哈爾濱工業大學講義

機械原理

下册

哈爾濱工業大學
機械原理教研室編譯

1955

目　錄

第三章　齒輪機構

第四章　平面機製的運動分析

第五章 飛　　輪

第六章 凸　　輪

第 七 章　轉動物體的平衡

第 八 章　萬 向 軸 節

第三章 齒輪機構

§ 1. 各種幾何軸線位置固定的齒輪機構

I) 簡單齒輪傳動 —— 由一對齒輪組合成的傳動機構爲最簡單的齒輪機構。此種最簡單的齒輪機構又可分爲外嚙合與內嚙合兩種。

A. 外嚙合

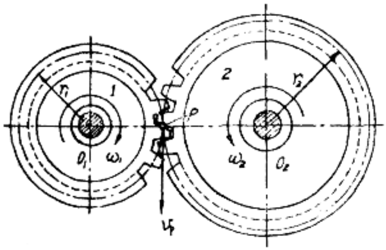

圖 III—1

如 III—1 圖，設 ω_1，ω_2 爲兩外嚙合齒輪的角速度，r_1 與 r_2 爲其節圓半徑；則兩齒輪在嚙合點 P 處的速度應相等，得出兩輪的傳動速比 i_{12} 與 r_1，r_2 及兩輪齒數的關係：

$$V_P = |\omega_1| r_1 = |\omega_2| r_2;$$

$$i_{12} = \frac{\omega_1}{\omega_2} = -\frac{r_2}{r_1} = -\frac{\dfrac{mZ_2 \operatorname{Cos} \alpha_0}{2 \operatorname{Cos} \alpha}}{\dfrac{mZ_1 \operatorname{Cos} \alpha_0}{2 \operatorname{Cos} \alpha}} = -\frac{Z_2}{Z_1}$$

B. 內嚙合

如 III—2 圖，設 ω_1，ω_2 爲兩內嚙合齒輪的角速度，r_1 與 r_2 爲其節圓半徑；則與外嚙合同理，得

$$V_P = |\omega_1| r_1 = |\omega_2| r_2;$$

$$i_{12} = \frac{\omega_1}{\omega_2} = \frac{r_2}{r_1} = \frac{Z_2}{Z_1}。$$

現可將上列兩公式合併成為一個簡單齒輪傳動的一般公式:

$$i_{12}=\frac{\omega_1}{\omega_2}=\pm\frac{r_2}{r_1}=\pm\frac{Z_2}{Z_1}。$$

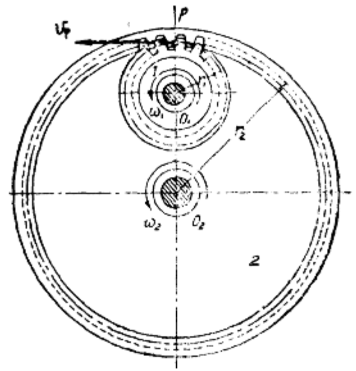

圖 III—2

外嚙合時兩齒輪轉動方向相反，取「—」號；內嚙合時兩齒輪轉動方向相同，取「+」號。

此種簡單齒輪傳動機構的構造雖然最為簡單，但是在實際的各種機器中，例如，在各種金屬切削機床的傳動系統中，很少是僅僅用一對齒輪來傳達運動的。由於在一般大多數的機器中，常常需要在主動軸與被動軸之間得到較大的傳動速比，或者主動軸由被動軸間的距離較遠，則在這兩種情況中，用一對齒輪來傳動都不方便。因為

A. 若中心距離一定而要得到大的傳動速比，則在僅僅應用一對齒輪時，必然大的齒輪太大而小的齒輪太小，以致難於製造。不但如此，這一對齒輪由於摩損相差太遠而使二者的使用時間相差懸殊。

B. 若兩軸中心相距甚遠，則用一對齒輪來傳動時，齒輪的尺寸必然太大，既耗費甚多材料，而傳動機構所佔的空間也太大。

為了解決這兩個問題，通常採用幾個互相嚙合的一系列的齒輪來得到大的傳動速比，並來傳達相距較遠兩軸間的運動，這種互相嚙合的一系列的齒輪就叫做輪系（Серия зубчатых колес）。而這種傳動就稱為多級齒輪傳動。

II） 多級齒輪傳動——如 III—3 圖，設 i_{12}，$i_{2'3}$，$i_{3'4}$……爲 1 輪與 2 輪，2′ 輪與 3 輪，3′ 輪與 4 輪……之間的傳動速比，則每一對相嚙合的齒輪，完全與一簡單齒輪傳動機構相同。圖中共有四對外嚙合的齒輪與一對內嚙合的齒輪。如是則

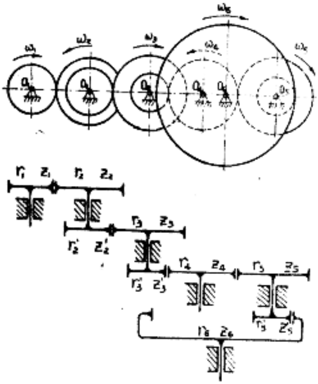

圖 III—3

$$i_{12}=\frac{\omega_1}{\omega_2}=-\frac{r_2}{r_1}=-\frac{Z_2}{Z_1};$$

$$i_{2'3}=\frac{\omega_2}{\omega_3}=-\frac{r_3}{r'_2}=-\frac{Z_3}{Z'_2};$$

$$i_{3'4}=\frac{\omega_3}{\omega_4}=-\frac{r_4}{r'_3}=-\frac{Z_4}{Z'_3};$$

$$i_{45}=\frac{\omega_4}{\omega_5}=-\frac{r_5}{r_4}=-\frac{Z_5}{Z_4};$$

$$i_{5'6}=\frac{\omega_5}{\omega_6}=\frac{r_6}{r'_5}=\frac{Z_6}{Z'_5}。$$

如將此數等式的左端與右端各連乘起來，則得

$$i_{12}\cdot i_{2'3}\cdot i_{3'4}\cdot i_{45}\cdot i_{5'6}=\frac{\omega_1}{\omega_6}=\frac{r_2\cdot r_3\cdot r_5\cdot r_6}{r_1\cdot r_2'\cdot r_3'\cdot r_5'}=\frac{Z_2\cdot Z_3\cdot Z_5\cdot Z_6}{Z_1\cdot Z_2'\cdot Z_3'\cdot Z_5'}$$

而 $i_{16}=\dfrac{\omega_1}{\omega_6}$

故 $i_{16}=i_{12}\cdot i_{2'3}\cdot i_{3'4}\cdot i_{45}\cdot i_{5'6}=(-1)^m\dfrac{\text{諸被動輪齒數的連乘積}}{\text{諸原動輪齒數的連乘積}}$

根據此理不難寫出像這樣的輪系由第一輪到第 n 輪間的傳動速比 i_{1n} 的公式

$$i_{1n} = i_{12} \cdot i_{2'3} \cdot i_{3'4} \cdots\cdots i_{(n-1)'n} = (-1)^m \frac{Z_2 \cdot Z_3 \cdot Z_4 \cdots\cdots Z_n}{Z_1 \cdot Z_2' \cdot Z_3' \cdots Z_{(n-1)}'}$$

式中的指數 m 即輪系中外嚙合齒輪的對數。其物理意義即：在傳動的過程中，凡是遇到一對外嚙合齒輪，轉動即反向一次；則在整個輪系中既然有 m 對外嚙合齒輪，故總共必反向 m 次。如由此式最後得到的傳動速比爲正值，即最後的被動輪與最先的原動輪轉動的方向相同；如爲負值，則轉動方向相反。

上式也可歸納成如下的結論：整個輪系的傳動速比等於此輪系中各對齒輪傳動速比的連乘積，也等於 -1 的 m 次方乘諸被動齒輪齒數連乘積與諸原動齒輪齒數連乘積之比。

由式中可看出 4 輪在輪系中僅能改變轉動的方向，而與傳動速比無關，像這樣的齒輪特稱爲介輪（又稱中輪或惰輪 Промежуточное колесо)。

§ 2. 行星齒輪機構（周轉齒輪機構）的定義及用途

I) 定義 ——在齒輪機構中，若有某些齒輪的幾何軸線，繞另一位置固定的幾何軸線迴轉，則這齒輪機構就稱爲行星齒輪機構或周轉齒輪

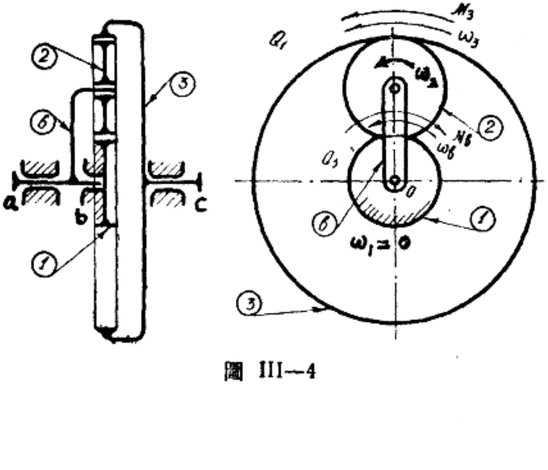

圖 III—4

機構。因爲此機構中的一齒輪或數齒輪是作複合的轉動，好像行星一樣，一方面繞自身的軸線自轉，另一方面又繞另一恒星（中心輪）公轉，而這種作着複合轉動，如像行星一般的齒輪就稱爲行星齒輪（Планет）或稱爲附屬輪（Сателит）。帶着行星輪運轉，連繫行星輪幾何軸線與中心輪幾何軸線的中間機件稱爲導桿或轉臂（Водило）。幾何軸線位置固定，與行星輪相嚙合，行星輪即繞之而轉動的齒輪稱爲中心輪（Центральное колесо），又稱爲太陽輪（Солнечное колесо）。固定不轉，角速度等於零的中心輪稱爲支持輪（Опорное колесо）。在圖III—4 中，① 及 ③ 爲中心輪，② 爲行星輪，（в）爲轉臂。

最簡單的行星齒輪機構的組成，包含有三個同心軸，如在 III—4圖中的 a，b，c 三同心軸。

倘若如圖 III—5 所示 a，b，c 三軸可同時轉動，則此機構稱爲差動齒輪機構。此時機構中有兩個軸可以自由轉動，而彼此不相關聯；也就是此機構具有兩個自由度。像這樣的差動齒輪機構常用以分解或合成轉動。

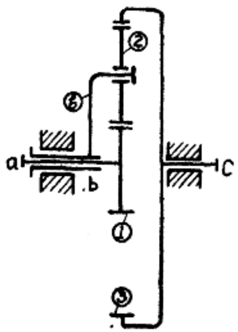

圖 III—5

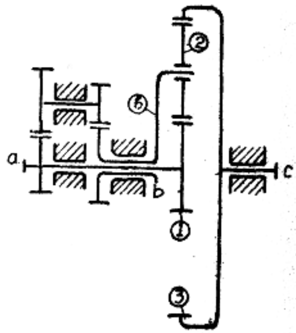

圖 III—6

如果將上述差動齒輪機構中的一個中心輪固定，例如固定 III—5圖中的 b 軸或 c 軸，則得到具有一個自由度的機構，也就是前面講過的

最簡單的行星齒輪機構。

若在差動齒輪機構中，用某種簡單傳動裝置連接其兩軸，使兩軸的轉動彼此相關聯起來，則兩軸的角速度既然有了一定的比例關係，就減少了一個自由度，祇剩下一個自由度，而得到如圖 III—6 所示的封閉式行星齒輪機構。

行星齒輪機構可以用正齒輪、斜齒輪，螺旋齒輪、圓錐齒輪、蝸輪以及摩擦來組合成。

II) 用途——行星齒輪機構一般有下列五種特殊用途:

A. 當需要合成兩個以上的轉動爲一個轉動時，如 III—7 圖所示的機床，自動電銲機等機器中所常用的差動齒輪機構；或需要分解一個轉

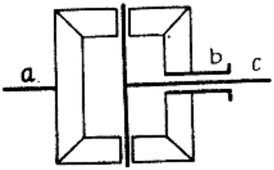

圖 III—7

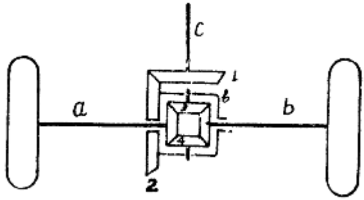

圖 III—8

動成爲兩個以上的轉動——如 III—8 圖 所示的汽車後軸所用的差動齒輪機構。

在 III—7 圖中，若 a，b 兩軸的轉動速度已知，則可按一定的公式計算出此兩角速度所綜合成的 c 軸的轉動速度。

在 III—8 圖中，汽車發動機帶動的 c 軸，由其上的 1 輪傳達轉動給 2 輪，若汽車是在平直的道路上沿直線前進，則左右兩輪所受阻力相等，使 3、4 兩輪不繞其自身的軸線轉動，而與固定在 2 輪上的軸架 b 一同隨 2 輪轉動。此時 3、4 兩輪的作用與軸上的鍵一般，帶着 a，b 兩軸隨 2 輪作相同的轉動。但當車在轉彎時，由於靠彎道內面車輪所受阻力大於靠彎道外面車輪所受阻力，因此 3、4 兩輪即由於其兩嚙合點受力之差，而繞其本身軸線轉動；此時 a，b 兩軸的轉動即與 2 輪不

同，靠彎道外面的車輪轉動較快，靠彎道內面的車輪轉動較慢，而 2 輪仍由1輪傳給以一定的轉動。故此轉動，這時即被此差動機構分解爲a，b 兩軸的兩個不同的轉動。

Б. 當需要小巧玲瓏佔空間很小而又輕便的傳動機構的時候—如 III—9 圖所示，安裝在塔輪內面的變速機構，可用在一種鑽床上面。另外，如在機床在坦克車內必須要有佔空間甚小的傳動機構時，一般採用行星齒輪機構。

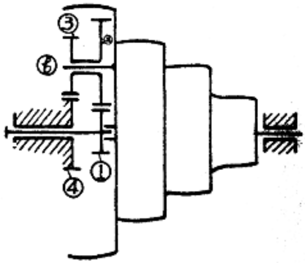

圖 III—9

В. 當希望用個數與齒數均甚少的齒輪得到很大的傳動速比而機構的傳動效率可以不考慮的時候。例如，在某些現代的儀器機構中，其所用行星齒輪機構的傳動速比有達到 1：200.000 的。如 III—10 圖所示爲儆量角移測定器，可在其精密刻度處憑一般視力輕易地讀出 a 軸 $\frac{1}{100}$ 度或 $\frac{1}{10000}$ 度的迴轉量。

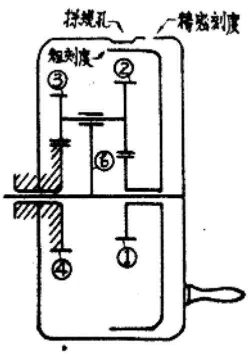

圖 III—10

Г. 當必須用更便於操縱的裝置來代替摩擦接合器的時候——一般用摩擦接合器傳動的機器，必須把摩擦接合器分開，才能使在運轉中的工作部分停止運轉；至需要運轉時，又必須把摩擦接合器合上，還要加以

相當大的接合壓力才能使運轉部分開始運轉作工。如此，摩擦接合器既相當笨重，在其繼續運轉中，又必須加以相當大的壓力，故構造必定相當複雜，操縱亦不輕便。不如 III—11 圖所示履帶式拖拉機及坦克車中所用轉向機構爲方便。如圖，T_1 與 T_2 兩製動器是用槓桿關聯在一起。當刹住 T_2 同時放鬆 T_1 時，則履帶輪停止轉動而 3 輪作空轉；當放鬆 T_2 而同時刹緊 T_1 時，則 3 輪固定不動變成支持輪而履帶輪以一定的轉速轉動。在左右履帶的原動輪上各安裝一具這樣的行星齒輪機構，則可用刹緊左面的 T_2 或右面的 T_2 的方法，使車身向左轉或向右轉。

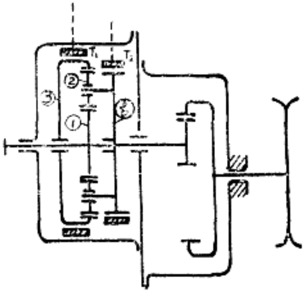

圖 III—11

Д. 當多級變速箱中特別需要便於操縱的裝置時——如圖 III—12 所示，爲一種用來與液體傳動聯軸器聯合使用的齒輪變速機構，T_1 與 T_2 爲兩製動器，若把 T_1 刹緊而放鬆 T_2，則機構成爲行星齒輪機構的傳動，轉動即按此行星齒輪機構的傳動速比而傳到被動軸上。反之，若刹緊 T_2 而放鬆 T_1，則成爲一普通軸線固定的齒輪機構，而轉動按此一普通齒輪機構的傳動速比傳到被動軸上。倘若將幾個這樣的機構串接起來，則得到用製動器控制的多級變速機構。

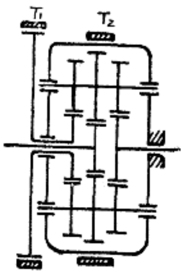

圖 III—12

III) 傳動速比—— 因在行星齒輪機構中有繞某一固定點作廻轉運動的幾何軸線，故傳動速比的求法，不像幾何軸線位置固定的齒輪機構那樣簡單容易；一般都不可能直接看出其傳

動速比與各輪齒數的關係，分析計算方法較爲複雜。今特於下一段加以詳細的討論。

§ 3. 用相對速度法求行星齒輪機構的傳動比

因在行星齒輪機構中，有繞某一定點而作迴轉運動的幾何軸線與繞此軸線而迴轉的行星輪，故無法直接由各輪的齒數得出傳動速比，祗有普通幾何軸線固定的齒輪機構才可能直接得出各輪齒數與傳動速比的關係式。如何才能把行星齒輪機構當成普通幾何軸線固定的齒輪機構來分析處理呢？我們假想給全機構的每一機件加上一個與轉臂的角速度ω_B大小相等方向相反的角速度，也就是給每一機件加上一個 $-\omega_B$ 的角速度，則轉臂在此假想情況中變爲靜止，而機構所有的幾何軸線都變成固定不動，且在給每一機件加上一個 $-\omega_B$ 的假想情況中，各機件間的相對運動仍然與未加 $-\omega_B$ 以前一樣。此時所有幾何軸線既已變成固定不動，則可由幾何軸線固定不動的普通齒輪機構求速比的方法來求得各輪齒數與各機件絕對角速度的關係。在此假想情況中的機構特稱爲轉換機構（Приведенный механизм）。用此轉換機構的想像爲過渡方法，就可將各輪的齒數與其絕對角速度聯繫上一定的關係，然後再解表示此關係的方程式即可求出行星機構的傳動速比與各輪齒數的關係。爲了使讀者對轉換機構的概念更加明確而具體，現將轉換機構概念的要點總結爲下列幾條：

在轉換機構中，

a. 各機件間的相對運動未變；

б. 轉臂靜止不動；

в. 行星輪的複雜運動變爲繞固定軸的轉動；

г. 支持輪以 $-\omega_B$ 爲角速度而轉動；

д. 行星齒輪機構變爲幾何軸線固定的普通齒輪機構；

e. 轉換機構的傳動速比可根據各齒輪的齒數求出。

如 III—4 圖所示，設已知各輪的齒數爲 Z_1，Z_2，Z_3，求輪 3 與轉

臂的傳動比　$i_{3B}=\dfrac{\omega_3}{\omega_B}$。

設 ω_1，ω_2，ω_3 爲各齒輪的絕對角速度，ω_B 爲轉臂的絕對角速度，並 $\omega_1=0$。則在轉換機構中

$\omega_1-\omega_B$………1 輪的角速度；

$\omega_2-\omega_B$………2 輪的角速度；

$\omega_3-\omega_B$………3 輪的角速度。

按照一對相嚙合的齒輪，其角速度與齒數成反比的道理，得

$$\frac{\omega_2-\omega_B}{\omega_1-\omega_B}=-\frac{Z_1}{Z_2}\quad\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\quad(1)$$

$$\frac{\omega_3-\omega_B}{\omega_2-\omega_B}=\frac{Z_2}{Z_6}\quad\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\quad(2)$$

(1) × (2) 得

$$\frac{\omega_3-\omega_B}{\omega_1-\omega_B}=-\frac{Z_1}{Z_3};\qquad 而\ \omega_1=0$$

故

$$\frac{\omega_3-\omega_B}{-\omega_B}=-\frac{Z_1}{Z_3},$$

即

$$\frac{\omega_3}{\omega_B}=1+\frac{Z_1}{Z_3}。$$

應用此法求傳動比時必須注意：

a．注意轉換機構中各齒輪間傳動速比的符號，轉動方向相同的爲正，相反的爲負。

б．支持輪的角速度最好放在分母處以簡化演算過程。

в．因在此法的各式中都是把轉動向量的合成當作代數量來處理，祇是用加或減來求其代數和例如 $\omega_2-\omega_B$；而不是當成幾何量來處理。故若行星輪與轉臂兩者的幾何軸線不相平行，例如圓錐齒輪行星機構，則不能在各式中引入行星輪的角速度；必須行星輪與轉臂兩者的幾何軸線相平行的迴轉機件才能用加減號把其角速度聯繫起來放在某一算式中。

r.　由幾何軸線固定不動的普通齒輪機構求傳動速比的公式，可以看出在表示齒輪機構傳動速比的公式中，相嚙合齒輪的齒數，以及固定於同一軸上各齒輪的齒數不應同時出現在分子或分母中。

§ 4. 用力矩法求行星齒輪機構的傳動比

任何機構或機器其本身均不會作工作，必須由外界對機械作一定的工作或由外界輸入一定的能量，機械方能作出一定的工作。同樣，在正常工作狀況中，以平穩速度運轉的機械，若摩擦的損失甚小，可以忽略不計，而機械的效率等於 1，則機械不會消滅工作，也不會使工作損失而減少。旣然理想的機械其本身不會產生工作也不會消滅工作，則在某一時間內對機械輸入的工作就必然等於機械在同一時間內所輸出的工作。對於具體的行星齒輪機構來說，也是就在主動軸方面單位時間內所輸入的工作應等於在被動軸方面單位時內所輸出的工作，即是主動軸之功率與被動軸之功率相等。並且，對於一個機械來說，假如以輸入之功爲正，則輸出之功爲負。設原動軸之功率爲 N_I，被動軸之功率爲 N_{II}，則上述的關係可寫成：　$N_I + N_{II} = 0$

或　$N_I = -N_{II}$。

此即理論力學中的黃金法則 (Золотое правило).

設 ω_I………原動軸的角速度；

ω_{II} ……被動軸的角速度；

M_I ……原動軸上所受的力矩；

M_{II} ……被動軸上所受的力矩。

則　$N_I = \omega_I M_I$；

$N_{II} = \omega_{II} M_{II}$。

代入前式，即得　$\omega_I M_I = -\omega_{II} M_{II}$，

由此得

$$i_{I\,II} = \frac{\omega_I}{\omega_{II}} = -\frac{M_{II}}{M_I}。$$

由此可知，祇要求得作用在原動軸上的力矩 M_I 與被動軸上的力矩 M_{II}，便可得到二軸間的傳動速比。

爲了求得 M_{II} 與 M_I 的關係，便必須在圖上分析出各齒輪所受的圓週力和各軸上所受的力矩。

分析的方法是利用作用力與反作用力的關係，並且應用在機構作平穩運轉等速傳動時作用在各機件上的諸力必成平衡與作用在各機件上的諸力矩必成平衡的原理，把齒輪看成槓桿來處理。下面就以 III—4 圖所示的簡單行星齒輪機構作爲例子來加以分析計算。

以 Q 表示各機件間的作用力或反作用力（圖 III—13），r_1，r_2，r_3 爲各輪的節圓半徑。並設：

M_1——1 輪軸上所受的力矩；

M_B——轉臂上所受的力矩（即 M_I）；

M_3——3 輪軸上所受的力矩（即 M_{II}）。

力矩的符號，設反時針方向爲正，順時針方向爲負。符號應看力矩的方向，大小應等於圓週力與半徑的乘積。

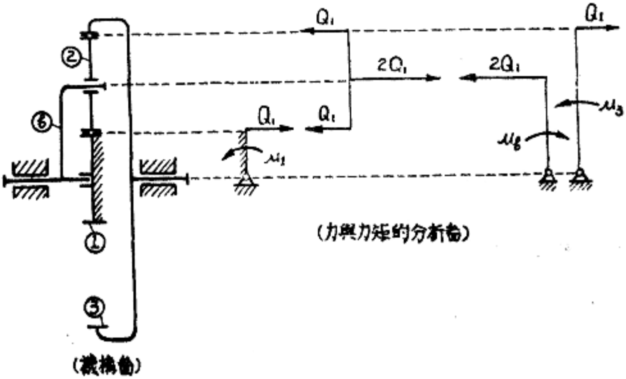

圖 III—13

求輪 3 與轉臂的傳動比 $i_{\text{II I}}=\frac{\omega_3}{\omega_B}$。

如圖

$$M_I=M_B=2Q_1(r_1+r_2)=-Q_1(r_1+r_1+2r_2),$$

因

$$r_1+2r_2=r_3,$$

故

$$M_I=-Q_1(r_1+r_3)。$$

$$M_{II}=M_3=Q_1r_3。$$

即傳動比爲

$$i_{\text{II I}}=\frac{\omega_3}{\omega_B}=-\frac{M_B}{M_3}=-\frac{-Q_1(r_1+r_3)}{Q_1r_3},$$

$$i_{\text{II I}}=\frac{r_1+r_3}{r_3}=1+\frac{r_1}{r_3}=1+\frac{Z_1}{Z_3}。$$

在應用力矩法傳動速比時，對於力矩的方向，也就是力矩方程式中的符號，有時不仔細，就容易弄錯。所以我們應該設法加以驗算。驗算是根據一個機械在作穩定的等速傳動時，作用於任一中心軸線上的力矩總和必等於零， 也就是根據作用在機構上諸力矩的總和應等於零的原理，因爲假如不等於零則必有一合力矩，此一合力矩，則必然會產生角加速度而不能維持等速的傳動，根據此理來檢驗所寫出的作用於機構的諸力矩之和是否等於零。對於行星齒輪機構來說，即是原動軸所受的力矩加被動軸所受的力矩加所有支持輪所受的力矩再加上不在主軸線上的，幾何軸線位置固定的齒輪，其中心軸線所受的支持力對於主軸所產生的力矩的總和應等於零。如用公式表示，即

$$M_I+M_{II}+M_{\text{支持}}=0。$$

在圖 III—13 的例中，即爲

$$M_B+M_3+M_1=0。$$

代入力矩的數值

$$\begin{aligned}&-2Q_1(r_1+r_2)+Q_1r_3+Q_1r_1\\&=-Q_1(r_1+r_3)+Q_1r_3+Q_1r_1\\&=-Q_1r_1-Q_1r_3+Q_1r_3+Q_1r_1\\&=0。\end{aligned}$$