新课标·助教助学系列
SHUXUE BIANSHI BAILI JINGJIANG

数学变式百例精讲

王伟 著

- 在无穷的变化中领略数学的魅力
- 在曼妙的演变中体会数学的快乐

宁波出版社
Ningbo Publishing House

新课标·助教助学系列

SHUXUE BIANSHI BAILI JINGJIANG

数学变式百例精讲

王伟 著

宁波出版社

Ningbo Publishing House

图书在版编目(CIP)数据

数学变式百例精讲/王伟著.一宁波:宁波出版社,2006.6

ISBN 7-80602-970-2

Ⅰ.数… Ⅱ.王… Ⅲ.数学课-初中-解题

Ⅳ.G634.605

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2006)第 020806 号

书　　名	数学变式百例精讲
作　　者	王伟
责任编辑	陈静　高丽
出版发行	宁波出版社(宁波市苍水街 79 号　邮编:315000)
电　　话	0574-87286804(发行部)　0574-87341015(编辑部)
印　　刷	杭州钱江彩色印务有限公司
开　　本	787 毫米×1092 毫米　1/16
印　　张	14.75
字　　数	300 千
版　　次	2006 年 6 月第 1 版　2006 年 6 月第 1 次印刷
标准书号	7-80602-970-2/G·466
定　　价	18.00 元

前　言

初中数学新课程标准的首要目标是培养学生正确迅速的运算能力、逻辑思维能力、空间想象能力、分析问题和解决问题的能力，培养学生积极向上、勇于探究的数学情感．要达到这个要求，必须演算一定数量的练习题．于是，不少教师和学生往往沉浸于不断"找题——解题——讲题"的题海战术，而忽略了有目的的总结、归纳、提炼、深化，抓不住基本解题规律，拓不宽解题思路，培养不出解题兴趣．这样尽管用了不少的时间与精力，师生都感到苦不堪言、收效甚微．

诺贝尔奖获得者李政道说过：学习，就是学习问题，学习怎样问问题．长期的教学实践与思考使自己体会到：教材中的习题都具有典型性和深刻性，要充分利用课本例题、中考题、竞赛题，揭示其深刻性，领悟其奥妙性，并对其进行适当的剖析、深入研究、充分演变，以旧问题的解决来激活新问题的诞生，使教师和学生通过问题的表象看到问题的本质，并作进一步的思考，达到举一反三、触类旁通的效果．这样不仅可减轻铺天盖地的作业负担，达到"以少胜多"的教学目的和学习目的，更重要的是可以激发学生强烈的求知欲和学习积极性，进一步培养学生思维的灵活性、深刻性和创造性．

会解题的不一定会编题，会编题的一定会解题．因为编题的过程不仅是一个解题的过程，更主要的是把问题引向深入的研究过程，是从一个简单的问题出发，逐步演绎深化的过程，是探究创新的过程．一般来说，数学问题的演变需要深厚的数学功底、良好的思维素质和熟练的编题技巧．本书介绍的就是数学问题如何演变和深入的基本途径和技术手段，希望能对学生在夯实基础，开阔视野，启迪思维，掌握数学问题演变的基本思路和方法方面有所帮助．

在本书的编写过程中，尽管自己集十余年的精力和心血，尽了最大努力，但因水平有限，其中定存种种不尽如人意之处，热忱欢迎广大读者提出批评和建议．

本书可供广大初中数学教师和教研员参考使用，也可供处于中考冲刺阶段的学生练习使用。

目　录

第一章　数学问题变式与解题 …………………………………… (1)

第二章　培养数学变式能力的方法 ……………………………… (4)

第三章　图形内部结构的变式探究 ……………………………… (12)

第四章　几何图形形状的变式探究 ……………………………… (38)

第五章　对原题型的条件或结论的变式探究 …………………… (67)

第六章　原题数量关系的变式探究 ……………………………… (94)

第七章　因某一知识迁移的变式探究 …………………………… (115)

第八章　增加试题层次的变式探究 ……………………………… (163)

第九章　转化设问方向的变式探究 ……………………………… (190)

第十章　纵横交错、信息互换的变式探究 ……………………… (206)

第一章　数学问题变式与解题

一、研究数学问题变式的意义

随着新一轮课程改革的启动、新《数学课程标准》的颁布，新的教育理念也必将贯穿于教学实践，其中数学探究活动已成为贯穿整个初中数学课程始终的重要内容.数学探究活动能促进学生将原有知识和新知识有效地组合和沟通，使学生获得深切的感受与体验.数学变式的研究能帮助学生养成良好的质疑、多思的学习习惯，提高类比推理的思维能力，点燃创新思维的火花.而利用“变式教学”和“变式训练”，通过对数学问题多角度、多方位、多层次的讨论和思考，能帮助学生打通关节，构建有价值的变式探索研究，展示数学知识发生、发展和应用的过程，有意识、有目的地引导学生从“变”的现象中发现“不变”的本质，从“不变”的本质中探究“变”的规律，使所有知识点融会贯通，使思维在所学知识中游刃有余、顺畅飞翔.

用继承和发展的观点进行反思，我们传统的教学确实存在着缺乏培养创新精神和探究能力的现象.现在，我国在校学生中不乏解题高手，我国选手历年参加国际奥林匹克数学竞赛，都取得了优异成绩，但在创造性地提出新问题、建立新理论方面落后于国际平均水平. 美籍华裔学者蔡金法先生曾对中美学生的数学能力做过一次调查.在第九届世界数学大会上，他介绍了自己的调研结果：中国学生在计算能力和解决简单问题的能力方面，比美国学生好；在解决比较复杂、过程或结论具有开放性的数学问题和创造性地提出问题方面，美国学生的平均成绩比中国学生好.在实际课堂教学中也是如此，在课上、课下敢于提出和能够提出较新的、有一定深度和广度的数学问题的中国学生寥寥无几. 所以我国传统的教学方式较难培养学生潜在的创新意识与创新能力，学生大多只停留在解决、理解前人留下的东西，解决前人留下的疑问，即为解题，从未想过“越雷池一步”，缺乏因旧问题的解决而激发新问题产生的能力，即问题的演变.其实，一种新的教学理论，只靠严谨的逻辑演绎是无法推导的，必须加上生动的思维再创造.数学理论发展的历史证明，人们的直觉和“灵光一闪”的顿悟，往往已经得出了整个新理论的百分之七十，剩下的百分之三十则是逻辑与验证。数学史上冠以某数学家名字的猜想、定理、法则，往往并无逻辑证明，逻辑推演与论证是今人补做的，但人们仍把功劳归于提出新问题的首创者，英国富豪出百万美元悬赏“哥德巴赫猜想”的验证，仅仅是在已构造的理论大厦上添砖加瓦.

随着新课程标准的实施，培养创造性思维和探究能力的教育理念也必将在教学

评价中表现出来.近几年来,全国数学竞赛卷和各地的中考卷都在不断地变化和发展,但无论怎样改革,都离不开历史的继承,数学基础知识、基本技能、思想方法总是不变的,即“万变不离其宗”,只是在题目的立意、创设的情景、设问的角度中力求新颖和鲜活的演变.

二、数学问题演变的价值认识

1.优化学生的思维素质

变式训练是指变换问题的条件或结论,从而更深刻地揭示问题本质的训练.这样的训练使学生不只看到事物的表象,而能自觉地探索事物的本质,学会比较全面地看待问题,学会从事物之间的联系上来理解事物本质,能在一定程度上克服和减少由于绝对化思维而出现的思维僵化、思维惰性,使思维向多方面发展,培养思维的发散性.

思维的广阔性是发散性思维的又一特征.思维的狭窄性表现在只知其一,不知其二.反复进行问题演变的训练,是帮助学生克服思维狭窄的有效办法.教师在教学过程中,不能只重视计算结果,要针对教学的重点和难点,精心设计有层次、有梯度、要求明确、题型多变的练习题;通过训练学生不断探索解题的捷径,使思维的广阔性得到发展;通过多次渐进式的拓展训练,学生就能进入思维广阔的佳境.现行新课标指导下的各地新教材都设有“想一想”栏目,这就是把教材中的例题进行演变的内容,目的就是培养学生思维的广阔性.

数学中有许多概念、法则、公式、定理和方法,因内容相近致使学生在学习中发生混淆.演变、辨析、对比,就是对某一问题给出有正有误的答案,让学生辨别哪个正确,哪个错误,并说出根据,这样的“变式数学”能促进学生把握问题的实质,使学生客观地评价事物,提高辨别是非的能力,培养思维的批判性.

衡量学生思维水平的重要标准是思维的创造性,即善于探索、突破、创新,能够发现和解决自己或别人未曾发现或未解决的问题,要培养这种可贵的品质,学生必须有可供发现的有价值的材料,但教材在这方面往往不可避免地存在着欠缺,因为在阐述数学原理和规律时,一般都把数学家们当初的真实发现过程给抽掉了,这就需要教师来弥补这个不足.为此,我们可以利用研究对象的变式,设计出隐藏着规律的材料,去引导学生发现,让学生利用自己已有的知识去探索、猜想,进而培养学生思维的创造性.

2.掌握贯通数学思想

学生数学问题的演变训练不是天马行空、突如其来的,它需要有丰富的基础知识和基本技能,以扎实的数学功底和灵活的数学思想为支撑.在对数学问题的适当剖析、深入研究、充分演变中,学生势必要运用和复习更多的基础知识,从而加深对数学概念、定理、公式的理解,还经常要用到代数法、三角法与解析法,这样就沟通了中

学数学各科知识点之间的联系，掌握各种基本思想方法，使所学的数学知识融会贯通.另外，在变式训练中，还会用到特殊与一般，局部与整体，顺推与逆推，正面与反面，熟悉化、简单化与具体化等数学思想.所以，随着变式训练的不断深入，学生对数学思想的认识也更加深刻，运用起来也更得心应手.

3.培养学习兴趣，提高教学效益

目前，我们的数学课堂还存在这样一些问题：老师讲解多，学生思考少；一问一答多，研讨交流少；操练记忆多，鼓励创新少；强求一致多，发展个性少；照本宣科多，智力活动少；显性内容多，隐性内容少；应付任务多，精神乐趣少等等.其实，课堂教学效果很大程度上取决于学生的参与度，这就首先要求学生要有参与意识，加强学生在课堂教学中的参与性，使学生真正成为课堂教学的主体，是现代数学教学的趋势.“变式教学”是通过对教学中的定理和命题进行不同角度、不同层次、不同情形、不同背景的变式，暴露问题的本质，揭示不同知识点的内在联系的一种教学设计方法.通过“变式教学”，使一题多用、多题重组的教学设计能增加学生的新奇感和参与感，教学、学习中的兴奋点不断闪现，从而激发学生的好奇心、求知欲和创造力，提高学生参与教学活动的兴趣和热情，取得较好的教学效益.

第二章 培养数学变式能力的方法

著名数学教育家波利亚曾形象地指出:“好问题同种蘑菇类似,它们都成堆地生长,找到一个以后,你应当在周围找一找,很可能附近就有好几个.”教师教育学生的目的是培养学生解决问题的能力、学习新事物的能力,提出更一般的、更广阔的、更深刻的新问题和建立新理论的能力.那么如何培养学生针对旧问题提出新问题(问题演变)的能力呢? 也就是说,如何培养学生数学变式的能力呢?

一、重视基础,沟通联系

数学基础知识、基本概念(定义、定理、性质、公式、法则)是解决数学问题,并产生新问题的起点.一般情况下,要从知识发生的过程设计问题,突出概念的形成过程;从学生认知的最近发展区来设计问题,不是将公式简单地告诉学生;通过设计开放性的问题,让学生通过类比、归纳、猜想得出结论,再对所得结论进行论证.

例 1 求证:顺次连结平行四边形各边中点所得的四边形是平行四边形.

变式 1 求证:顺次连结矩形各边中点所得的四边形是菱形.

变式 2 求证:顺次连结菱形各边中点所得的四边形是矩形.

变式 3 求证:顺次连结正方形各边中点所得的四边形是正方形.

变式 4 顺次连结什么四边形中点可以得到平行四边形?

变式 5 顺次连结什么四边形中点可以得到矩形?

变式 6 顺次连结什么四边形中点可以得到菱形?

……

通过这样一系列变式训练,使学生充分掌握了四边形这一章节所有基础知识和基本概念,强化沟通了常见特殊四边形的性质定理、判定定理、三角形中位线定理等,极大地拓展了学生的解题思路,活跃了思维,激发了兴趣.

例 2 圆台侧面积公式为 $S=\pi(R+r)l$.当 $r=0$ 时,即圆台体变形为圆锥体,圆锥体侧面积公式为 $S=\pi Rl$; 当 $R=r$ 时, 圆台体变形为圆柱体, 圆柱体侧面积公式为 $S=2\pi Rl$.这样,我们用整体的观点,站在更高的层次上,分析与研究知识点之间的纵横关系、因果关系、演变关系,沟通不同知识间的内在联系,以知识为经、方法为纬,编织一个“知识网”,为进行数学问题演变奠定了坚实的知识基础.

二、创新思维，发展能力

丰富而扎实的基础知识是形成创新意识的前提，有“知”未必有“能”，无“知”必定无“能”，要想知识和能力同步协调发展，教师在教学中既要使学生掌握知识，更要使学生把握知识产生的“过程”，从中吸取丰富的智力营养，尽量让学生体会到蕴藏在数学问题中的“生命”价值.具体地说，在数学活动中，它是一种不依常规，寻求变异，从多角度、多层次、全方位地去思考问题、寻求答案的优良思维品质，其基本特征是：流畅性（能在短时间内表达较多的概念，反应迅速）、变通性（思维方向灵活多样，举一反三，触类旁通，能提出超常的构想或新观点）、独创性（对事物的处理或判断表现出独特的见解，推陈出新）.

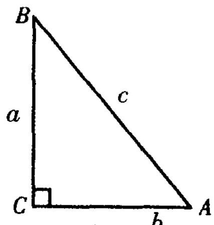


图 2-1

例 3 如图 2-1，在 Rt△ABC 中，当∠C=90°时，则 $c^2=a^2+b^2$.（勾股定理）

变式探究

变式 1 当∠C 不是 90°时，$c^2=a^2+b^2$ 仍成立吗？如不能成立，a、b、c 三边又成何关系呢？

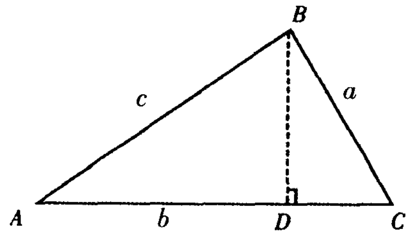


图 2-2

解：如图 2-2，设△ABC 中，$AB=c$，$BC=a$，$AC=b$. 过点 B 作 AC 的垂线 BD，垂足为 D.则 $BD=a\sin C$，$DC=a\cos C$，$AD=b-a\cos C$，根据勾股定理可得：

$$\begin{aligned} c^2&=(a\sin C)^2+(b-a\cos C)^2\\ &=a^2\sin^2C+b^2-2ab\cos C+a^2\cos^2C\\ &=a^2(\sin^2C+\cos^2C)+b^2-2ab\cos C\\ &=a^2+b^2-2ab\cos C \end{aligned}$$

这即是解斜三角形所需用的余弦定理.从而，我们可以发现，勾股定理亦可视为余弦定理的特殊情况，即 $c^2=a^2+b^2-2ab\cos 90°$.

变式 2 已知所有符合 $a^2+b^2=c^2$ 的正整数解即为一组勾股数，如:3、4、5，5、12、13，9、40、41，……那么是否存在正整数 a、b、c，使 $a^3+b^3=c^3$ 呢？

变式 3 当幂 $n\geqslant 3$ 时，是否存在正整数 a、b、c，使 $a^n+b^n=c^n$ 也成立呢?这就是有名的数学难题——费马最后定理.

由上例可知，教材中一些常见定理，反映着相关数学理论的本质属性，蕴含着丰富的数学思维方法和思想精髓，这就是学生创新思维的生长点.

例 4 求一元二次方程 $x^2-5x+6=0$ 的根.

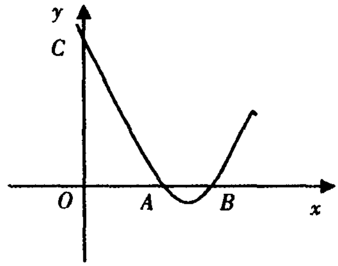


图 2-3

变式探究

变式 1 求一元二次不等式 $x^2-5x+6>0$ 的解集.

解:画出二次函数 $y=x^2-5x+6$ 的图像,如图 2-3.

解得点 A 坐标为$(2,0)$,点 B 坐标为$(3,0)$.

由图像可知一元二次不等式 $x^2-5x+6>0$ 的解集为 $x<2$ 或 $x>3$.

变式 2 如图 2-4,在直角坐标系中作出点 $B(0,1)$和 $Q(p,q)$.以 BQ 为直径作圆 C,交 x 轴于 M、N,则点 M、N 的横坐标即为二次方程 $x^2-px+q=0$ 的实根.

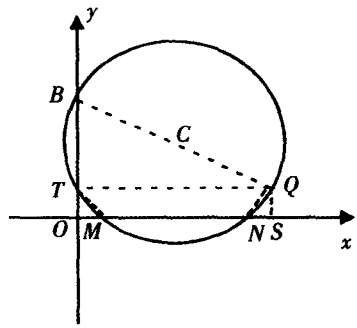


图 2-4

证明:连结 QT,过点 Q 作 $QS\perp x$ 轴,垂足为 S,

$\because BQ$ 为直径,

$\therefore\angle BTQ=90°$,$\therefore OT=QS=q$.

由相交弦定理可知:

$OM\cdot ON=OT\cdot OB$,即 $OM\cdot ON=q$,

又易证$\triangle OTM\cong\triangle SQN$,$\therefore OM=NS$.

$\therefore OM+ON=OM+OM+MN=OM+MN+NS=OS=TQ=p$.

$\therefore$ 由韦达定理可知点 M、N 的横坐标即为一元二次方程 $x^2-px+q=0$ 的根,这即为19 世纪苏格兰文学家卡莱尔给出的有名的任意一元二次方程实根的一个新颖、简洁的几何求法.

因此,学生通过对数学问题的思考,学习分析问题、把握规律的能力.学生在解题后总结规律和方法,从而把获得的知识、方法迁移和应用到其他问题,培养了学生思维的深刻性.

例 5 如图 2-5,O 为$\triangle ABC$ 内任意一点,连结 OA、OB、OC,在 OC 上任取一点 E,作 $EF/\!/AC$ 交 OA 于点 F,作 $DE/\!/BC$ 交 OB 于点 D,连结 DF.求证:$\triangle DEF\backsim\triangle ABC$(浙教版教材例题)

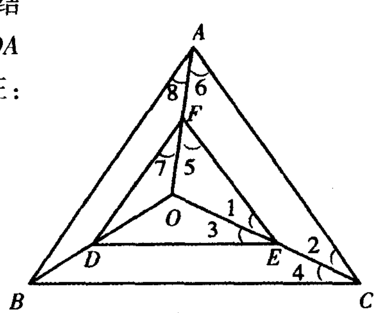


图 2-5

证明:$\because EF/\!/AC,DE/\!/BC$,

$\therefore\angle 1=\angle 2,\angle 3=\angle 4,\angle 5=\angle 6$,

$\therefore\dfrac{OE}{OC}=\dfrac{OF}{OA}=\dfrac{OD}{OB}$,

$\therefore DF/\!/AB$,$\therefore\angle 7=\angle 8$.

$\therefore \angle ACB=\angle FED,\ \angle DFE=\angle BAC.$

$\therefore \triangle DEF \backsim \triangle ABC.$

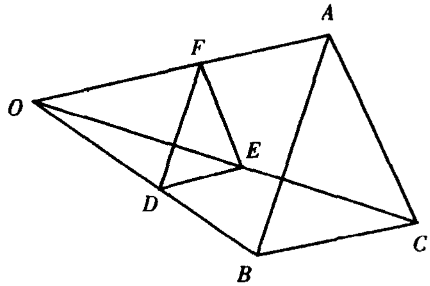


图 2-6

变式探究

变式 1 如图 2-6，上题中"O 为 $\triangle ABC$ 内一点"改为"O 为 $\triangle ABC$ 外任一点"，其他条件不变，求证：$\triangle DEF \backsim \triangle ABC$.

变式 2 如图 2-7，当"O 跑到 AB 边上"，求证：$\triangle DEF \backsim \triangle ABC$.

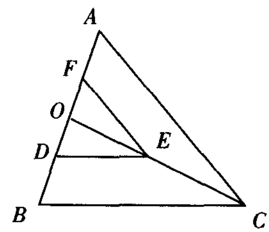


图 2-7

变式 3 如图 2-8，当"O 跑到 AB 的特殊点 A 上"，求证：$\triangle DEF \backsim \triangle ABC$.

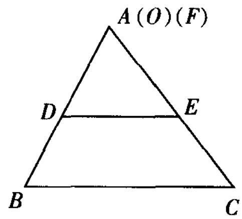


图 2-8

变式 4 上几题都是"O 点在运动"，如果 $\triangle ABC$ 进行变化会怎样呢？

如图 2-9，这些多边形都相似吗？

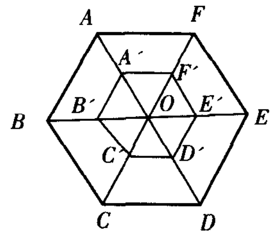
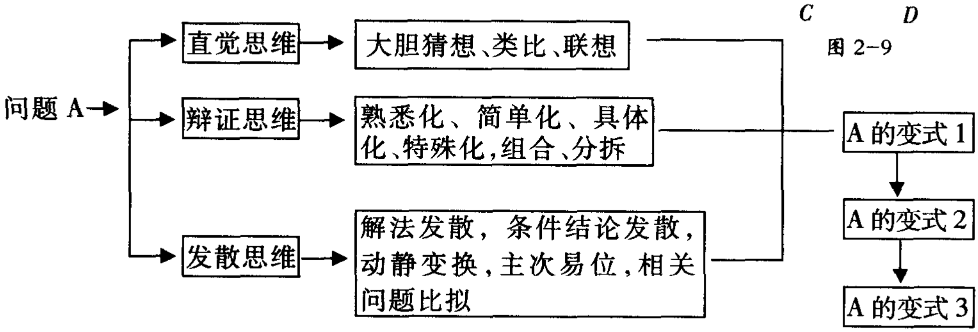


图 2-9

如此，对于教材中许多重要的例题、习题进行类比、引申、推广，提出新问题并加以解决，从而引发学生遐思绵绵，不但发挥了教材的示范作用，更能培养学生数学思维的灵活性和思考问题的深刻性.

三、熟悉规律，掌握技能

数学问题的演变是从基础问题出发进行变化，对学生的思维能力要求较高，但仍有一定的方法、技巧可循.如何引导学生根据现有的思维水平，运用已掌握的知识，通过正确的思维方式，把碰到的数学问题转化为熟悉的或容易解决的数学问题，变中求解、解中求变呢？请参见以下的流程图：



例 6 已知点 P 是抛物线 $y=\frac{1}{4}x^2+1$ 上的任意一点，设点 P 到 x 轴的距离为 d_1，点 P 与点 $F(0,2)$ 的距离为 d_2.

(1)猜想 d_1,d_2 的大小关系，并证明；

(2)若直线 PF 交此抛物线于另一点 Q(异于 P 点)：

①试判断以 PQ 为直径的圆与 x 轴的位置关系，并说明理由；

②以 PQ 为直径的圆与 y 轴的交点为 A、B，若 $OA\cdot OB=1$，求直线 PQ 对应的函数解析式.(2003 年扬州中考题)

解：(1)猜想 $d_1=d_2$，证明如下：

设点 $P(x_0,y_0)$ 是抛物线 $y=\frac{1}{4}x^2+1$ 上的任意一点，则有：

$d_1=y_0=\frac{x_0^2}{4}+1$.

又 $d_2=PF=\sqrt{x_0^2+(y_0-2)^2}$，

而 $x_0^2=4y_0-4$，

$\therefore d_2=y_0=d_1$.

(2)①如图 2-10，以 PQ 为直径的圆与 x 轴相切，设 M 为 PQ 中点，分别过点 M、P、Q 向 x 轴作垂线，垂足分别为 C、P'、Q'.

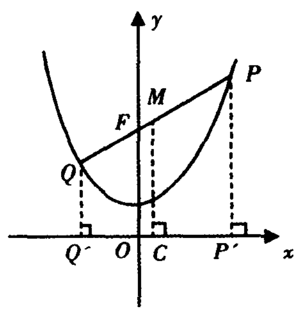


图 2-10

当 PQ 垂直于 y 轴时，由四边形 $PQQ'P'$ 为矩形，易得 $MC=\frac{1}{2}\cdot(QQ'+PP')=\frac{1}{2}(QF+PF)=\frac{1}{2}PQ$；

当 PQ 不垂直于 y 轴时，MC 是梯形 $PQQ'P'$ 的中位线.

$MC=\frac{1}{2}\cdot(QQ'+PP')=\frac{1}{2}PQ$

$\therefore$ 以 PQ 为直径的圆与 x 轴相切.

②设直线 PQ 的解析式为 $y=kx+b$，

$\because$ 点 $F(0,2)$ 在 PQ 上

$\therefore b=2, y=kx+2$

由 $\begin{cases} y=kx+2 \\ y=\frac{x^2}{4}+1 \end{cases}$ 消去 y，并整理得：

$x^2-4kx-4=0.(*)$

记 $P(x_0,y_0)$、$Q(x_1,y_1)$，则 x_0、x_1 为方程(*)的两实根.

$\because \odot M$ 与 x 轴相切于点 C，与 y 轴相交于 A、B，且 $OA\cdot OB=1$，由切割线定理，得：

$OC^2=OA\cdot OB=1$，$\therefore OC=1$.

$\therefore$ 点 C 坐标为(1,0)或(-1,0)，又点 C 为线段 $Q'P'$ 的中点.

若 C 点坐标为(1,0)，则

$x_0-1=1-x_1$，即 $x_0+x_1=2$，

$\therefore 4k=2$，$k=\frac{1}{2}$.

若 C 点坐标为(-1,0)，则

$x_0-(-1)=-1-x_1$，即 $x_0+x_1=-2$，

$\therefore 4k=-2, k=-\frac{1}{2}$.

$\therefore$ 直线 PQ 的函数解析式为：

$y=\frac{1}{2}x+2$ 或 $y=-\frac{1}{2}x+2$.

变式探究

变式 1 定长为 5 的线段 PQ 的两个端点在抛物线 $y=\frac{1}{4}x^2+1$ 上移动，F 点的坐标为(0,2)，记线段 PQ 的中点为 M，求点 M 到 x 轴的最短距离.

解：如图 2-11，过 M 作 MC 垂直于 x 轴，垂足为 C，易得 $MC=\frac{1}{2}(PP'+QQ')$，

易证 $PP'=PF, QQ'=QF$.

$\therefore MC=\frac{1}{2}(PF+QF)$，即只要求 $PF+QF$ 的最小值.

而 $PF+QF\geqslant PQ$，故当 P、F、Q 三点共线时，

$PF+QF$ 最小，且 $PF+QF=PQ$，

$\therefore MC\geqslant\frac{1}{2}PQ=\frac{5}{2}$，

$\therefore M$ 到 x 轴的最短距离为 $\frac{5}{2}$.

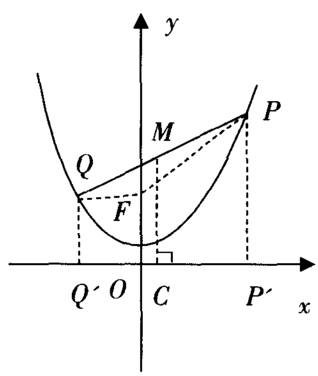


图 2-11

变式 2 如图 2-12，已知抛物线 $y=\frac{1}{4}x^2+1$，F 点坐标为(0,2)，过点 F 的直线交抛物线于 P、Q 两点，点 M 为线段 PQ 的中点，$MR\perp PQ$ 且与 y 轴交于点 R，求证：$PQ=2FR$.

证明：设 $R(0,y_0)$，$P(x_1,y_1)$、$Q(x_2,y_2)$，则 $FR=y_0-2$.

由题设易知 $RP=RQ$，代入两点间距离公式，得

$x_1^2+(y_0-y_1)^2=x_2^2+(y_0-y_2)^2$,

$\because x_1^2=4(y_1-1)$, $x_2^2=4(y_2-1)$,

代入上述方程,得

$(y_0-y_1)^2-(y_0-y_2)^2=4(y_2-y_1)$,

即$[2y_0-(y_1+y_2)](y_2-y_1)=4(y_2-y_1)$,

$\because y_1\neq y_2$, $\therefore y_0=\dfrac{y_1+y_2}{2}+2$,

即 $FR+2=\dfrac{y_1+y_2}{2}+2$,

$\therefore FR=\dfrac{y_1+y_2}{2}$.

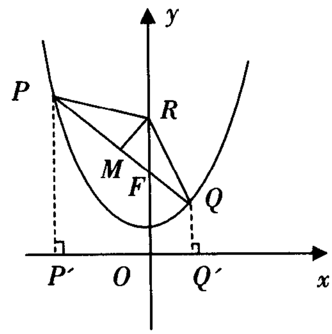


图 2-12

分别过 P、Q 作 PP'垂直于 x 轴,QQ'垂直于 x 轴,垂足分别为 P'、Q',

易证 $PP'=PF$, $QQ'=QF$.

$PQ=PF+FQ=PP'+QQ'=y_1+y_2$

$\therefore PQ=2FR$.

变式 3 如图 2-13,以点 $E(0,8)$为圆心,6 为半径作半圆,交 y 轴于 B、D,交抛物线 $y=\dfrac{1}{4}x^2+1$ 于 P_1、P_2,求证:$P_1B+P_2B=12$.

证明:设 $P_1B=m$, $P_2B=n$,过 P_1 作 $P_1M\perp BE$, P_1Q_1 垂直于 x 轴,垂足分别为 M、Q_1,过 P_2 作 $P_2N\perp BE$, $P_2Q_2\perp x$ 轴,垂足分别为 N、Q_2.

$\therefore P_1B_2^2=BM\cdot BD$,而 $P_1B=P_1Q_1$,

即 $P_1Q_1^2=BM\cdot BD$

设 $P_1Q_1=m$, $\therefore m^2=(m-2)\cdot 12$

$\therefore m^2-12m+24=0$

同理可得:$P_2B^2=BN\cdot BD$

即 $P_2Q_2^2=BN\cdot BD$

设 $P_2Q_2=n$, $\therefore n^2=(n-2)\cdot 12$

$\therefore n^2-12n+24=0$

即 m、n 是方程 $z^2-12z+24=0$ 的根,

$\therefore m+n=12$

$\therefore P_1B+P_2B=12$

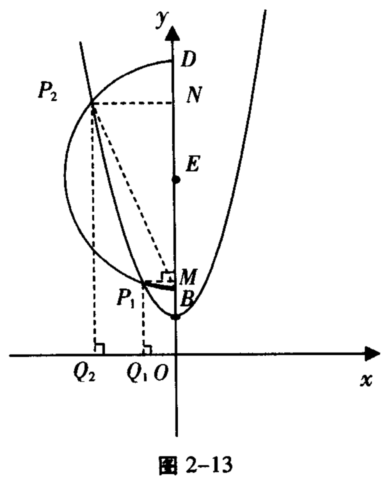


图 2-13

此题及变式是以直线、抛物线、圆之间位置关系为背景,在知识网络的交汇点设计问题,综合考查了函数、方程、几何的基础知识,其综合性极强(初中阶段重要的知

识点几乎全部涉及),同时,也深入地考查了初中阶段重要的数学思想,如数形结合思想、函数方程思想、转化和分类思想、建立模型思想、运动辩证思想,教师和学生如果能够如此解题与演变问题,将对其数学思维能力的提高具有极大帮助,面对一些数学问题会有“一览众山小”的感觉.

四、巧妙设计,注意要点

前面,我们举例说明了数学问题变式的方法,但应当指出,问题变式不是为了“变式”而变式,而是要根据教学或学习需要,遵循学生的认知规律而设计数学变式,其目的是通过变式训练,使学生在理解知识的基础上,把学到的知识转化为能力,形成技能技巧,完成“应用—理解—形成技能—培养能力”的认知过程.因此,数学变式设计要巧,要有一定的艺术性,要正确把握变式的度.一般地,设计数学变式,应注意以下几个问题:

1.差异性.设计数学问题变式,要强调一个“变”字,避免简单的重复.变式题组的题目之间要有明显的差异,要使学生对每道题既感熟悉,又觉新鲜.从心理学角度分析,新颖的题目对学生刺激强,学生做题的兴奋度高,容易集中注意力,积极性高,思维敏捷,能收到较好的训练效果.因此,设计数学变式,要努力做到变中求“活”,变中求“新”,变中求“异”,变中求“广”.

2.层次性.所谓的问题变式要有一定的难度,才能调动学生积极思考.但是,变式要由易到难,层层递进,让问题处于学生思维水平的最近发展区,充分激发学生的好奇心和求知欲.要让学生经过思考,能够跨过一个个“门槛”,这样既达到训练的目的,又可以培养学生的思维能力,发展学生的智力.

3.开阔性.一幅好画,境界开阔,会令人回味无穷.同样,设计数学问题变式,一定要内涵丰富,境界开阔,给学生留下充足的思维空间.因此,所选范例必须具有典型性.一要注意知识之间的横向联系;二要具有延伸性,可进行一题多变;三要注意思维的创造性和深刻性.

4.灵活性.根据教学内容和学生的实际情况,数学问题变式训练的方式要灵活多样,力求使学生独立练习和教师启发引导下的半独立练习相结合.同时,根据数学内容,有时可分散训练,有时可集中训练,有时一个题目的变式可分几次完成,充分展现知识螺旋式上升的方式.这种灵活的训练方式,不仅可以提高学生的兴趣,吸引学生的注意力,而且可以使学生的多种感官参与学习,提高大脑和神经的兴奋度,达到最佳的训练效果.

第三章　图形内部结构的变式探究

所谓图形内部结构的变式，就是以基本图形为“基准点”，通过基本图形的运动、组合、分解、变形，从而将某一问题转换成更一般的问题，把所研究的图形扩展到更大范围内进行考察，开阔解决问题的视野，培养举一反三、触类旁通的思维品质和创新能力.

例 1 已知：如图 3-1，$\odot O$ 和 $\odot O'$ 都经过点 A 和 B，PQ 切 $\odot O$ 于 P，交 $\odot O'$ 于 Q、M，交 AB 的延长线于 N.求证：$PN^2=NM\cdot NQ$（人教版九年制义务教育初中几何）

证明：$\because NP$ 切 $\odot O$ 于点 P　$\therefore NP^2=NB\cdot NA$

又由割线定理得：$NQ\cdot NM=NB\cdot NA$

$\therefore PN^2=NM\cdot NQ$.

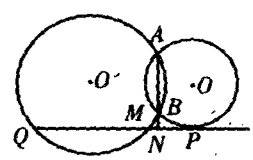


图 3-1

变式探究

变式 1 如图 3-2，把直线 NQ 继续向上平移，使点 N 在线段 AB 上，则结论 $P_1N\cdot NP_2=MN\cdot NQ$ 仍成立吗？

证明：由相交弦定理可知：

$P_1N\cdot NP_2=BN\cdot NA$　　$BN\cdot NA=NM\cdot NQ$

$\therefore P_1N\cdot NP_2=MN\cdot NQ$

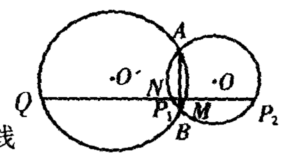


图 3-2

变式 2 如图 3-3，若 $\odot O'$ 不动，把 $\odot O$ 向右平移，使两圆外切，$PN^2=NM\cdot NQ$ 成立吗？

成立，证明同上.

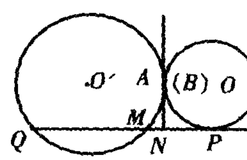


图 3-3

小　结

两圆有相交、相离、相切（内切、外切）等位置关系，直线与圆有相离、相交、相切等位置关系，它们之间某些图形结构在变式后，原有存在规律仍然不变.