中学数学研究

修订本

郭要红 戴普庆 著

ZHONGXUE SHUXUE YANJIU

安徽大学出版社

中学数学研究

（修订本）

郭要红　戴普庆　著

图书在版编目(CIP)数据

中学数学研究/郭要红,戴普庆著.—合肥:安徽大学出版社,1998.11(2004.6重印)

中学数学教师培训教材

ISBN 7-81052-176-4

Ⅰ.中... Ⅱ①郭... ②戴... Ⅲ.数学课-教学研究-中学-师资培训-教材 Ⅳ.G633.6

中国版本图书馆CIP数据核字(2000)第34170号

中学数学研究(修订本) 郭要红 戴普庆 著

出版发行	安徽大学出版社 (合肥市肥西路3号 邮编230039)	**印　刷**	合肥现代印务有限公司
		开　本	850×1168 1/32
联系电话	总编室 0551-5107719	**印　张**	21
	发行部 0551-5107784	**字　数**	512千
电子信箱	ahdxchps@mail.hf.ah.cn	**版　次**	1998年11月第1版
责任编辑	钟　蕾		2004年6月第3版
封面设计	孟献辉	**印　次**	2004年6月第1次印刷

ISBN 7-81052-176-4/O·13 **定价 27.00 元**

目　次

（* 为选学内容）

第一章　解　析　式

解析式是中学代数课程的重要内容之一，是研究函数、方程的基础，本章首先对解析式进行分类，然后分别讨论各类解析式.

§1.1　解析式

解析式一般定义为

定义 1.1.1　数、字母用运算符号连接而成的式子叫解析式，简称式.

就中学阶段而言，定义 1.1.1 中的运算指的是代数运算（有限次的加、减、乘、除、正整数次乘方和开方、有理数次乘方）和初等超越运算（无理数次乘方、指数、对数、三角、反三角）.

定义 1.1.2　如果在一个解析式中，对字母只进行有限次的代数运算，那么这个解析式就称为代数式；如果对字母进行了有限次的初等超越运算，那么这个解析式就称为初等超越式，简称超越式.

对于代数式，我们有

定义 1.1.3　只含有加、减、乘、除、指数是整数的乘方运算的代数式称为有理式．只含有加、减、乘（包括非负整数次乘方）运算的有理式称为有理整式（或多项式）．特别地，只含有乘法（包括非负整数次乘方）运算的有理整式称为单项式（单独一个数或一个字母也看作单项式）．含有除法运算的有理式称为有

理分式.含有开方运算并且至少有一个根号内含有字母的代数式称为无理式.

根据上述定义,中学数学中的解析式可分类如下:

$$\text{解析式}\begin{cases}\text{代数式}\begin{cases}\text{有理式}\begin{cases}\text{有理整式(多项式)}\\ \text{有理分式}\end{cases}\\ \text{无理式}\end{cases}\\ \text{超越式}\end{cases}$$

应注意:

1.定义中所指的各种运算是针对字母来说的,有时甚至还要看对哪个字母来说的.如:$\frac{1}{c}(b^3+\sqrt{a}b^2+\frac{1}{3}b)$,针对字母 b 来说是多项式,针对字母 a 来说则是无理式,针对字母 c 来说则是分式.

2. 这种分类方法是就它们的形式来说的. 如式子 $\frac{(x^2+1)^2}{x^2+1}$ 是分式,尽管它恒等于 x^2+1.

定义 1.1.4 **字母的所有允许值(即使解析式有意义)的集合称为解析式的定义域;对于定义域中的数值,按照解析式所包含的运算得出的值称为解析式的值;解析式的值的全体组成的集合称为解析式的值域.**

定义 1.1.5 如果对于解析式 A、B 的定义域的公共部分(或其子集)内的一切值,它们都有相等的值,那么就说这两个解析式是恒等的.记作 $A\equiv B$,或 $A=B$.

两个解析式恒等的概念是相对的,即同样的两个解析式在它们各自的定义域的某一个子集内是恒等的,但在另一个子集内可能不恒等,因此应该弄清楚在什么范围内恒等.

定义 1.1.6 一个解析式换以另一个与它恒等的解析式,

这种变换称为恒等变换，或恒等变形.

解析式的恒等变形可能会引起定义域的变化.如解析式

$$\frac{x^3-1}{x-1}$$

的定义域是$(-\infty,1)\cup(1,+\infty)$，但 x^2+x+1 的定义域是$(-\infty,+\infty)$，它们的公共部分是$(-\infty,1)\cup(1,+\infty)$.因此，当 $x\in(-\infty,1)\cup(1,+\infty)$ 时，才有

$$\frac{x^3-1}{x-1}=x^2+x+1$$

§ 1.2 多项式

多项式是解析式的一种，是代数中的一个基本概念，只有掌握了多项式的概念和性质，才能对解析式进行深入研究.

§ 1.2.1 有关概念

按定义 1.1.3，有理整式也称多项式.如

$$a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\cdots+a_1x+a_0 \tag{1}$$

n 是非负整数，当 $a_n\neq 0$ 时，称为一元 n 次多项式.而

$$A_1x^{k_1}y^{l_1}\cdots z^{q_1}+A_2x^{k_2}y^{l_2}\cdots z^{q_2}+\cdots+A_sx^{k_s}y^{l_s}\cdots z^{q_s} \tag{2}$$

称为多元多项式.其中 a_ix^i，$A_ix^{k_i}y^{l_i}\cdots z^{q_i}$ 称为多项式的项，a_i，A_i 称为项的系数.

定义 1.2.1 各个系数都等于零的多项式称为零多项式.

定义 1.2.2 对于非零多项式(2)，称

$$k_i+l_i+\cdots+q_i(i=1,2,\cdots,s)$$

中的最大的非负整数值为这个多项式的次数.

约定任意一个非零常数称为零次多项式，零多项式不给予

次数的定义.

定义 1.2.3 如果非零多项式(2)的所有项都有相同的次数 n,则称(2)为 n 次齐次多项式.

定义 1.2.4 把多项式表示成与它恒等的、没有同类项的单项式的和,或者表示成零多项式,这样的表示形式称为多项式的标准形式.

我们知道零多项式恒等于零.反之如何?

定理 1.2.1 如果对于字母的任意取值,以标准形式给出的多项式的值恒等于零,那么这个多项式的系数都等于零.即这个多项式是零多项式.

证明:(1)对于一元多项式.

当 $n=1$ 时,设多项式 $f(x)=A_1x+A_0$.

根据条件,取 $x=0$,知 $f(0)=0\cdot A_1+A_0=A_0=0$.

$\therefore f(x)=A_1x$.再取 $x=1$ 知 $f(1)=A_1=0$

因此 $f(x)$ 是零多项式.

假设命题对低于 n 次的多项式成立,则对于 n 次多项式.

$$f(x)=A_nx^n+A_{n-1}x^{n-1}+\cdots+A_1x+A_0\equiv 0$$

于是

$$f(2x)=2^nA_nx^n+2^{n-1}A_{n-1}x^{n-1}+\cdots+2A_1x+A_0\equiv 0$$

从而

$$2^nf(x)-f(2x)=2^{n-1}(2-1)A_{n-1}x^{n-1}+2^{n-2}(2^2-1)A_{n-2}x^{n-2}+\cdots+(2^n-1)A_0\equiv 0.$$

根据归纳假设,有

$2^{n-1}(2-1)A_{n-1}=0,\quad 2^{n-2}(2^2-1)A_{n-2}=0,\cdots,$

$(2^n-1)A_0=0.$

$\therefore A_{n-1}=A_{n-2}=\cdots=A_1=A_0=0.$

$\therefore f(x)=A_n x^n\equiv 0$,再令 $x=1$,知 $A_n=0$.
此表明对于 n 次的一元多项式命题也真.

由归纳法原理知:命题对一切自然数都真.

(2) 对于 m 元 n 次多项式,对 m 进行归纳:

当 $m=1$ 时,由(1) 知命题真.

假设当 $m<k$ 时命题真.则当 $m=k$ 时,设 k 元 n 次多项式为 $f(x_1,x_2,\cdots,x_k)$,现将 f 按 x_1 的降幂排:

$$
\begin{aligned}
f(x_1,x_2,\cdots,x_k)=P_n(x_2,x_3,\cdots,x_k)x_1^n\\
+P_{n-1}(x_2,x_3,\cdots,x_k)x_1^{n-1}\\
+\cdots+P_1(x_2,x_3,\cdots,x_k)x_1\\
+P_0(x_2,x_3,\cdots,x_k).
\end{aligned}
$$

对于 $x_2,x_3,\cdots,x_k$ 的任何一组取值,$f(x_1,x_2,\cdots,x_k)$ 可以看作 x_1 的多项式,由(1) 知,对于 x_1 的一切取值

$$f(x_1,x_2,\cdots,x_k)\equiv 0$$

因此,$f(x_1,x_2,\cdots,x_k)$ 的所有系数等于零,即

$$
\begin{aligned}
P_n(x_2,x_3,\cdots,x_k)&\equiv P_{n-1}(x_2,x_3,\cdots,x_k)\equiv\cdots\\
&\equiv P_1(x_2,x_3,\cdots,x_k)\\
&\equiv P_0(x_2,x_3,\cdots,x_k)\equiv 0.
\end{aligned}
$$

因为 $P_i(x_2,x_3,\cdots,x_k)$ $(i=0,1,2,\cdots,n)$ 的变元个数小于 k,根据归纳假设 $P_i(x_2,x_3,\cdots,x_k)$ 必然都是零多项式.因此 $f(x_1,x_2,\cdots,x_k)$ 的系数都等于零.即当 $m=k$ 时命题也真.

由数学归纳法原理知定理对任意多个元的多项式成立.

§ 1.2.2 多项式的恒等

定理 1.2.2 以标准形式给出的两个多项式恒等的充分且必要条件是这两个多项式的对应项分别是具有相同系数的同类项.

证明:仅就一元多项式的情形给出证明:

设$f(x)=a_mx^m+a_{m-1}x^{m-1}+\cdots+a_1x+a_0$

$g(x)=b_nx^n+b_{n-1}x^{n-1}+\cdots+b_1x+b_0$

必要性　不妨设 $m\geqslant n$,则

$$f(x)-g(x)=a_mx^m+\cdots+a_{n+1}x^{n+1}+(a_n-b_n)x^n+\cdots+(a_1-b_1)x+(a_0-b_0)\equiv 0.$$

根据定理 1.2.1 有:

$$a_m=\cdots=a_{n+1}=a_n-b_n=\cdots=a_1-b_1=a_0-b_0=0.$$

所以
$$a_m=\cdots=a_{n+1}=0,$$
$$a_n=b_n,a_{n-1}=b_{n-1},\cdots,a_1=b_1,a_0=b_0.$$

可见 $f(x)$ 与 $g(x)$ 除系数是零的项外,由完全相同的项组成,即它们同次项的系数对应相等.

充分性　显然.

定理 1.2.3　如果两个次数都不高于 n 的多项式$f(x)$与$g(x)$,对于 $n+1$ 个不同的值都有相等的值.则它们一定恒等.

证明(略).

定理 1.2.3 简化了判别两个多项式是否恒等的方法.因为根据多项式恒等的定义,两个多项式是否恒等,需看对于定义域内的一切值是否有相等的值,这几乎是不可能实现的.这个定理告诉我们,不必检验一切值,只须检验较多项式的次数多一个数就可以了.另外,定理 1.2.2 和定理 1.2.3 是待定系数法的理论依据.

§ 1.2.3 一元多项式的因式分解

1.因式分解

定义 1.2.5　如果数域 P 上次数不小于 1 的多项式 $P(x)$ 不能表示成数域 P 上的两个次数比 $P(x)$ 低的多项式的乘积,

则称多项式 $P(x)$ 是数域 P 上的不可约多项式.

根据定义 1.2.5,任何数域上的一次多项式总是不可约的,并且一个多项式是否不可约是依赖于系数域 P 的.

定义 1.2.6 把一个多项式分解为几个不可约多项式乘积的形式叫做多项式的因式分解.

关于因式分解的惟一性,我们有

定理 1.2.4 (惟一分解定理) 设 $f(x)$ 是 $P[x]$ 中任一次数大于 0 的多项式,则

(i) $f(x)$ 可分解为:$f(x) = P_1(x)P_2(x)\cdots P_r(x)$;

(ii) 若 $f(x)$ 又可分解为:$f(x) = q_1(x)q_2(x)\cdots q_s(x)$.

那么 $r = s$,并且适当排列 $q_i(x)$ 的顺序后,还有

$$P_i(x) = C_i q_i(x),(i = 1,2,\cdots r)$$

其中 $P_i(x)$、$q_i(x)$ 是 $P[x]$ 中不可约多项式,$C_i \in P, C_i \neq 0$ $(i = 1,2,\cdots,r)$

证明:可参见《高等代数》教材,此处略去.

多项式的因式分解主要讨论两个问题:一是如何判断所给多项式在指定数域上是否可约;二是如果所给多项式在指定数域上可约,应怎样去分解?

2.复系数与实系数多项式的因式分解

对于复数域,我们有

定理 1.2.5 (代数基本定理) 每个次数不小于 1 的复系数多项式在复数域中有一个根.

证明:参见吴品三编《近世代数》,此处从略.

定理 1.2.6 (复系数多项式因式分解定理) 每个次数不小于 1 的复系数多项式在复数域上都可以惟一地分解成一次因式的乘积.

证明:由定理1.2.5不难证得定理1.2.6.事实上定理1.2.5与定理1.2.6是等价的(读者自证).

由定理1.2.6不难得到:

推论1.2.1 复数域上任何 $n(\geqslant 1)$ 次多项式 $f(x)$ 的标准分解式为:

$$f(x) = a_0(x - a_1)^{l_1}(x - a_2)^{l_2}\cdots(x - a_t)^{l_t}$$

其中 $a_i \neq a_j(i \neq j), l_i \geqslant 1, (i = 1,2,\cdots,t)$.

$$\sum_{i=1}^{t} l_i = n$$

而在实数域上,我们有

定理1.2.7 每个次数不小于1的实系数多项式在实数域上都可以惟一地分解成一次因式与二次不可约因式的乘积.

引理1.2.1 实系数二次多项式

$$f(x) = ax^2 + bx + c \ (a \neq 0)$$

当且仅当 $b^2 - 4ac \geqslant 0$ 时 $f(x)$ 在实数域上可约.

定理1.2.7的证明:

命题对一次多项式显然成立.

假设命题对次数小于 n 的多项式已经证明,则对于 n 次的实系数多项式 $f(x)$,由定理1.2.5知,$f(x)$ 有一复根 α.

若 α 是实数,则 $f(x) = (x - \alpha)g(x)$.

其中 $g(x)$ 是 $n-1$ 次实系数多项式;若 α 不是实数,则 $\bar{\alpha}$ 也是 $f(x)$ 的根,且 $\alpha \neq \bar{\alpha}$,于是

$$\begin{aligned} f(x) &= (x - \alpha)(x - \bar{\alpha})h(x) \\ &= (x^2 - (\alpha + \bar{\alpha})x + \alpha\bar{\alpha})h(x). \end{aligned}$$

由于$(\alpha + \bar{\alpha})^2 - 4(\alpha\bar{\alpha}) = (\alpha - \bar{\alpha})^2 < 0$,根据引理1.2.1,$x^2 - (\alpha + \bar{\alpha})x + \alpha\bar{\alpha}$ 是一实系数二次不可约多项式.从而 $h(x)$ 是 $n-2$ 次实系数多项式.

由归纳假定，$g(x)$、$h(x)$ 可以分解成一次与二次不可约因式的乘积．因此 $f(x)$ 也可以如此分解．

根据数学归纳法原理知：命题对任何次数不小于 1 的多项式都成立．

由定理 1.2.7 不难得到：

推论 1.2.2 实数域上任何 $n(\geqslant 1)$ 次多项式 $f(x)$ 的标准分解式为

$$f(x)=a_0(x-a_1)^{l_1}(x-a_2)^{l_2}\cdots(x-a_t)^{l_t}$$
$$(x^2+p_1x+q_1)^{k_1}\cdots(x^2+p_rx+q_r)^{k_r}$$

其中 a_i、p_i、q_i 全是实数，$l_1,\cdots l_t;k_1,\cdots k_r$ 是非负整数，并且 $p_i^2-4q_i<0,(i=1,2,\cdots,r)$．

例 1.2.1 分解多项式 $f(x)=x^6-2$ 为实系数与复系数不可约因式的乘积．

解：在实数域上

$$\begin{aligned}f(x)&=x^6-2=(x^3)^2-[(\sqrt[6]{2})^3]^2\\&=[x^3-(\sqrt[6]{2})^3][x^3+(\sqrt[6]{2})^3]\\&=(x-\sqrt[6]{2})(x^2+\sqrt[6]{2}x+\sqrt[6]{4})\\&\quad\times(x+\sqrt[6]{2})(x^2-\sqrt[6]{2}x+\sqrt[6]{4}).\end{aligned}$$

而在复数域上可进一步分解为

$$\begin{aligned}f(x)=&(x-\sqrt[6]{2})(x+\sqrt[6]{2})\left(x+\frac{\sqrt[6]{2}(1-\sqrt{3}i)}{2}\right)\\&\times\left(x+\frac{\sqrt[6]{2}(1+\sqrt{3}i)}{2}\right)\times\left(x-\frac{\sqrt[6]{2}(1+\sqrt{3}i)}{2}\right)\\&\times\left(x-\frac{\sqrt[6]{2}(1-\sqrt{3}i)}{2}\right).\end{aligned}$$

例 1.2.2 把 $(1+x+x^2+\cdots+x^n)^2-x^n$ 分解成两个实

系数的因式之积.

解:因为

$$1+x+x^2+\cdots+x^n=\frac{x^{n+1}-1}{x-1}.$$

所以,

$$\begin{aligned}
\text{原式}&=\left(\frac{x^{n+1}-1}{x-1}\right)^2-x^n=\frac{(x^{n+1}-1)^2-x^n(x-1)^2}{(x-1)^2}\\
&=\frac{x^{2n+2}-2x^{n+1}+1-x^{n+2}+2x^{n+1}-x^n}{(x-1)^2}\\
&=\frac{x^{n+2}(x^n-1)-(x^n-1)}{(x-1)^2}\\
&=\frac{x^n-1}{x-1}\cdot\frac{x^{n+2}-1}{x-1}\\
&=(1+x+x^2+\cdots+x^{n-1})(1+x+x^2+\cdots+x^{n+1}).
\end{aligned}$$

例 1.2.3 在实数范围内,将 x^4-4x+3 分解因式.

解:将多项式用行列式表示,得

$$\begin{aligned}
\text{原式}&=x^2\cdot x^2-(4x-3)=\begin{vmatrix} x^2 & 4x-3 \\ 1 & x^2 \end{vmatrix}\\
&=\begin{vmatrix} x^2-1 & -(x^2-4x+3) \\ 1 & x^2 \end{vmatrix}\\
&=\begin{vmatrix} (x+1)(x-1) & -(x-1)(x-3) \\ 1 & x^2 \end{vmatrix}\\
&=(x-1)\begin{vmatrix} x+1 & -(x-3) \\ 1 & x^2 \end{vmatrix}\\
&=(x-1)\begin{vmatrix} x-1 & -(2x^2+x-3) \\ 1 & x^2 \end{vmatrix}\\
&=(x-1)\begin{vmatrix} x-1 & -(x-1)(2x+3) \\ 1 & x^2 \end{vmatrix}
\end{aligned}$$

$$= (x-1)^2 \begin{vmatrix} 1 & -(2x+3) \\ 1 & x^2 \end{vmatrix}$$

$$= (x-1)^2(x^2+2x+3).$$

3. 有理系数多项式的因式分解.

我们知道,任何一个 $n(\geqslant 1)$ 次有理系数多项式 $f(x)$ 总可以写成

$$f(x) = \frac{l}{k} f_1(x) \ (l,k) = 1.$$

其中 $f_1(x)$ 是整系数多项式,并且其系数互质.所以有理系数多项式的因式分解问题,可归结为整系数多项式的因式分解问题.

根据前面的讨论已经知道:复数域上多项式 $f(x)$ 不可约的充要条件是 $f(x)$ 是一次的;实数域上多项式 $f(x)$ 不可约,则 $f(x)$ 为一次或二次的(ax^2+bx+c 不可约的充要条件是 $b^2-4ac<0$).至于有理数域,情况要复杂得多,已有的结论是:对每个正整数 n,总存在 n 次不可约有理系数多项式.因此,找出简明实用的法则来判别一个有理系数多项式是否不可约,便很有意义.这方面的结果有:

(Ⅰ) *Eisenstein* 判别法及其推广:

定理 1.2.8′ (*Eisenstein* 判别法)

设

$$f(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$$

是整系数多项式,$a_n \neq 0$,如果存在素数 p,使得

(*i*) $p \nmid a_n$;

(*ii*) $p \mid a_i (i = 0,1,2,\cdots,n-1)$;

(*iii*) $p^2 \nmid a_0$;

则 $f(x)$ 在有理数域上不可约.

证明:参见《高等代数》教材,此处略.