 $M\cap N$ 的其中一个元素是________(只写出一个即可).

15. 在$\triangle ABC$ 中，"$\angle A>\angle B$"是"$\sin A>\sin B$"的________条件.

16. "若不等式 $x^2+px+q>0$ 的解集为 $\mathbf{R}$，则 $p^2-4q\leqslant 0$"的逆命题为________，否命题为________，逆否命题为________. 以上四个命题中真命题的个数为________个.

三、解答题：本大题共 6 小题，共 74 分，其中第 17～21 小题各题满分 12 分，第 22 小题满分 14 分，解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤.

17. 已知 $A=\{x\mid 1<|x-2|<2\}$，$B=\{x\mid x^2-(a+1)x+a<0\}$，且 $A\cap B\neq\varnothing$，试确定 a 的取值范围.

18. 已知 x 为实数，$a=x^2+\frac{1}{2}$，$b=2-x$，$c=x^2-x+1$，求证 a、b、c 中至少有一个不小于 1.

19. 设集合 $A=\{x\mid f(x)=\lg(x^2+ax+b)\}$，$B=\{x\mid g(x)=\sqrt{-x^2-4ax+k}\}$，$\complement_{\mathbf{R}}A=\{x\mid -2\leqslant x\leqslant 3\}$，且$(\complement_{\mathbf{R}}A)\cup B=B$，求实数 a、b 的值及实数 k 的取值范围.

20. 设集合 $A=\{x\mid -1\leqslant x\leqslant a\}$，$P=\{y\mid y=x+1,x\in A\}$，$Q=\{y\mid y=x^2,x\in A\}$.

(1)若 $Q\subseteq P$，求实数 a 的取值范围；

(2)是否存在实数 a，使得 $P=Q$？并说明理由.

21. 已知 p：$x^2+mx+1=0$ 有两个不等负根，q：$4x^2+4(m-2)x+1=0$ 无实根，若 p 或 q 为真，p 且 q 为假，求 m 的取值范围.

22. (1)试判断命题"一次函数 $f(x)=kx+b(k\neq 0)$，若 $m<n$，$f(m)>0$，$f(n)>0$，则对任意 $x\in(m,n)$ 都有 $f(x)>0$"是真命题还是假命题？并说明理由.

(2)利用(1)题的结论，试判断命题"若 a、b、c 均为实数，且 $|a|<1$，$|b|<1$，$|c|<1$，则 $ab+bc+ca>-1$"是真命题还是假命题？并说明理由.

第2讲　函　数

一、映射与函数

基础知识扫描

1. 映射：集合 A(A 中任意 x)$\xrightarrow{\text{对应法则 } f}$集合 B(B 中惟一的 y).

2. 函数：函数是非空数集到非空数集的映射.

解题方法揭秘

1. 对于映射的概念，关键抓住"取元任意性，成象惟一性"，即对于集合 A 中的任意元素 x，x 在集合 B 中对应着惟一的元素 y.

2. 对于函数的概念，应注意：①函数是非空数集到非空数集的映射，因此定义域或值域为空集的函数不存在；②由于函数是一种特殊的映射，因此解决函数的问题，仍要抓住"取元任意性，成象惟一性"；③函数的三要素：定义域、值域、对应法则，其中定义域是根本，对应法则是核心，因此判断两个函数是否为同一函数，只需看它们的定义域和对应法则是否完全相同即可，定义域和对应法则决定着值域，反过来值域不相同的两个函数一定不是同一函数.

3. 定义域的求法：(1)当函数是由解析式给出时，求函数的定义域，就是由函数的解析式中所有式子都有意义的自变量 x 组成的不等式(组)的解集；(2)当函数是由具体问题给出时，则不仅要考虑使解析式有意义，还要考虑它有实际意义，如涉及线段长、面积等则应考虑它们均为正数，再如涉及人数时，则应考虑为自然数等；(3)求函数的定义域，也可用反函数法，即反函数的值域即为函数的定义域.

4. 求函数的值域的常用方法有：观察法、不等式法、判别式法、换元法、反函数法、中间变量值域法、单调性法、最值法、图像法、均值不等式法等.

5. 函数的定义域和值域都是一个集合，其结果必须用集合表示，这是与初中学的一个不同之处，而区间则是集合的一种特殊的符号表示，因此定义域和值域可用区间来表示.

6. 由于区间是集合的一种符号表示，因此区间与区间之间可以进行集合间的交、并、补的运算，可用 $\cap$、$\cup$、$\complement_U$ 等符号连接.

经典例题剖析

例1　已知集合 $A=\{1,2,3,4\}$，$B=\{-1,-2\}$. 设映射 $f:A\to B$，如果集合中 B 的元素都是 A 中元素在 f 下的象，那么这样的映射有　　(　　)

A. 16个　　B. 14　　C. 12　　D. 8个

解　本题考查映射的概念，而本题所给的是有条件的映射，即 B 中元素都是 A 中元素的象，也就是说 B 的元素 -1 和 -2 在一个映射中必须都有原象，这是解本题的关键所在.

思路1　采用逆向思维给 B 中元素 -1 找原象最多可找3个. 先可找2个，1个剩下的就是 -2 的原象，所以有 $C_4^1+C_4^2+C_4^3=14$ 个，因此答案选 B.

高考数学解题法揭秘

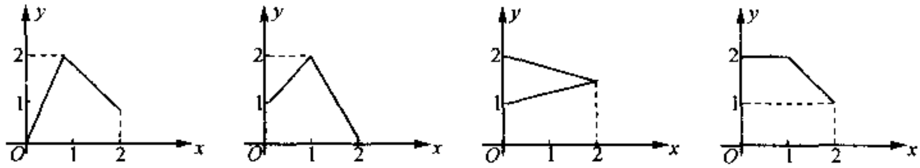
思路2　先算 $f:A\to B$ 共有多少个不同的映射，再减去不符合题意的.

A 中元素找象时只能在 -1 和 -2 中选，所以由乘法原理知共有 2^4 个，这里 A 中元素都对应 -1 和对应 -2，这两个映射不满足题意应舍去.

所以共有 $2^4-2=14$ 个，所以答案选 B.

说明　本题易选 A，原因是对“B 中元素都是 A 中元素在 f 下的象”这句话理解不够深刻，而理解为求 $A\to B$ 共有多少个不同的映射，而错选 A.

例2　设 $A=\{x|0\leqslant x\leqslant 2\}$，$B=\{y|1\leqslant y\leqslant 2\}$，下图中表示 A 到 B 的函数是　　（　　）



A　　　　B　　　　C　　　　D

解　可根据映射观点下的函数定义直接求解. 首先，在 C 图中，A 中一个元素 x（除 $x=2$）与 B 中两个元素对应，所以它不是映射，当然更不是函数；其次，A，B 两图中，A 所对应的“象”的集合均为 $\{y|0\leqslant y\leqslant 2\}$，而 $\{y|0\leqslant y\leqslant 2\}\not\subseteq B=\{y|1\leqslant y\leqslant 2\}$，故它们均不能构成所求函数. 从而答案选 D.

说明　函数首先必须是映射，是当集合 A 与 B 均为非空数集时的映射. 因此，判断一个对应是否构成函数，应判断：①集合 A 与 B 是否为非空数集；②$f:A\to B$ 能否为一个映射.

另外，在函数 $f:A\to B$ 中，象的集合 M 叫函数的值域，且 $M\subseteq B$.

变题　已知函数 $y=f(x)$，集合 $A=\{(x,y)|y=f(x)\}$，$B=\{(x,y)|x=a,y\in\mathbf{R}$，其中 a 为常数$\}$，则集合 $A\cap B$ 的元素有　　（　　）

A. 0 个　　　B. 1 个　　　C. 至多 1 个　　　D. 至少 1 个

解　设函数 $y=f(x)$ 的定义域为 D，则当 $a\in D$ 时，$A\cap B$ 中恰有 1 个元素；当 $a\notin D$ 时，$A\cap B$ 中没有元素. 故答案为 C.

例3　已知向量 $\boldsymbol{a}=(1,1)$，$\boldsymbol{b}=(1,0)$，$\boldsymbol{c}$ 满足 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{c}=0$ 且 $|\boldsymbol{a}|=|\boldsymbol{c}|$，$\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{c}>0$.

(1)求向量 $\boldsymbol{c}$；(2)若映射 $f:(x,y)\to(x_1,y_1)=x\boldsymbol{a}+y\boldsymbol{c}$，求映射 f 下 $(1,2)$ 的原象.

解　(1)设 $\boldsymbol{c}=(m,n)$，由题意得 $m+n=0$，$m^2+n^2=2$ 且 $m\cdot 1+n\cdot 0>0$，解之得 $m=1$，$n=-1$，$\therefore \boldsymbol{c}=(1,-1)$.

(2)由题意得 $x(1,1)+y(1,-1)=(1,2)$，$\therefore x+y=1$ 且 $x-y=2$，解之得 $x=\dfrac{3}{2}$，$y=-\dfrac{1}{2}$.

$\therefore (1,2)$ 的原象是 $(\dfrac{3}{2},-\dfrac{1}{2})$.

说明　由于映射在高考中考查得比较基础，仅考查对概念的理解，属“了解”层次，因此对映射要么命题时不涉及它，要么是与其他知识综合在一起命题. 最近几年来，连续多年在全国高考题中，就分别有一道映射与集合综合问题的选择题. 高考对映射的考查所涉及的题型有：映射概念的灵活运用，求象或原象的问题.

例 4　已知函数 $f(x)=\lg(ax^2+2x+1)$.

(1)若函数 $f(x)$的定义域为 $\mathbf{R}$,求实数 a 的取值范围;

(2)若函数 $f(x)$的值域为 $\mathbf{R}$,求实数 a 的取值范围.

解　(1)∵$f(x)$的定义域为 $\mathbf{R}$,即关于 x 的不等式 $ax^2+2x+1>0$ 的解集为 $\mathbf{R}$.

当 $a=0$ 时,此不等式为 $2x+1>0$,其解集不为 $\mathbf{R}$;

当 $a\neq 0$ 时,有 $\begin{cases}a>0,\\ \Delta=4-4a<0,\end{cases}$ 即 $a>1$.

∴a 的取值范围是 $a>1$.

(2)$f(x)$的值域为 $\mathbf{R}$,即 $u=ax^2+2x+1=0$ 能取遍一切正数,即 $a=0$ 或 $\begin{cases}a>0,\\ \Delta=4-4a\geqslant 0,\end{cases}$ 解之得 $0\leqslant a\leqslant 1$. 或者可以理解为 $u=ax^2+2x+1\leqslant 0$ 有解,同样有条件 $a=0$ 或 $\begin{cases}a>0\\ \Delta=4-4a\geqslant 0\end{cases}$ 成立.

∴a 的取值范围是$[0,1]$.

例 5　建造一个容积为 8m^3,深为 2m 的长方体无盖水池,如果池底和池壁的造价每平方米分别为 120 元和 80 元,那么水池的最低总造价为________元.

解　在高考中,加强数学应用意识的考查,是一个积极的导向.用贴近生活实际的应用题,考查运用所学数学知识和方法解决具体问题的能力,是加强数学能力考查的一项重要内容.为了在较为基础的层面上实施这方面的考查,设计了这道试题,题型采用填空题.

问题的实际背景是简单形体(长方体)的水池,讨论其最低造价问题.可应用函数的思想,将问题转化为函数的最小值问题.该题既考查建立函数的方法,又考查求函数最小值的方法.

思路 1　设水池一边长为 $x(\text{m})$,则相邻的另一边长为$\dfrac{8}{2x}=\dfrac{4}{x}$.

∴总造价 $y=120\times4+80\times2\times(2x+\dfrac{8}{x})=480+320(x+\dfrac{4}{x}),(x>0)$.

∴$y=480+320(x+\dfrac{4}{x})\geqslant 480+320\times2\times\sqrt{x\cdot\dfrac{4}{x}}=1760$(元).

仅当 $x=\dfrac{4}{x}\Rightarrow x=2$(∵$x>0$)时,$y=1760$ 元.

∴最低总造价为 1760 元.

思路 2　由于水池的深为定值,池底的面积也是定值,所以当池底的周长最小时总造价最低.

设池底一边的长为 $x(\text{m})$,则有周长 $l=2(x+\dfrac{4}{x}),(x>0)$.

由题意得 $2x^2-lx+8=0$,因为此方程有实数根,所以 $\Delta\geqslant 0$,

即 $l^2-64\geqslant 0$.

∴$l\geqslant 8$　(当等号成立时 $x=2$).

∴总造价最低为 $120\times4+80\times2\times8=1760$(元).

说明　思路(1)中,当 $y=480+320x+\dfrac{1280}{x}$,而后两项不提取 320 变成 $320(x+\dfrac{1}{x})$,则极易

陷入数学计算方面的误区，走弯路且效果不好.

例6 (1)设函数 $f(x)$ 的定义域为 $\mathbf{R}$，有下列三个命题：①若存在常数 M，使得对任意 $x\in\mathbf{R}$，有 $f(x)\leqslant M$，则 M 是函数 $f(x)$ 的最大值；②若存在 $x_0\in\mathbf{R}$，使得对任意 $x\in\mathbf{R}$，且 $x\neq x_0$，有 $f(x)<f(x_0)$，则 $f(x_0)$ 是函数 $f(x)$ 的最大值；③若存在 $x_0\in\mathbf{R}$，使得对任意 $x\in\mathbf{R}$，有 $f(x)\leqslant f(x_0)$，则 $f(x_0)$ 是函数 $f(x)$ 的最大值. 这些命题中，真命题的个数是 ( )

A. 0个　　B. 1个　　C. 2个　　D. 3个

(2)函数 $y=\sin x+\arcsin x$ 的值域是________.

解 (1)函数 $f(x)$ 的最大值 M 定义上隐含着两点：一是对于定义域内任意的 x，都有 $f(x)\leqslant M$ 成立，二是在定义域中存在实数 x_0，使得 $f(x_0)=M$ 成立，这两点缺一不可，因此命题①是假命题，如 $f(x)=-x^2$，则对任意的 $x\in\mathbf{R}$，都有 $f(x)=-x^2\leqslant 0<1$，而1不是 $f(x)$ 的最大值；②也是假命题，如 $f(x)=\sin x$，取 $x_0=\frac{\pi}{2}$，则 $f(x_0)=\sin\frac{\pi}{2}=1$ 是 $f(x)$ 的最大值，但 $f(\frac{5}{2}\pi)=1=f(\frac{\pi}{2})$；③是真命题，它符合上述两点. 故选 B.

(2)∵ $y=\sin x+\arcsin x$ 的定义域为 $[-1,1]$，而它在其定义域上是单调递增，

∴ $-\sin 1-\frac{\pi}{2}\leqslant y\leqslant \sin 1+\frac{\pi}{2}$，故填 $[-\sin 1-\frac{\pi}{2},\sin 1+\frac{\pi}{2}]$.

说明 (1)函数最大值的概念在新课标中已经明确地给出，也就是要满足上述“解析”中的两点. 而现在的高考试题，为了体现新课标的理念，会有些超前意识(如本例(1)就是2005年上海春季高考题)，因此，我们在复习时，必须在老师的指导下，了解新课标的有关理念.

(2)用单调性法求函数的值域(或最大值)是解决有关问题的有效方法，特别是对于有些非常规情形更是如此(如本例(2)).

二、函数的性质

基础知识扫描

1. 单调性

对于定义域内某一区间 D 内任意的 x_1、x_2，且 $x_1<x_2\Rightarrow$

$$\begin{cases} f(x_1)<f(x_2)\Leftrightarrow f(x)\text{在 } D \text{ 上单调递增} \\ f(x_1)>f(x_2)\Leftrightarrow f(x)\text{在 } D \text{ 上单调递减} \end{cases}$$

2. 奇偶性、周期性

$$\text{对于定义域内任意的 } x\Rightarrow\begin{cases} f(-x)=-f(x)\Leftrightarrow f(x)\text{为奇函数} \\ f(-x)=f(x)\Leftrightarrow f(x)\text{为偶函数} \\ f(x+T)=f(x),\ f(x)\text{为周期函数} \\ (T\text{ 为非零常数}, T\text{ 叫 } f(x)\text{的一个周期}) \end{cases}$$

解题方法揭秘

1. 函数的性质有“整体”与“局部”之分，像函数奇偶性和周期性就是函数的整体性质，它是对

于定义域内任意的实数 x 都恒成立的性质，反映在图像上是对称性(关于原点和 y 轴对称)和平移性(平移一个周期后，图像重合)；而函数的单调性则是局部性，它是在定义域内某区间上的增减性，反映在图像上是某部分图像的升降性.

2. 判断函数的单调性常用方法有：定义法、图像法、复合函数法、导数法.

3. 函数单调性的可逆性(即在定义域内，若 $f(x)$ 递增，则 $f(x_1)>f(x_2)\Rightarrow x_1>x_2$)，利用它可脱去函数的记号"$f$"，这是解决有些问题的关键.

4. 判断函数的奇偶性常用方法有：定义法、验证法(即验证 $f(-x)\pm f(x)=0$，$\dfrac{f(-x)}{f(x)}=\pm 1$ 是否成立)、图像法.

5. 奇、偶函数的一个必要条件是其定义域关于原点对称.

经典例题剖析

例7　已知定义在实数 $\mathbf{R}$ 上的函数 $y=f(x)$ 满足下列三个条件：①对任意 $x\in\mathbf{R}$，都有 $f(x+4)=f(x)$；②对于任意 $0\leqslant x_1<x_2<2$，都有 $f(x_1)<f(x_2)$；③函数 $y=f(x+2)$ 的图像关于 y 轴对称. 则下列结论中正确的是　(　　)

A. $f(4.5)<f(6.5)<f(7)$　　B. $f(4.5)<f(7)<f(6.5)$

C. $f(7)<f(4.5)<f(6.5)$　　D. $f(7)<f(6.5)<f(4.5)$

解　由①可知 $f(x)$ 的周期为4；由②可知 $f(x)$ 在区间 $[0,2]$ 上单调递增；由③可知 $f(-x+2)=f(x+2)$，即 $f(x)$ 图像关于 $x=2$ 对称；故 $f(4.5)=f(0.5)$，$f(6.5)=f(2.5)=f(2+0.5)=f(2-0.5)=f(1.5)$，$f(7)=f(3)=f(2+1)=f(2-1)=f(1)$. 由于 $f(0.5)<f(1)<f(1.5)$，所以 $f(4.5)<f(7)<f(6.5)$，选B.

说明　此题是集函数单调性、周期性、对称性于一体的综合问题，只有深刻理解各自含义，才能正确解答，对条件③的理解要小心，容易出错.

此例若数形结合将会更简捷，请读者自行完成.

例8　设 $f(x)$ 是定义在实数集 $\mathbf{R}$ 上的函数，且满足下列关系：$f(x)=f(2004-x)$，$f(2004-x)=-f(2004-x)$，则 $f(x)$　(　　)

A. 既是偶函数，又是周期函数　　B. 是偶函数，但不是周期函数

C. 既是奇函数，又是周期函数　　D. 是奇函数，但不是周期函数

解　$f(x)=f(2004-x)$ 说明 $x=1002$ 是函数的一个对称轴，$f(2004-x)=-f(2004-x)$ 说明 $f(2004,0)$ 是函数的一个对称中心. 若将 $x=0$ 代入 $f(2004-x)=-(2004+x)$ 中，得 $f(2004)=0$，结合对称性从而 $f(0)=0$，知原点也是函数的一个对称中心，故该函数为奇函数. 容易验证 $f(4008+x)=f(x)$，∴函数具有周期性. 故选C.

说明　1. 高考对函数的性质的考查重点在于它们的综合运用，其中要注意函数的奇偶性和单调性的有关结论的综合运用. 如由函数图像的对称性可知，奇函数关于原点对称的区间具有相同的单调性；偶函数关于原点对称的区间具有相反的单调性.

2. 高考数学《考试大纲》把函数的奇偶性提高到与函数的单调性同等地位，我们必须注意这一新的变化，加强对函数奇偶性的灵活运用.