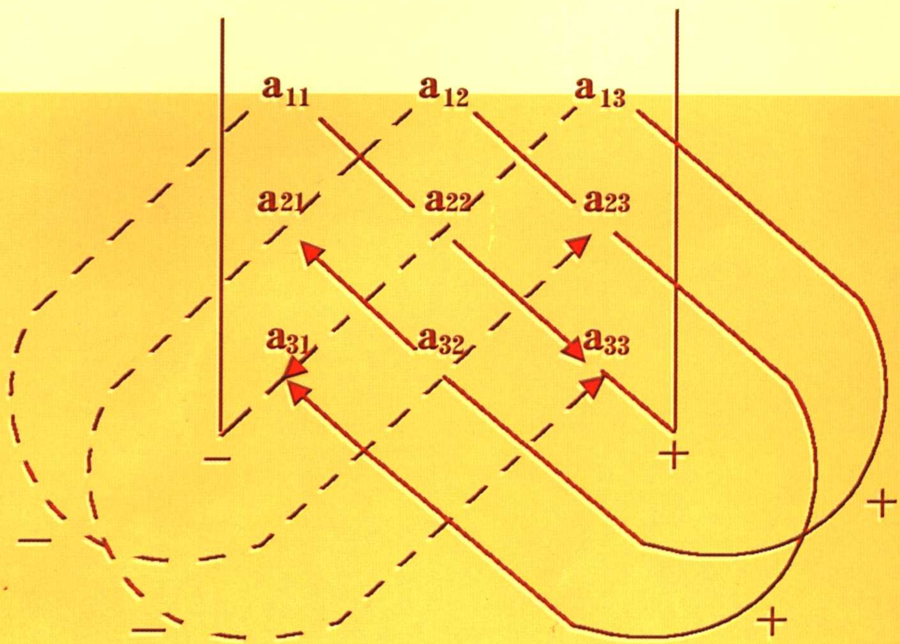
面向21世纪课程教材

XIANXING DAISHU

线性代数

◇万金凤 王虹 编著



知识产权出版社

线性代数

万金凤　王　虹　编著

知识产权出版社

图书在版编目(CIP)数据

线性代数/万金凤,王虹编著．—北京:知识产权出版社,2006.2
ISBN 7-80198-165-0

Ⅰ.线…　Ⅱ.①万…　②王…　Ⅲ.线性代数－高等学校－教材
Ⅳ.0151.2

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2006)第 003746 号

内 容 简 介

线性代数是大学基础数学中一门主要的理论课程。本书是根据教育部颁布的高等学校工科数学课程教学基本要求编写而成的。全书共分六章,内容包括:行列式、矩阵、向量组与线性方程组、线性变换、矩阵的对角化及二次型等。每节后配有丰富的习题,书后附有习题参考答案。本书可作为大学非数学专业线性代数的教材,也可供成人教育的广大师生选用。

线性代数
万金凤　王　虹　编著
责任编辑:段红梅　蔡　虹　　责任校对:韩秀天
装帧设计:段维东　　责任出版:杨宝林
知识产权出版社出版、发行
地址:北京市海淀区马甸南村 1 号
通信地址:北京市海淀区蓟门桥西土城路 6 号　邮编:100088
http://www.cnipr.com　电子邮箱:BJB@cnipr.com
(010)82000893　(010)82000860 转 8101
北京白帆印务有限公司印刷
2006 年 2 月第 1 版　2006 年 2 月第 1 次印刷
开本:720mm×960mm　1/16　印张:15.5　字数:320 千字
ISBN 7-80198-165-0/G·210
定价:28.00 元
如有印装质量问题,本社负责调换。

前　言

线性代数是高等学校理工科学生的一门重要的数学基础课，对培养学生的计算能力，抽象思维能力和逻辑推理能力都起着十分重要的作用．本书是编者在进行多年教学实践和改革探索的基础上，根据教育部颁布的高等学校工科数学课程教学基本要求编定而成的．

全书共分六章．第一章主要介绍行列式的基本概念、性质及行列式的计算，包括用行列式解线性方程组的 *Cramer* 法则；第二章介绍矩阵的运算、初等变换及矩阵的秩等概念以及有关的性质；第三章讨论了 n 维向量的线性关系，介绍了向量组的秩的概念，并在此基础上讨论了线性方程组的解法及解的结构；第四章介绍了线性空间、欧氏空间和线性变换的概念及有关的性质；第五章介绍了矩阵的特征值和特征向量的概念，并讨论了矩阵对角化的问题；第六章介绍了二次型的概念和化二次型为标准形的方法，并讨论了正定二次型的相关性质．每节配有典型的例题和丰富的习题，便于学生巩固所学的内容．书后附有习题参考答案，便于学生对照检查．

本书以线性方程组为主线，以矩阵为工具，使线性代数的基本概念、基本理论和基本方法的叙述深入浅出、清晰、准确．本书内容丰富，通俗易懂，重点突出，注重解题方法的归纳和总结，注重对学生分析问题和解决问题能力的培养．

本书可作为大学非数学专业线性代数课程的教材，也可供成人教育的广大师生选用，不同的专业或读者，可对本书的内容进行适当的取舍，建议课内学时 54 学时左右．

本书在编者充分讨论的基础上进行了分工：第一章～第三章由万金凤编写，第四章～第六章由王虹编写，然后对书稿进行交叉审订．由于编者水平有限，疏漏与不当之处在所难免，恳请读者批评指正．

编者

2006 年 1 月

目　　录

第一章　行列式

行列式理论是由研究多元一次方程组(线性方程组)的解法而产生的,现在它不仅是解线性方程组的工具,也是线性代数以及其他数学分支和物理学中常用的工具.

本章先从消元法解二元、三元线性方程组引入二阶、三阶行列式,再将它推广到 n 阶行列式,进而介绍行列式的基本性质和计算方法,最后给出用行列式解线性方程组的克莱姆(*Cramer*)法则.

1.1　n 阶行列式

1.1.1　二阶和三阶行列式

在初等代数中,二阶行列式的概念是从二元线性方程组的求解中提出来的.例如,在求解二元线性方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 = b_1, ① \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 = b_2. ② \end{cases} \tag{1.1.1}$$

时,用加减消元法解这个方程组

①$\times a_{22}$ − ②$\times a_{12}$,得

$(a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21})x_1 = b_1a_{22} - a_{12}b_2$.　　③

②$\times a_{11}$ − ①$\times a_{21}$,得

$(a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21})x_2 = a_{11}b_2 - b_1a_{21}$.　　④

当 $a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} \neq 0$ 时,由③和④就得到方程组(1.1.1)的解

$$x_1 = \frac{b_1a_{22} - a_{12}b_2}{a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}}, \quad x_2 = \frac{a_{11}b_2 - b_1a_{21}}{a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}}. \tag{1.1.2}$$

为了便于记忆这个公式,引入了记号

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}. \tag{1.1.3}$$

(1.1.3)式的左端称为**二阶行列式**.行列式中横排称为**行**,竖排称为**列**.其中 a_{ij} 称为行列式的**元素**, a_{ij} 的两个下标表示该元素在行列式中的位置,第一个下标 i 表示它位于自上而下的第 i 行,称为**行标**;第二个下标 j 表示它位于从左到右的第 j 列,称为**列标**. a_{ij} 是位于行列式第 i 行与第 j 列的交点处的元素,简称 a_{ij} 为行列式的**(i,j)元素**.

利用二阶行列式,(1.1.2)式可以表示为

$$x_1 = \frac{\begin{vmatrix} b_1 & a_{12} \\ b_2 & a_{22} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}}, \quad x_2 = \frac{\begin{vmatrix} a_{11} & b_1 \\ a_{21} & b_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}},$$

其中 x_1, x_2 的分母均是由方程组(1.1.1)中未知量的系数按原来的位置排列成的行列式,称为方程组(1.1.1)的**系数行列式**. x_1, x_2 的分子则分别是将系数行列式的第一列和第二列换成方程组(1.1.1)右端的常数列所得到的行列式.若记

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}, \quad D_1 = \begin{vmatrix} b_1 & a_{12} \\ b_2 & a_{22} \end{vmatrix}, \quad D_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & b_1 \\ a_{21} & b_2 \end{vmatrix}.$$

则当 $D \neq 0$ 时,方程组(1.1.1)有惟一解

$$x_1 = \frac{D_1}{D}, \quad x_2 = \frac{D_2}{D}.$$

(1.1.3)式的右端又称为**行列式的展开式**,二阶行列式的展开式可以用所谓**对角线法**则得到,即

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21},$$

其中,实线称为行列式的**主对角线**,虚线称为行列式的**次对角线**,主对角线上两个元素的乘积带正号,次对角线上两个元素的乘积带负号,所得两项的代数和就是二阶行列式的展开式.

例 1.1.1 解线性方程组

$$\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 = 4, \\ x_1 - 2x_2 = 3. \end{cases}$$

解 因为方程组的系数行列式

$$D = \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} = 2 \times (-2) - 3 \times 1 = -7 \neq 0,$$

所以方程组有惟一解.又因为

$$D_1 = \begin{vmatrix} 4 & 3 \\ 3 & -2 \end{vmatrix} = -17, \quad D_2 = \begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} = 2,$$

所以方程组的解为

$$x_1 = \frac{D_1}{D} = \frac{17}{7}, x_2 = \frac{D_2}{D} = -\frac{2}{7}.$$

同理,在求解三元线性方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 = b_2, \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 = b_3. \end{cases} \tag{1.1.4}$$

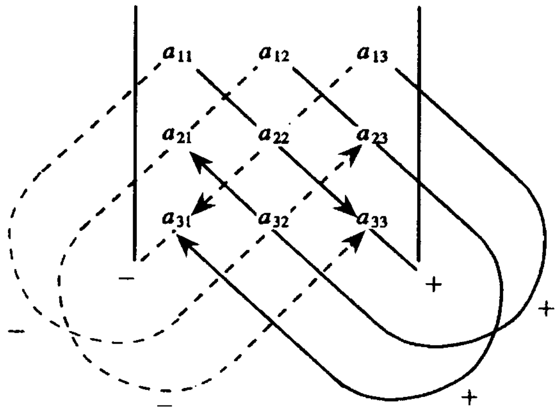
时，可引入三阶行列式.一般三阶行列式记作

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

其展开式为

$$a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{11}a_{23}a_{32}.$$

三阶行列式的展开式也可以用对角线法则得到，其对角线法则如下图所示：



其中沿主对角线方向的每条实线上三个元素的乘积带正号，沿次对角线方向的每条虚线上三个元素的乘积带负号，所得六项的代数和就是三阶行列式的展开式.

对于方程组(1.1.4)，若分别记三阶行列式

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}, \qquad D_1 = \begin{vmatrix} b_1 & a_{12} & a_{13} \\ b_2 & a_{22} & a_{23} \\ b_3 & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix},$$

$$D_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & b_1 & a_{13} \\ a_{21} & b_2 & a_{23} \\ a_{31} & b_3 & a_{33} \end{vmatrix}, \qquad D_3 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & b_2 \\ a_{31} & a_{32} & b_3 \end{vmatrix}.$$

如果方程组(1.1.4)的系数行列式 $D \neq 0$，那么方程组有惟一解，其解同样可简洁地表示为

$$x_1 = \frac{D_1}{D}, \quad x_2 = \frac{D_2}{D}, \quad x_3 = \frac{D_3}{D}.$$

在方程组(1.1.4)的解的表达式中，$x_i\,(i = 1,2,3)$的分母均是(1.1.4)的系数行列式 D，x_i 的分子是把系数行列式 D 的第 i 列换成方程组(1.1.4)中的常数列，其余列

不动所得到的行列式 $D_i(i=1,2,3)$.

例 1.1.2 解线性方程组

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 - x_3 = 1, \\ x_1 + 2x_2 + x_3 = 2, \\ x_1 + x_2 + 2x_3 = 3. \end{cases}$$

解 因为系数行列式

$$D = \begin{vmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{vmatrix} = 6 \neq 0,$$

所以方程组有惟一解.又因为

$$D_1 = \begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 2 & 2 & 1 \\ 3 & 1 & 2 \end{vmatrix} = 6, \quad D_2 = \begin{vmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & 2 \end{vmatrix} = 0, \quad D_3 = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & 3 \end{vmatrix} = 6,$$

所以

$$x_1 = \frac{D_1}{D} = 1, \quad x_2 = \frac{D_2}{D} = 0, \quad x_3 = \frac{D_3}{D} = 1.$$

显然,对于未知量个数等于方程个数的二、三元线性方程组,当它们的系数行列式不等于零时,利用行列式这一工具求解十分简便,结果也容易记忆.我们自然会联想到,对于未知量个数等于方程个数的 n 元($n>3$)线性方程组,是否也有类似的结果?这就需要引入 n 阶($n>3$)行列式的概念.

1.1.2 排列及其逆序数

在 n 阶行列式的定义中,要用到排列的某些知识,所以先介绍排列的一些基本性质.

把 n 个不同的元素按一定的顺序排成一行($n \geqslant 2$),称为这 n 个元素的一个排列.为了方便起见,这里只用到了前 n 个自然数 $1,2,\cdots,n$ 的排列.

定义 1.1.1 由 $1,2,\cdots,n$ 组成的一个有序数组称为一个 **n 阶排列**.

常用 $i_1 i_2 \cdots i_n$ 表示一个 n 阶排列,其中 i_k 表示 $1,2,\cdots,n$ 中的某个数,k 表示这个数在 n 阶排列中的位置.共有 $n!$ 个不同的 n 阶排列.

例如,3241 是一个 4 阶排列,53421 是一个 5 阶排列.

定义 1.1.2 在一个 n 阶排列 $i_1 i_2 \cdots i_n$ 中任取两个不同的数,记作 (i_j, i_k),其中 $j<k$,称为排列中的一个**数对**.若 $i_j < i_k$,则称 (i_j, i_k) 为排列的一个**顺序**,若 $i_j > i_k$,则称 (i_j, i_k) 为排列的一个**逆序**.排列中逆序的个数称为这个排列的**逆序数**,排列 $i_1 i_2 \cdots i_n$ 的逆序数记作

$$\tau(i_1 i_2 \cdots i_n).$$

定义 1.1.3 逆序数为偶数的排列称为**偶排列**,逆序数为奇数的排列称为**奇排**

列.

例 1.1.3 试求 $\tau(35421)$, $\tau(53421)$,并确定排列的奇偶性.

解 在排列 35421 中构成逆序的数对为(3,2),(3,1),(5,4),(5,2),(5,1),(4,2),(4,1),(2,1),所以 $\tau(35421)=8$,35421 是一个偶排列.

在排列 53421 中构成逆序的数对为(5,3),(5,4),(5,2),(5,1),(3,2),(3,1),(4,2),(4,1),(2,1),所以 $\tau(53421)=9$,53421 是一个奇排列.

例 1.1.4 试求 $\tau(123\cdots n)$, $\tau(n(n-1)\cdots 21)$.

解 显然在排列 $123\cdots n$ 中没有逆序,所以 $\tau(123\cdots n)=0$,这是一个偶排列,它具有自然顺序,所以常称其为 n 阶**自然排列**或**标准排列**.

在排列 $n(n-1)\cdots 21$ 中,任何一个数对都是逆序,所以

$$\tau(n(n-1)\cdots 21)=\frac{n(n-1)}{2}.$$

其奇偶性与 n 的取值有关,即当 $n=4k$,或 $n=4k+1$(k 为非负整数)时,这个排列是偶排列,当 $n=4k+2$,或 $n=4k+3$ 时,这个排列是奇排列.

在一个排列中,交换其中某两个数的位置,而其余数的位置保持不动,就得到另一个排列.这样一个变换称为一个**对换**.比如,例 1.1.3 中的两个排列就可以相互由对方经过一个对换得到,它们的奇偶性正好相反.一般我们有以下结论.

定理 1.1.1 一次对换改变排列的奇偶性.

这就是说,经过一次对换,奇排列变成偶排列,偶排列变成奇排列.

证 先考虑相邻两数的对换.设

$$a_1a_2\cdots a_lijb_1b_2\cdots b_m$$

为一个 n 阶排列,对换 i 与 j 得到 n 阶排列

$$a_1a_2\cdots a_ljib_1b_2\cdots b_m.$$

在这两个 n 阶排列中,除了(i,j)这一数对外,其他各数对在两个排列中是否构成逆序的情况完全相同,因此,若 $i>j$,则有

$$\tau(a_1a_2\cdots a_lijb_1b_2\cdots b_m)=\tau(a_1a_2\cdots a_ljib_1b_2\cdots b_m)+1,$$

而当 $i<j$ 时,则有

$$\tau(a_1a_2\cdots a_lijb_1b_2\cdots b_m)=\tau(a_1a_2\cdots a_ljib_1b_2\cdots b_m)-1.$$

所以排列 $a_1a_2\cdots a_lijb_1b_2\cdots b_m$ 和排列 $a_1a_2\cdots a_ljib_1b_2\cdots b_m$ 的奇偶性不同.

再考虑不相邻两数的对换.在一般情况下,设

$$a_1a_2\cdots a_lik_1k_2\cdots k_sjb_1b_2\cdots b_m$$

为一个 n 阶排列,在 i 与 j 之间有 s 个数($s\geqslant 1$),对换 i 与 j 后得到 n 阶排列

$$a_1a_2\cdots a_ljk_1k_2\cdots k_sib_1b_2\cdots b_m.$$

不难看出,这样一个对换可以通过一系列的相邻两数的对换来实现.先把 i 依次与右边相邻数对换,得到排列

$$a_1a_2\cdots a_lk_1k_2\cdots k_sjib_1b_2\cdots b_m,$$

再将 j 依次与左边相邻数对换,得到排列

$$a_1a_2\cdots a_ljk_1k_2\cdots k_sib_1b_2\cdots b_m.$$

其间共进行了 $2s+1$ 次相邻两数的对换,即排列 $a_1a_2\cdots a_ljk_1k_2\cdots k_sib_1b_2\cdots b_m$ 是由排列 $a_1a_2\cdots a_lik_1k_2\cdots k_sjb_1b_2\cdots b_m$ 经过 $2s+1$ 次相邻两数的对换得到的,而 $2s+1$ 是奇数,相邻两数的对换改变排列的奇偶性,所以它们的奇偶性不同.

推论 在 $n!$ $(n\geqslant 2)$个不同的 n 阶排列中,奇偶排列各占一半.

证 设有 p 个奇排列,q 个偶排列.把每个奇排列最左边的两个数对换,由定理 1.1.1 可知,p 个奇排列都变成了偶排列,于是 $p\leqslant q$.对每个偶排列作最左边两数的对换,同理可得 $q\leqslant p$,所以有 $p=q$.

定理 1.1.2 任意一个 n 阶排列与排列 $12\cdots n$ 都可以经过一系列对换互变,并且所作对换的个数与这个排列有相同的奇偶性.

证 我们对排列的阶数 n 作数学归纳法,来证明任意一个 n 阶排列都可以经过一系列对换变成自然排列 $12\cdots n$.

1 阶排列只有一个数,结论显然成立.

假设结论对 $n-1$ 阶排列已经成立.现在来证对 n 阶排列的情形结论也成立.

设 $i_1i_2\cdots i_n$ 是一个 n 阶排列,如果 $i_n=n$,那么根据归纳法假设,$n-1$ 阶排列 $i_1i_2\cdots i_{n-1}$可以经过一系列对换变成 $12\cdots(n-1)$,于是这一系列对换也就把 $i_1i_2\cdots i_n$ 变成了 $12\cdots n$.如果 $i_n\neq n$,那么对 $i_1i_2\cdots i_n$ 作 i_n,n 对换,它就变成 $i_1'i_2'\cdots i'_{n-1}n$,这就归结成上面的情形,因此结论普遍成立.

相仿地,$12\cdots n$ 也可以经过一系列对换变成 $i_1i_2\cdots i_n$.因为 $12\cdots n$ 是偶排列,所以根据定理 1.1.1,所作对换的个数与排列 $i_1i_2\cdots i_n$ 有相同的奇偶性.

1.1.3 n 阶行列式

有了排列的逆序数和奇偶性的概念,我们可以将行列式的概念推广到 n 阶的情形.在给出 n 阶行列式的定义之前,先观察三阶行列式的展开式

$$a_{11}a_{22}a_{33}+a_{12}a_{23}a_{31}+a_{13}a_{21}a_{32}-a_{13}a_{22}a_{31}-a_{12}a_{21}a_{33}-a_{11}a_{23}a_{32}.$$

由三阶行列式的展开式,我们发现有以下特点:

1)三阶行列式是 3! 项的代数和;

2)每一项都是取自行列式中不同行不同列的三个元素的乘积;

3)每项有确定的符号.各项的符号是:当这一项中元素的行标按自然数顺序排列后,如果对应的列标构成的排列是偶排列则取正号,是奇排列则取负号.因此,一般项可以写成

$$(-1)^{\tau(j_1j_2j_3)}a_{1j_1}a_{2j_2}a_{3j_3}.$$

这样,利用求和号 $\sum$ 及排列的逆序数,三阶行列式可以表示为

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \sum_{j_1j_2j_3} (-1)^{\tau(j_1j_2j_3)} a_{1j_1} a_{2j_2} a_{3j_3},$$

其中 $\sum\limits_{j_1j_2j_3}$ 表示对所有的三阶排列求和.类似地,二阶行列式可以写成

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = \sum_{j_1j_2} (-1)^{\tau(j_1j_2)} a_{1j_1} a_{2j_2},$$

其中 $\sum\limits_{j_1j_2}$ 是对所有的二阶排列求和.

根据这个规律,可以给出 n 阶行列式的定义.

定义 1.1.4 用 n^2 个元素 $a_{ij}(i,j=1,2,\cdots,n)$排成 n 行 n 列组成的记号

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

称为 ***n* 阶行列式**.其值为所有不同行不同列的 n 个元素的乘积 $a_{1j_1}a_{2j_2}\cdots a_{nj_n}$,并冠以符号$(-1)^{\tau(j_1j_2\cdots j_n)}$的代数和,即

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \sum_{j_1j_2\cdots j_n} (-1)^{\tau(j_1j_2\cdots j_n)} a_{1j_1} a_{2j_2} \cdots a_{nj_n},$$

其中 $\sum\limits_{j_1j_2\cdots j_n}$ 表示对 $1,2,\cdots,n$ 这 n 个数的所有 n 阶排列求和. n 阶行列式常简记为 $\det(a_{ij})$或$|a_{ij}|_n$.

当 $n=1$ 时,我们规定一阶行列式$|a_{11}|=a_{11}$.注意不要与数的绝对值相混淆.

n 阶行列式的展开式共有 $n!$ 项,由定理 1.1.1 的推论知,其中带正号和带负号的项各占一半.当 $n>3$ 时,由定义 1.1.4 可知,行列式不能由对角线法则得到展开式.

例 1.1.5 计算行列式

$$\begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 \\ 4 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}.$$

解 这是一个四阶行列式,在展开式中应该有 $4!=24$ 项.但是由于行列式中出现很多零,所以不等于零的项就大大减少了.展开式中项的一般形式是

$$a_{1j_1}a_{2j_2}a_{3j_3}a_{4j_4}.$$

显然,如果 $j_1\neq 4$,那么 $a_{1j_1}=0$,从而这一项就等于零.因此只须考虑 $j_1=4$ 的那些项;同理,只需考虑 $j_2=3,j_3=2,j_4=1$ 这些列标的项.这就是说,行列式中不为零的项只有 $a_{14}a_{23}a_{32}a_{41}$这一项,而 $\tau(4321)=6$,这一项应带正号.所以

$$\begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 \\ 4 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} = 1\times 2\times 3\times 4 = 24.$$

例 1.1.6 计算行列式

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

解 在这个行列式中,当 $i>j$ 时,有 $a_{ij}=0$,这种行列式称为**上三角形行列式**,简称**上三角行列式**.由 n 阶行列式的定义知

$$D = \sum_{j_1j_2\cdots j_n}(-1)^{\tau(j_1j_2\cdots j_n)}a_{1j_1}a_{2j_2}\cdots a_{nj_n}.$$

因为行列式中出现的零元素很多,所以我们只须考虑展开式中不为零的项有哪些.在行列式中第 n 行的元素除去 a_{nn}以外全为零,因此,只要考虑 $j_n=n$ 的那些项;在第 $n-1$ 行中,除去 $a_{n-1,n-1},a_{n-1,n}$以外,其余的元素全为零,因此 j_{n-1}只有 $n-1,n$ 这两个可能,由于 $j_n=n$,所以 $j_{n-1}\neq n$,从而 $j_{n-1}=n-1$.这样逐步推上去,不难看出,在展开式中,除去

$$a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}$$

这一项外,其余的项全为零,而这一项的列标所成的排列是自然排列 $12\cdots n$,为偶排列,所以这一项带正号,于是

$$D = a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}.$$

此例说明,上三角形行列式等于其主对角线上的 n 个元素的乘积.

如果在 n 阶行列式 $D=det(a_{ij})$中,当 $i<j$ 时,$a_{ij}=0$ 或 $i\neq j$ 时,$a_{ij}=0$,则分别称 D 为**下三角形行列式**或**对角形行列式**.由行列式的定义及例 1.1.6 的讨论可知,它们也等于主对角线上 n 个元素的乘积,即

$$\begin{vmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}\cdots a_{nn},$$