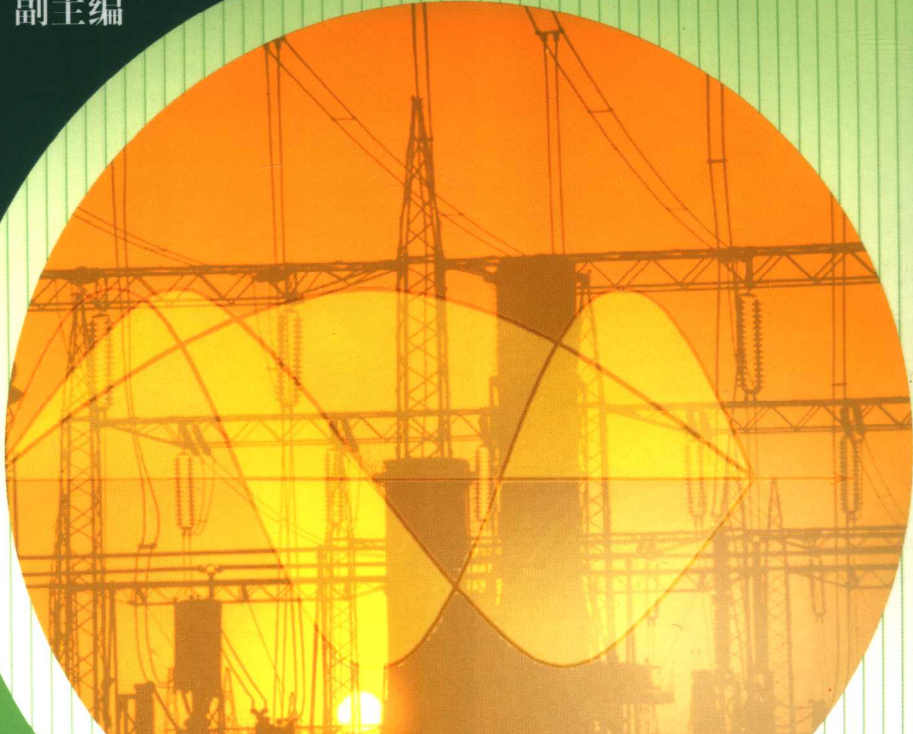
银领工程

高等职业教育应用型人才培养培训工程系列教材

电类高等数学

王仲英　主编

孙晓晔　毛羽强　副主编



高等教育出版社
Higher Education Press

银领工程

高等职业教育应用型人才培养培训工程系列教材

电类高等数学

王仲英　主编

孙晓晔　毛羽强　副主编

高等教育出版社

内容提要

本书是根据教育部新制定的“高职高专教育高等数学课程教学基本要求”，结合编者多年教学经验和目前高职高专教育现状而编写的。

本书的主要内容包括初等函数，极限与连续，导数与微分，导数应用，不定积分，定积分，定积分的应用，常微分方程，向量与空间解析几何，多元函数微积分学，无穷级数，数学软件包 Mathematica 等。书后附有初等数学常用公式，函数的特性及基本初等函数的性质，常用函数的拉普拉斯变换表，数学软件包 Mathematica 常用系统函数，习题答案与提示等供读者参考。

本书可作为高职高专院校电类专业的高等数学教材，也可供相关技术人员参考。

图书在版编目（CIP）数据

电类高等数学/王仲英主编．—北京：高等教育出版社，2006.7

ISBN 7－04－018935－6

Ⅰ.电…　Ⅱ.王…　Ⅲ.高等数学－高等学校：技术学校－教材　Ⅳ.O13

中国版本图书馆 CIP 数据核字（2006）第 060256 号

策划编辑　周先海　**责任编辑**　张耀明　**封面设计**　王凌波　**责任绘图**　郝　林

版式设计　马静如　**责任校对**　俞声佳　**责任印制**　毛斯璐

出版发行	高等教育出版社	购书热线	010－58581118
社　　址	北京市西城区德外大街 4 号	免费咨询	800－810－0598
邮政编码	100011	网　　址	http://www.hep.edu.cn
总　　机	010－58581000		http://www.hep.com.cn
		网上订购	http://www.landraco.com
经　　销	蓝色畅想图书发行有限公司		http://www.landraco.com.cn
印　　刷	北京北苑印刷有限责任公司	畅想教育	http://www.widedu.com
开　　本	787×1092　1/16	版　　次	2006 年 7 月第 1 版
印　　张	20.75	印　　次	2006 年 7 月第 1 次印刷
字　　数	500 000	定　　价	24.00 元

物料号　18935－00

出版说明

为了认真贯彻《国务院关于大力推进职业教育改革与发展的决定》，落实《2003—2007年教育振兴行动计划》，缓解国内劳动力市场技能型人才紧缺现状，为我国走新型工业化道路服务，自2001年10月以来，教育部在永州、武汉和无锡连续三次召开全国高等职业教育产学研经验交流会，明确了高等职业教育要“以服务为宗旨，以就业为导向，走产学研结合的发展道路”，同时明确了高等职业教育的主要任务是培养高技能人才。这类人才，既要能动脑，更要能动手，他们既不是白领，也不是蓝领，而是应用型白领，是“银领”。从而为我国高等职业教育的进一步发展指明了方向。

培养目标的变化直接带来了高等职业教育办学宗旨、教学内容与课程体系、教学方法与手段、教学管理等诸多方面的改变。与之相应，也产生了若干值得关注与研究的新课题。对此，我们组织有关高等职业院校进行了多次探讨，并从中遴选出一些较为成熟的成果，组织编写了“银领工程”丛书。本丛书围绕培养符合社会主义市场经济和全面建设小康社会发展要求的“银领”人才的这一宗旨，结合最新的教改成果，反映了最新的职业教育工作思路和发展方向，有益于固化并更好地推广这些经验和成果，很值得广大高等职业院校借鉴。我们的这一想法和做法也得到了教育部领导的肯定，教育部副部长吴启迪专门为首批“银领工程”丛书提笔作序。

我社出版的高等职业教育各专业领域技能型人才培养培训工程系列教材也将陆续纳入“银领工程”丛书系列。

“银领工程”丛书适合于高等职业学校、高等专科学校、成人高校及本科院校举办的二级职业技术学院、继续教育学院和民办高校使用。

高等教育出版社

2006年5月

前　言

高等数学课程是高等职业教育各类专业必修的重要基础课和工具课。它对培养学生的理性思维、科学精神、治学态度以及用数学解决实际问题的能力都有着非常重要的作用。为了适应高等职业教育快速发展的需要，真正落实高等职业教育的培养目标，根据高等职业教育数学教学的特点和需求为满足高等职业教育机械类、电类、信息类、经济管理类各专业对数学教学的需要，在高等教育出版社的委托下，由中国职业技术教育学会教学工作委员会数学教学研究会（高职）主任侯风波教授牵头，按整体建设的思路，对高等数学课程进行了为期两年的研究与建设。

2004 年 8 月，研究会在湖南岳阳召开了第一次会议，启动了高职数学课程教学现状的研究工作，总结了高职数学课程改革所取得的成绩及存在的问题，成立了高职数学课程教材编委会。2005 年 1 月，研究会在江苏无锡召开了第二次会议，按机械、电、信息、经管等专业大类分别研讨了高职数学课程整体建设思路；2005 年 4 月，研究会在上海召开第三次会议，讨论确定了上述四个专业大类高等数学课程教学基本要求、教学大纲、教学日历、教材编写大纲等 16 个教学文件，并确定根据上述 16 个文件按机械、电、信息、经管四个专业大类进行高等数学教材的编写工作，并进行了编写任务的分工；2005 年 10 月，研究会在承德召开了四本书的审稿交流会议，确定了本套教材的主编、副主编等人选，由中国职业技术教育学会教学委员会数学教学研究会（高职）组织编写的这套教材包含《机械类高等数学》、《电类高等数学》、《信息类高等数学》、《经管类高等数学》及与之配套的电子教案、试题库、助学课件等教学资料，给高等职业教育机械、电、信息、经管等专业大类的数学课程教学提供了较为完整的教学解决方案。本书即为其中之一。

本书内容结合电类专业、突出培养电类专业人才的能力，以强化概念，淡化计算，注重应用为重点，充分体现了“以应用为目的，以必需、够用为度”的原则，在保留高等数学传统教材主要内容的同时，精简了一些繁琐的证明和计算。采用案例驱动的思想，编入了大量具有电类专业背景的例题和习题。

本书的主要内容有学习高等数学的作用与意义，初等函数，极限与连续，导数与微分，导数应用，不定积分，定积分，定积分的应用，常微分方程，向量与空间解析几何，多元函数微分学，多元函数积分学，无穷级数，数学软件包 Mathematica 等。书后附有初等数学常用公式，函数的特性及基本初等函数的性质，常用函数的拉普拉斯变换表，数学软件包 Mathematica 常用系统函数，习题答案与提示等供读者参考。

本书是高等数学教学资源整体建设工作的一部分，除主教材外，还配套建设有电子教案、试题库、教学重点难点分析等教学资源。

本书不追求理论上的严格论证和推导，但对于一元函数微积分部分，应适当注意自身的系统性和逻辑性；电类不同专业在完成以上必修内容的基础上，可根据需要有所侧重、选择和补充；对难度较大的部分基础理论，不追求严格的论证和推导，只作简单说明；对与实际应用联系较多的

基本知识、基本理论和基本运算技能给予了重点加强;注重基本运算技能的训练,但不过分追求复杂的计算和变换的技巧,复杂的运算注意使用数学软件;数学软件要结合具体教学内容进行;注重贯彻循序渐进原则和启发式教学原则。

本书具有以下几个特点:

1. 专设一章"数学软件包 Mathematica"研究"用数学软件包 Mathematica 求解××",以培养学生用计算机及相应数学软件包求解数学模型的能力。

2. 在保证数学概念准确的前提下,尽量借助于几何直观,力求使抽象的数学概念形象化,便于读者理解。

3. 注重数学概念与实际问题的联系,特别是与电类专业的联系。

4. 结合具体内容进行数学建模训练,注重双向翻译能力的培养。

5. 理论推导或证明以解释清楚有关结论为度,不过分追求理论上的系统性。

本书由王仲英任主编,孙晓晔、毛羽强任副主编,其中第一、六、七、八、十四章及附录由王仲英编写,第二、三章由许晋仙编写,第四章由曹成龙和王文成编写,第五章由曹勃编写,第九章由孙晓晔编写,第十章由任纪和编写,第十一章由付艳茹编写,第十二章由彭奇林编写,第十三章由毛羽强编写。全书统稿由王仲英承担,框架结构安排和定稿由侯风波完成。参加编写工作的还有郝祥晖、燕春霞等。

本书的编写,自始至终得到了侯风波教授和罗德春同志的大力支持和帮助,他们为本书的成稿付出了辛勤的劳动,并提出诸多好的建议,在此一并致以诚挚的谢意。

限于编者的水平,书中一定存在缺点和不足之处,敬请读者提出宝贵意见并批评指正。

编者

2006年3月

目　　录

第一章　学习高等数学的作用与意义

高等数学是高等学校理工类、经济类等专业学生必修的一门重要基础理论课程，它的思想方法已经渗透到自然科学和工程技术各个分支之中，许多专业基础课和专业课都是建立在高等数学基础之上的，它也是人们描述自然现象、社会现象的变化规律的重要手段和有力工具.

第一节　高等数学的作用与意义

人们一上学就学习数学，每次考试都要考数学，可见数学是非常重要的. 到大学阶段为什么还要学习高等数学呢? 高等数学的研究对象是什么? 高等数学与初等数学有何不同? 这些都是我们这节要探讨的问题.

一、数学的研究对象及其特点

数学是研究现实世界的数量关系和空间形式的科学.

中国科学院院士姜伯驹说："数学科学研究的对象可以取自任何领域，它的着眼点不是各领域素材的内容，而是它的数量和形式的各种表现形式；它能够把一个领域的思想，最新的进步，经过抽象的过程提炼出来，再把这些思想转移到完全不相干的领域里面去. 很多学科的成就大小，取决于它们与数学结合的程度."

著名数学大师希尔伯特(D. Hilbert)说："数学是调节理论和实践、思想和经验之间的差异的工具. 它建立起了一座连通双方的桥梁，并在不断地加固它. 事实上，全部现代文明中有关理论认识和征服自然的部分都有赖于数学."

A. D. 亚历山大洛夫说，"甚至对数学只有很肤浅的知识就能容易地觉察到数学的这些特点：第一是它的抽象性，第二是精确性，或者更好地说是逻辑的严格性以及它的结论的确定性，最后是它的应用的极端广泛性."

中国科学院院士王梓坤说："数学的特点是：内容的抽象性、应用的广泛性、推理的严谨性和结论的明确性".

1. 高度的抽象性

数学的抽象性表现在哪里呢? 那就是暂时撇开事物的具体内容，仅抽取事物或现象的量的关系和空间形式去进行研究. 比如在简单的计算中，$1+2$ 既可以理解成一个苹果加两个苹果，也可以理解成一个电阻加两个电阻. 在数学里，我们撇开苹果、电阻的具体内容，而只是研究 $1+2$ 的运算规律，掌握了这个规律，那就不论是苹果、电阻，还是汽车或者别的什么事物都可以按加法的运算规律进行计算. 乘法、除法等运算也都是研究抽象的数，而撇开了具体的内容.

数学中的许多概念都是从现实世界抽象出来的. 比如几何学中的"直线"这一概念，并不是指

现实世界中的拉紧的线，而是把现实的线的质量、弹性、粗细等性质都撇开了，只留下了“向两方无限伸长”这一属性，但是现实世界中是没有向两方无限伸长的线的.几何图形的概念、函数概念都是比较抽象的.但是，抽象并不是数学独有的属性，它是任何一门科学乃至全部人类思维都具有的特性.只是数学的抽象性有它不同于其他学科抽象的特征罢了.

2. 逻辑的严密性

任何一门科学，必须要正确并且精确地反映所研究的客观事实，既不能漏洞百出又不能自相矛盾.数学中的每一个定理，不论验证了多少实例，只有当它从逻辑上被严格地证明了的时候，才能在数学中成立.在数学中要证明一个定理，必须是从条件和已有的数学公式出发，用严谨的逻辑推理方法导出结论.

爱因斯坦(Einstein)曾对数学逻辑的严密性有如下的论述：“为什么数学比其他一些科学受到特殊的尊重，一个理由是它的命题是绝对可靠的和无可争辩的，而且不像其他科学的命题经常处于会被新发现的事实推翻的危险境地之中……数学之所以有高声誉，还有另一个理由，那就是数学给予精密自然科学以某种程度的可靠性，没有数学，这些科学是达不到这样的可靠性的.”

3. 应用的广泛性

数学从它产生那日起，就成为人类征服自然的有力武器被广泛应用，而数学应用的广泛性正是由数学自身的高度抽象性和逻辑的严密性所决定的.

历史上物理学、天文学、力学的许多重大发现无不与数学的进步息息相关，如：牛顿力学、爱因斯坦的相对论、电磁波和光的本质的发现、海王星和冥王星的发现、量子力学的诞生等等.20世纪最伟大的技术成就——电子计算机的发明和应用都是以数学为基础的.而现代的许多所谓高科技更是本质上就是“数学技术”，如：医学上的CT技术、指纹的存储和识别、飞行器的模拟设计、石油地震勘探的数据处理分析、信息安全技术、保险精算、金融风险分析和预测等等.当今的数学不再只是通过其他学科间接地应用于各技术领域，而是广泛地直接地应用于各技术领域中.现代数学是自然科学的基本语言，是应用模式探索现实世界物质运动机理的主要手段，更是现代技术与工程必不可少的工具.恩格斯早就预言：“任何一门科学的真正完善在于数学工具的广泛应用.”

因此，华罗庚说：“宇宙之大，粒子之微，火箭之速，化工之巧，地球之变，生物之谜，日用之繁，无处不用数学.”

二、高等数学与初等数学有何不同？

高等数学与初等数学一样，函数仍然为其研究的主要对象，不同的是初等数学是常量的数学，而高等数学则是变量的数学.

初等数学的第一个特征在于其所研究的对象是不变的量(常量)或孤立不变的规则几何图形；第二个特征表现在其研究方法上.初等代数与初等几何是各自依照互不相关的独立路径构筑起来的，使我们既不能把几何问题用代数术语陈述出来，也不能通过计算用代数方法来解决几何问题.

16世纪，由于工业革命的直接推动，对于运动的研究成了当时自然科学的中心问题，这些问题和以往的数学问题有着原则性的区别.要解决它们，初等数学已不够用了，需要创立全新的概念与方法，创立出研究现象中各个量之间的变化的新数学.变量与函数的新概念应时而生，导致

了初等数学阶段向高等数学阶段的过渡.

高等数学与初等数学相反,它是在代数法与几何法密切结合的基础上发展起来的.这种结合首先出现在法国著名数学家、哲学家笛卡儿所创建的解析几何中.笛卡儿把变量引进数学,创建了坐标的概念.有了坐标的概念,我们一方面能用代数式子的运算顺利地证明几何定理,另一方面由于几何观念的明显性,使我们又能建立新的解析定理,提出新的论点.笛卡儿的解析几何是数学史上一项划时代的变革,恩格斯曾给予高度评价:"数学中的转折点是笛卡儿的变数.有了变数,运动进入了数学,有了变数,辩证法进入了数学,有了变数,微分和积分也就成为必要的了…….”

初等数学到高等数学,观念与思维方式的转变,主要体现在极限概念,极限概念学习是难点.好在我们中学时已接触到了极限,我们不期望短时间内完善对极限的认识,但要求逐步地加深认识,及时总结体会,最终把握极限的实质.

极限概念揭示了变量与常量、无限与有限的对立统一关系.从极限的观点来看,无穷小量不过是极限为零的变量.这就是说,在变化过程中,它的值可以是“非零”,但它变化的趋向是“零”,可以无限地接近于“零”.

学习微积分学当然应该有初等数学的基础,而学习任何一门近代数学或者工程技术都必须先学微积分.

英国科学家牛顿和德国科学家莱布尼茨在总结前人工作的基础上各自独立地创立了微积分,与其说是数学史上,不如说是科学史上的一件大事.恩格斯指出:“在一切理论成就中,未必再有什么像17世纪下半叶微积分学的发明那样被看作人类精神的最高胜利了.”他还说:“只有微积分学才能使自然科学有可能用数学来不仅仅表明状态,并且也表明过程、运动.”

三、为什么要学习高等数学?

随着科学技术的发展,人们越来越深刻地认识到:没有数学,就像鸟儿没有翅膀,不能在科学的蓝天自由翱翔;就像盲人没有拐杖,在科学的迷宫举步维艰.没有它,就难于创造出当代的科学成就.科学技术发展越快越高,对数学的需求就越多.

如今,伴随着计算机技术的迅速发展、自然科学各学科数学化的趋势、社会科学各部门定量化的要求,使许多学科都在直接或间接地,或先或后地经历了一场数学化的进程(在基础科学和工程建设研究方面,在管理机能和军事指挥方面,在经济计划方面,甚至在人类思维方面,我们都可以看到强大的数学化进程).

联合国教科文组织在一份调查报告中强调指出:“目前科学研究工作的特点之一是各门学科的数学化.”

凡讲求高精度、高速度、高效率、高自动、高安全、高质量的东西,只有通过数学模型来设计,用数学方法借助计算机的计算、控制,才能得以实现这些高性能.正如马克思所说:“一门科学只有当它达到了能够成功应用数学时,才算真正发展了.”

数学是一种语言,一切科学的共同语言;数学是一把钥匙,一把打开科学大门的钥匙;数学是一种工具,一种思维的工具;数学是一门艺术,一门理性的艺术.

思考题 1.1

试举例说明数学在日常生活及专业学习中的作用与应用.

第二节 如何学好高等数学

高等数学作为电类专业的一门重要基础理论课程,其主要内容有哪些?课程要求是什么?如何才能学好高等数学呢?下面我们就一起来探讨这些问题.

一、高等数学的学习内容和课程要求

我们要学习的《电类高等数学》这门课程包括函数、极限与连续,一元函数微积分,常微分方程,向量与空间解析几何,多元函数微积分和无穷级数等内容.对于一个学习电类专业的大学生来说,通过这些内容的学习要掌握高等数学的理论和方法,为后续课程(如电工学、电子技术基础和信号与系统等)的学习准备必要的数学工具和奠定良好的基础;进一步培养自己逻辑思维的能力和应用数学解决专业问题的能力.

总之,一方面在知识和能力方面打下一个坚实的基础;另一方面,我认为对同学们来说,更具战略意义而又容易忽视的是培养从事科学研究的基本素质和数学修养,这包括:树立勇攀科学高峰的目标和雄心壮志,培养热爱科学和献身科学的精神,在学习上有知难而进的顽强毅力,思想活跃,学风踏实,态度谦逊,团结合作等等.

为了使读者对《电类·高等数学》这门课程有一个基本的认识,下面我们对一元函数微积分的知识结构系统进行图示说明.

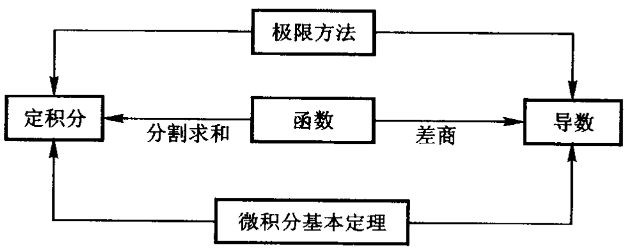


图 1.1

微积分是典型的应用型数学工具,如果不是为了迎合这个貌似连续的世界而解决实实在在的问题,是不会产生微分的,同样如果不是为了微分的计算解决也不会产生积分.微分学研究函数的一般性质,积分学解决微分的逆运算,常微分方程把导数和不定积分结合起来,级数和积分变换解决数值计算问题.所以学习微积分最重要的是对基础定义的理解,如函数、连续、极限、可导等等,并将这些概念和现实问题紧密的结合起来,真正做到"会用"而不是简单地会解书本上的题目.

二、高等数学的学习方法

一位青年科学工作者问世界杰出的物理学家爱因斯坦创立相对论的秘密,爱因斯坦回答是:$W=X+Y+Z$,W 表示成功,X 表示艰苦劳动,Y 表示正确方法,Z 表示少说空话.这也是我们学好高等数学的秘诀.高等数学由于高度抽象,应用广泛,一些基本概念如极限、连续、导数、微分和积分不易理解,教学内容多、学时少、进度快、难度大,不付出艰辛的劳动,不勤奋的学习是学不好的.我们要不断改进学习方法,迅速完成从中学向大学的转变.凡是学得好的同学,他们除了勤奋学习外,还有一套好的适合自己的学习方法.

因此,要学好高等数学就要求同学们应尽快适应高校的学习方法,这就是:制定计划—课前预习—专心听讲—做好笔记—课后复习—独立作业—解决疑难—系统小结.

也可借鉴国外流行的五步学习法——SQ3R 法,这是英文 Survey(浏览),Question(发问),Read(阅读),Recite(复述),Revise(复习)五个词首字母的缩写.

三、注意抓好学习的六个环节

为了尽快适应大学的环境和高等数学的学习,特别要抓好下述六个学习环节.

(1) 预习

为了提高听课效果,每次上课前应对教师要讲的内容进行预习.预习的重点是阅读一下要讲的定义、定理和主要公式.预习的主要目的是:第一,使听课时心里有个底,不至于被动地跟着教师的“脚后跟”跑;第二,知道哪些地方是重点和自己的难点疑点,从而在听课时能提高效率;第三,可以弥补由于基础、理解力上的差异所造成的听课困难.形象地说,预习就像要到某个名胜游览之前,先买个旅游图及其说明来看一看,以便在旅游时更主动,收获更大.

(2) 听课

听课是在大学中获取知识的主要环节.因此,应带着充沛的精力、带着获取新知识的浓厚兴趣、带着预习中的疑点和难点,专心致志地聆听教师如何提出问题、分析问题和解决问题,并且积极主动地思考.

在听课时常会遇到某些问题没听懂情况,这时千万不要在这些问题上持续徘徊而影响继续听课,应承认它并在教材上或笔记上相应处作上记号,继续跟上教师的讲授.遗留的问题、疑点待课后复习时再思考、钻研,或找同学讨论,或找教师答疑,或看参考书.

(3) 记笔记

教师讲课并非“照本宣科”.教师主要讲重点、讲难点、讲疑点、讲思路、讲方法,还会提出一些应注意的问题、补充一些教材上没有的内容和例子.因此,记好课堂笔记是学好高等数学的一个重要的学习环节.但是要注意的是,课堂学习的中心任务是听、看、想,记笔记的目的是便于课后复习,便于消化课上所讲的内容.因此,记笔记不应占用过多的课堂时间.笔记不必工整,不必全面,不必连贯,但应预留较多的空白以便课后补充、写心得、记疑问.

(4) 复习

学习包括“学”与“习”两个方面.“学”是为了获取知识,“习”是为了消化、掌握、巩固知识.每次课后的当天都应结合课堂笔记和教材及时复习课上所讲的内容.但是,在翻开教材与笔记之前,应先回顾一下课上所讲的主要内容.另外,应该经常地、反复地复习前面所讲过的内容,这样

一方面是为了避免边学边忘，另一方面可以加深对以前所学内容的理解，使知识水平上升到更高的层次.

(5) 做作业

我国著名数学家华罗庚教授说："学数学不做练习，好比入宝山而空返"，可见要把高等数学学好，及时、认真地完成作业是一个必不可少的学习环节.每次的作业最好在当天完成，但是应该在复习完当天的内容之后进行.做作业不仅是检验学习效果的手段，同时也是培养、提高综合分析问题的能力、笔头表达的能力以及计算能力的重要手段.

特别强调，认真完成作业是培养同学们严谨治学的一个环节.因此，要求作业"字迹工整、绘图准确、条理清楚、论据充分".切忌抄袭，尽量不先看书后的答案.批改过的作业中的错题要分析原因，并纠正过来，防止重犯.

(6) 答疑

答疑是高等数学学习的一个重要的环节.遇到困难，碰到难题要知难而进，反复看书、看笔记，勤思考，学会不断变换手法，另辟思路，不断地提高自己解决问题的能力.同时也应该及时地与同学讨论，或者及时地向教师请教，切不可将问题放置一旁不理.

除了要重视上述学习环节之外，还有一点应该大力提倡，那就是互助合作、共同研讨、共同提高.团队精神对于学好高等数学同样重要.

思考题 1.2

向同学们介绍你自己是如何学习数学的？有什么好的学习方法？

习 题 一

1. 依据你自己的认识和实践，举出数学渗透到其他课程中的例证.
2. 试简述电类高等数学这门课程的学习内容.

第二章　初等函数

当运动变化成为自然科学研究的主题时，对各种变化过程和进程中的变量间的依赖关系的研究产生了函数的概念. 函数是高等数学研究的主要对象，是刻画运动变化中变量相依关系的数学模型.

本章将在中学数学已有函数知识的基础上，进一步理解函数概念，介绍初等函数的主要性质，为今后微积分的学习打下基础.

第一节　函数的概念

一、函数的概念

函数的概念，从 1673 年德国数学家 Leibniz 引入“函数”一词，到 1837 年德国数学家 Dirichlet 抽象出了较为合理的函数概念，经历了一百多年的时间.

引例 2.1　电学中，恒定电流的电流强度是单位时间内通过导体某一横截面的电量 Q，即电量 Q 与时间 t 之间的关系由公式 $Q = It$ 确定. 当时间 t 取某一正的数值时，按照一定的规则，电量 Q 相应地有一个确定的数值.

引例 2.2　两个带电体，无论运动与否，它们之间都有库仑力. 两个给定点电荷之间的距离 r 与相互作用的库仑力 F 是两个变量. 根据库仑定律，它们之间的关系式是：$F = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\cdot\frac{q_1 q_2}{r^2}$（$q_1, q_2$ 是两点电荷的电量，ε_0 称为真空电容率，它表征真空的电学特性，在电学中是一个重要的常量，其值为 $\varepsilon_0 \approx 8.85\times10^{-12}\ \mathrm{C^2\cdot N^{-1}\cdot m^{-2}}$）. 当 r 取某一正的数值时，按照一定的规则，F 相应地有一个确定的数值.

抽象上述两例，给出函数定义如下：

定义 2.1　设有两个变量 x 和 y，若当变量 x 在实数的某一范围 D 内任意取定一个数值时，变量 y 按照一定的规律 f 总有一个唯一确定的数值和它对应，则称 y 是 x 的函数，记作

$$y = f(x),\ x \in D.$$

其中变量 x 称为**自变量**，变量 y 称为**函数**（或**因变量**）. 自变量的取值范围 D 称为函数的**定义域**，f 称为函数的**对应规律**.

若对于确定的 $x_0 \in D$，通过对应规律 f，函数 y 有唯一确定的值 y_0 相对应，则称 y_0 为 $y = f(x)$ 在 x_0 处的**函数值**，记作 $y_0 = y|_{x=x_0} = f(x_0)$. 函数值的全体所构成的集合称为函数的**值域**，记作 $f(D)$，即 $f(D) = \{y \mid y = f(x), x \in D\}$.

引例 2.1 中电量 Q 是时间 t 的函数，记作 $Q=It$；引例 2.2 中库仑力 F 是电荷间距离 r 的函数，记作 $F=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\cdot\frac{q_1q_2}{r^2}$.

函数的定义域和对应规律称为函数的两个要素，而函数的值域一般称为派生要素.

1. 函数的定义域

函数的定义域通常按下面两种情况考虑：

(1) 用解析式表示的函数，函数的定义域就是使表达式有意义的一切实数组成的集合. 例如，分母不能为零，偶次根式中不能为负，对数的真数必须大于零等等.

(2) 对于实际问题，根据问题的实际意义具体确定.

例 2.1 求下列函数的定义域：

(1) $y=\sqrt{1-x^2}$； (2) $y=\frac{x+1}{x-1}+\ln x$.

解 (1) 要使 $y=\sqrt{1-x^2}$ 有意义，须有 $1-x^2\geqslant 0$，即 $-1\leqslant x\leqslant 1$. 因此，函数的定义域用区间表示为 $[-1,1]$.

(2) 要使 $y=\frac{x+1}{x-1}+\ln x$ 有意义，必须 $x-1\neq 0$，且 $x>0$，即 $x>0$ 且 $x\neq 1$. 故所求函数的定义域为 $(0,1)\cup(1,+\infty)$.

2. 对应规律

函数的对应规律就是由自变量的值取得函数的规律，即定义中的 f. 函数的规律，可用算式表达，也可用表格表达，还可用图形表达.

函数是变一个数为另一个数的法则. 例如，法则"加 3"是一个函数. 设用字母 f 代表函数"加 3". 则 f 是加 3 到一个已知数的法则：

f 变 3 为 3+3，

f 变 4 为 4+3，

f 变 5 为 5+3.

一般地，f 变 x 为 $x+3$，这可以写成 $f:x\to x+3$，简单写成 $f(x)=x+3$.

这个"f"，如同一台加工机器，x 放进去，加工后变出一个 y 来.

例 2.2 已知 $f(x)=3x^2+4x-7$，计算 $f(5)$ 和 $f(-2)$ 的值.

解 以 5 代替函数 $f(x)=3x^2+4x-7$ 中的 x，得到 $f(5)=3\times5^2+4\times5-7=88$.

$$f(-2)=3\times(-2)^2+4\times(-2)-7=-3.$$

例 2.3 设 $f(x+1)=x^2+3x+5$，求 $f(x)$.

解 令 $t=x+1$，则 $x=t-1$，代入上式得

$$f(t)=(t-1)^2+3(t-1)+5=t^2+t+3,$$

即

$$f(x)=x^2+x+3.$$

以上是两个用公式法(解析法)表示 y 与 x 函数对应规律的例子，此外，如常用的平方表、对数表、三角函数表等是用表格法表示函数的对应规律的例子.

用图示法表示函数对应规律，具有直观性强、一目了然的优点.

例如，王先生骑自行车到郊外去观景. 以 3 km/h 的速度匀速前进，骑了一个小时，自行车坏

了;花两个小时修好后,继续上路观景.时间 t 与路程 s 的关系如图 2.1 所示.

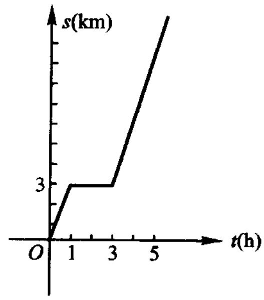


图 2.1

例 2.4　下列各组函数中,哪一组是表示同一函数?

(1) $y_1=\ln x^2$ 与 $y_2=2\ln x$;

(2) $y_1=\sqrt{x(x-1)}$ 与 $y_2=\sqrt{x}\sqrt{x-1}$;

(3) $y_1=\cos x$ 与 $y_2=\sqrt{1-\sin^2 x}$;

(4) $y_1=\sin^2 x+\cos^2 x$ 与 $y_2=1$.

解　(1) 因为 y_1 的定义域为 $(-\infty,0)\cup(0,+\infty)$,$y_2$ 的定义域为 $(0,+\infty)$,所以 y_1 与 y_2 不是同一函数.

(2) 因为 y_1 的定义域为 $(-\infty,0]\cup[1,+\infty)$,$y_2$ 的定义域为 $[1,+\infty)$,所以 y_1 与 y_2 不是同一函数.

(3) 虽然 y_1 与 y_2 的定义域相同,但 y_1 可正可负也可为零,$y_2=|\cos x|$ 只能取正或为零,即对应规律不同,所以 y_1 与 y_2 不是同一函数.

(4) y_1 与 y_2 定义域相同,对应规律相同,所以 y_1 与 y_2 表示同一函数.

下面我们再介绍一个高等数学中常用的概念——邻域.

设 δ 是任一正数,则开区间 $(x_0-\delta,x_0+\delta)$ 表示实数集合 $\{x\,|\,|x-x_0|<\delta,\delta>0\}$,称为点 x_0 的 δ **邻域**,记为 $U(x_0,\delta)$,其中 x_0 点称为邻域中心,δ 称为邻域半径.去掉中心的开区间 $(x_0-\delta,x_0)\cup(x_0,x_0+\delta)$ 称为 x_0 的去心邻域,记为 $U(\hat{x}_0,\delta)$,它表示实数集合 $\{x\,|\,0<|x-x_0|<\delta,\delta>0\}$.

二、函数的几种特性

函数的四个特性在初等数学中已作过详细介绍,在此仅将定义和几何意义简单列表(参见附录 B),供读者复习时参考.

三、分段函数

引例 2.3　图 2.2 为一个矩形波的图形,它在一个周期 $[-\pi,\pi)$ 内的解析式为

$$f(x)=\begin{cases}-1, & -\pi\leqslant\pi<0,\\ 1, & 0\leqslant x<\pi.\end{cases}$$

这个函数的特点是由多个表达式构成,它不是几个函数.在工程实践中,这是一类常见函数.

在不同的定义域上用不同的函数表达式表示的函数称为分段函数.

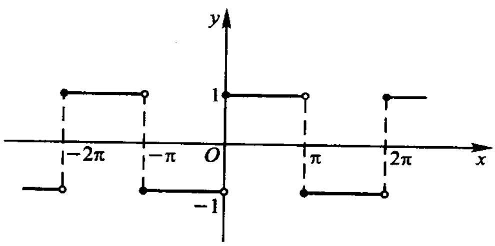


图 2.2

例 2.5　**符号函数**

$$\operatorname{sgn} x=\begin{cases}-1, & x<0,\\ 0, & x=0,\\ 1, & x>0.\end{cases}$$

如图 2.3 所示.