

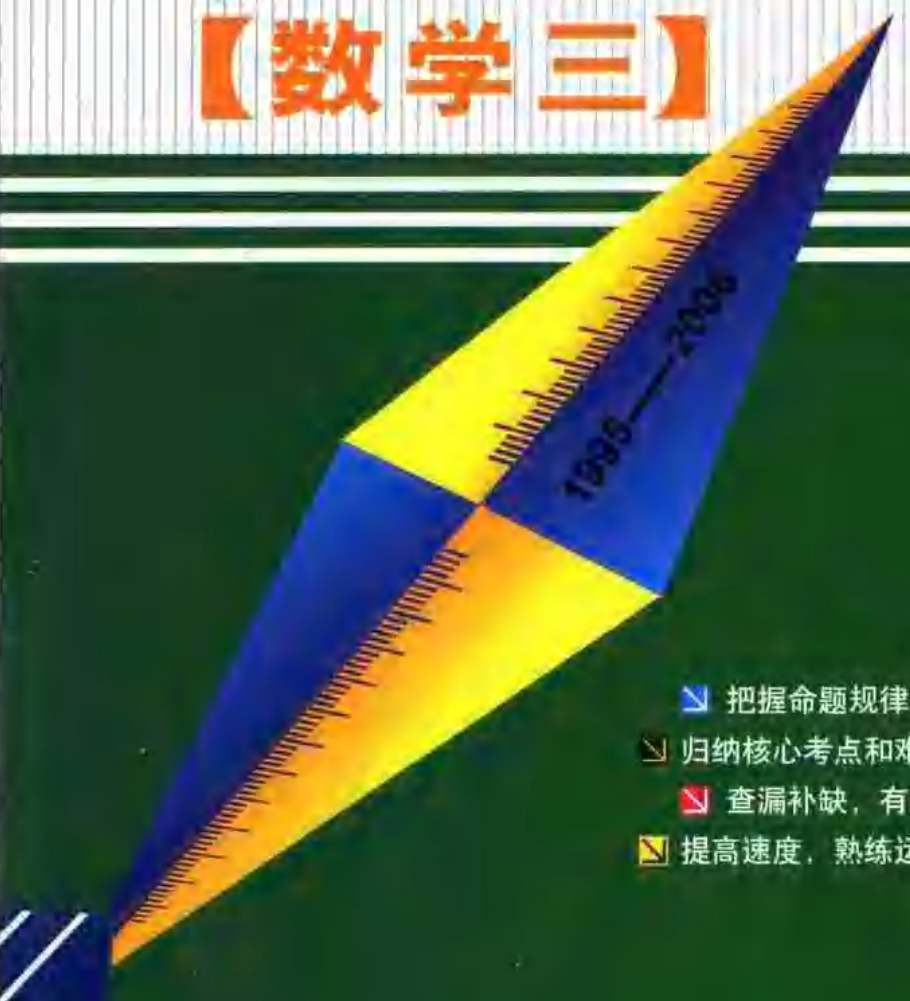
2007^年

考研数学 历年真题

【数学三】

详解

主 编：黄庆怀

- 
- ▣ 把握命题规律与趋势
 - ▣ 归纳核心考点和难点
 - ▣ 查漏补缺，有的放矢推进复习
 - ▣ 提高速度，熟练运用答题技巧

2007

考研数学 历年真题

【数学三】

详解

主 编：黄庆怀

编 者：葛余博（清华大学教授）

杨 鸿（北京理工大学教授）

图书在版编目(CIP)数据

考研数学历年真题详解·数学三 黄庆怀 主编. —北京: 中国社会科学出版社, 2005. 4

(考研数学历年真题详解)

ISBN 7-5087-0470-3

I. 考… II. 黄… III. 高等数学—研究生—入学考试—解题 IV. 013-44

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2005)第 028356 号

丛 书 名: 考研数学历年真题详解

书 名: 考研数学历年真题详解·数学三

主 编: 黄庆怀

责任编辑: 杨 晖 张国洪

出版发行: 中国社会科学出版社 邮政编码: 100032

通联发行: 北京市西城区二龙路甲 33 号新龙大厦

电话: 66016392 传真: 66016392

欢迎读者拨打免费热线 8008108114 或登录 www.bj114.com.cn 查询相关信息

经 销: 各地新华书店

印刷装订: 北京高岭印刷有限公司

开 本: 787×1092 毫米 1/16

印 张: 50.25

字 数: 842 千字

版 次: 2006 年 3 月第 2 版

印 次: 2006 年 3 月第 1 次印刷

书 号: ISBN 7-5087-0470-3/O · 10

定 价: 70.80 元(全四册)

前 言

在高等教育大众化的今天,考研热已逐步形成,众所周知,考研的难点在数学,数学是一道门槛。硕士研究生入学考试的数学试题题量适当,主客观性试题在试卷中占分比例为7:3,主观性试题包括计算题、证明题、综合题和应用题,客观性试题有填空题和选择题。纵观几年来的试卷,试题主要以考查数学的基本概念、基本方法和基本原理为主,在此基础上注重考查学生的抽象概括能力、逻辑思维能力、空间想象能力和综合运用所学知识分析和解决问题的能力;填空题是主要用于考查“三基”以及数学重要性质,以中等难度试题为主;选择题主要考查考生对数学概念、数学性质的理解并能进行简单推论、判定和比较;综合题考查的是知识点之间的有机结合,应用题一般结合与考生专业具有共性的相关背景知识。从而既有利于国家对高等层次人才的选拔,也利于促进高等学校各类数学课程教学质量的提高。

本套丛书共分四册,本册为《考研数学历年真题及详解·数学三》。丛书以教育部公布的最新考试大纲为基础,紧扣考试大纲,注重解题方法与技巧,并结合名校名师多年来对考研试题研究的经验和考研高分考生的心得精心编著而成。本册《考研数学历年真题及详解·数学三》收录了1995年~2006年12套全国硕士研究生入学考试数学三试题。这些试题凝聚了12年来参加命题的专家、教授的集体智慧,是一份十分宝贵的资料。这些试题既反映了《数学考试大纲》对考生数学知识、能力的测试要求,又充分体现了命题专家和教授们进行数学命题的基本指导思想和基本原则,而且还能全面地展现试卷的结构、题型的特点,使考生能及早地体会到考研数学试题的“形势”,以便尽早做出自己的复习计划。

本书在结构和试题编排上采纳了各名校专家、教授的意见,并通过高分考生的意见反馈对本书进行了如下编排:

1. 在第一部分,我们汇编了1995年~2006年的全部数学三试题。试题按照2005~1996的顺序编排,以便考生能尽快的了解最近几年的考研数学的试题结构、题型特点、试题难度及分值分配等。这样的顺序编排完全是为了让考生能在第一时间里了解考研数学的最新基本形势。

2. 在第二部分,我们对1995年~2006年的全部数学三试题根据《数学考试大纲(数学三)》的考查要求按照学科和知识点进行科学地编排,做到既能紧扣《数学考试大纲》,又能突出解题技巧;既能使各知识点层次清晰,又能使考生融会贯通,灵活运用。在试题分析、详解及评注上,我们把相同或相近的知识点摘录到一起进行解析,这样做便于考生进行比较分析,同时也给考生提供了一个重要信息,即:考生会发现相同或相近的知识点在相隔多年后会重新进行命题以及掌握考查的知识点和题型的变化情况,以增强考生对命题基本规律的感性认识。本部分对每道试题都做出了答案、分析、详解及评注,其中,答案部分用以检验考生的答题正确率;分析部分主要给考生以提示,即解题思路,使考生迅速联想相关知识点,寻找解题方法,以期加强考生的数学思维能力的培养,提高考生的破题能力;详解部分给出了本题的详细解答过

程及步骤,使考生除了正确解答此题之外,能规范自己的书写过程,在平时就达到实战效果;评注部分主要根据本题进行知识点的扩展,引导考生能够做到举一反三,触类旁通。

为了配合本书的使用,我们的建议如下:

(1) 注重基础知识

这几年考研数学试题的难度变化不大(但计算量比较大),基本题约占百分之七十,另外的百分之二十略有难度。这就要求考生对基本知识要掌握熟练,但仅仅是对本科教材掌握熟练还是不行的,这是因为考研题有自己的风格和出题思路,需要辅导教师有重点的辅导。

(2) 注重解题方法、技巧的训练

一方面由于考研出题的总的思路是数学知识的掌握及其运用能力,考题的计算量较大,同样一道题,解题方法不一样,花费的时间也不一样。

(3) 注重答题方式

平时训练应按考研评分标准解题,对不能给出解答的题尽量写出采分点。

(4) 注重合理分配答题时间

历年的考试中,都有很多学生并没有答完题。其实没做的题有些是非常简单的,有的学生甚至还没来得及看,这就要求考生平时在做3个小时的套题时,在不会做或较长时间没有做出正确结果的题上不要“恋战”,从大局出发,总体把握做题时间,对没有做好的题3小时以后再研究。

参与本书编辑和出版的工作人员在整个过程中时刻本着对广大考生负责的态度,高标准、严要求,但由于时间紧、任务重,加上我们水平有限,难免有不足和不尽人意之处。敬请广大考生与专家、同行不吝赐教和批评指正。

最后,预祝广大考生复习顺利,考研成功!

编 者

2006年3月

目 录

第一部分 微积分

第一章 函数、极限、连续	(2)
一、极限	(2)
二、连续	(7)
第二章 一元函数微分学	(10)
一、导数定义	(11)
二、导数与微分计算	(12)
三、曲线的切线斜率和切线方程	(15)
四、微分中值定理	(17)
五、函数形态	(22)
六、导数在经济分析中的应用	(26)
七、最值问题	(28)
第三章 一元函数积分学	(31)
一、不定积分的性质和计算	(31)
二、定积分的概念和性质	(34)
三、定积分计算	(34)
四、变限积分的计算	(36)
五、定积分的证明题	(40)
六、广义积分	(45)
七、定积分的应用	(47)
第四章 多元函数微积分学	(50)
一、带抽象函数记号的复合函数求偏导	(50)
二、多元隐函数求导	(53)
三、全微分计算	(55)
四、多元函数的极值与最值及在经济分析中的应用	(57)
四、二重积分的计算	(60)
第五章 无穷级数	(70)
一、常数项级数	(71)
二、幂级数的收敛半径和收敛域	(75)

三、级数求和	(77)
四、函数的幂级数展开	(84)
第六章 常微分方程	(85)
一、一阶微分方程	(85)
二、二阶常系数线性微分方程	(89)
三、差分方程	(90)
四、常微分方程的简单应用	(91)

第二部分 线性代数

第一章 行列式	(93)
第二章 矩 阵	(95)
一、矩阵计算	(95)
二、可逆矩阵	(96)
三、矩阵的秩	(100)
四、初等变换与初等矩阵	(103)
第三章 向 量	(105)
一、向量的线性表示	(105)
二、向量组的相关性	(108)
第四章 线性方程组	(114)
一、线性方程组解的结构和有解判定定理	(114)
二、齐次线性方程组	(117)
第五章 特征值与特征向量	(122)
一、特征值与特征向量的计算	(123)
二、相似矩阵	(124)
三、实对称矩阵的特征值和特征向量	(127)
第六章 二次型	(132)
一、二次型的标准形	(132)
二、正定二次型和正定矩阵	(136)
三、合同矩阵	(140)

第三部分 概率论与数理统计

第一章 随机事件和概率	(143)
一、事件的关系与运算	(144)
二、古典概型与几何概型	(144)
三、条件概率公式与乘法公式	(146)
四、全概率公式与贝叶斯公式	(146)

五、事件的独立性	(148)
六、独立重复试验(贝努利概型)	(149)
第二章 随机变量及其概率分布	(150)
一、分布函数的性质与计算	(150)
二、连续型随机变量的概率密度	(151)
三、随机变量函数的分布	(154)
第三章 随机变量的联合概率分布	(156)
一、二维离散型随机变量的概率分布	(156)
二、二维连续型随机变量的概率分布	(161)
三、二维随机变量函数的分布	(162)
第四章 随机变量的数字特征	(167)
一、一维随机变量的数字特征	(168)
二、一维随机变量函数的数字特征	(168)
三、二维随机变量函数的数学期望和方差	(169)
四、随机变量的独立性与相关性	(171)
五、数学期望与方差的应用	(174)
第五章 大数定律和中心极限定理	(176)
一、契比雪夫不等式	(176)
二、大数定律与中心极限定理	(177)
第六章 数理统计的基本概念	(179)
第七章 参数估计	(183)
一、矩估计、最大似然估计	(183)
二、估计量的概念及评价标准	(187)
三、区间估计	(190)
第八章 假设检验	(193)

历年数学三考研试题分析、详解及评注

第一部分 微积分

硕士研究生入学数学考试历来是考生头疼的问题,数学试卷具有内容多、知识面广、综合性和技巧性较强的特点.在这里,我们结合部分高分考生的复习经验,提出几点建议,供考生参考.

1. 制定周密的复习计划;
2. 吃透考试大纲;
3. 重视基础知识;
4. 认真分析每一道真题;
5. 练习计算能力;
6. 调整好心态.

下表是 1995—2006 年高等数学各章分值分布情况,望考生把握好重点.

1995—2006 年微积分各章分值分布

内 容 分 值 年 份	函数极限连续	一元函数微分学	一元函数积分学	多元函数微分学	二重积分	无穷级数	常微分方程	差分方程
1995		12	18	3	5	6	6	
1996		23	11	4	3	3	6	
1997	8	16	7	5	3	5	3	3
1998	6	15	5	5	5	6	5	3
1999	3	7	15	10	3	6		
2000	3	22	4	9	6		6	
2001	4	19	6	5	6		7	3
2002	6	16	8	7	3	7		3
2003	12	20		8	12	13	9	
2004	20	17	12	4	8	8	5	
2005	12	12	8	12	13	13	4	
2006	11	22	8	8	7	14	4	
合计	85	201	102	80	74	81	55	12

第一章 函数、极限、连续

函数是高等数学的主要研究对象,微积分主要就是讨论各类函数的各种性质.极限是一个重要的基本概念,它的思想和方法贯穿于微积分的始终.连续是一大类函数的重要特性,连续函数是微积分的重点研究对象.

本部分考研大纲的要求是:

- (1) 理解函数的概念,掌握函数的表示方法,并会建立简单应用问题中的函数关系式;
- (2) 了解函数的奇偶性、单调性、周期性和有界性;
- (3) 理解复合函数及分段函数的概念,了解反函数及隐函数的概念;
- (4) 掌握基本初等函数的性质及其图形,了解初等函数的概念;
- (5) 了解数列极限和函数极限(包括左极限和右极限)的概念;
- (6) 理解无穷小的概念和基本性质,掌握无穷小的比较方法,了解无穷大的概念及其与无穷小的关系;
- (7) 了解极限的性质与极限存在的两个准则,掌握极限的性质及四则运算法则,会应用两个重要极限;
- (8) 理解函数连续性的概念(含左连续与右连续),会判断函数间断点的类型;
- (9) 了解连续函数的性质和初等函数的连续性,了解闭区间上连续函数的性质(有界性,最大值和最小值定理、介值定理)及其简单应用.

一、极限

1. (00, 选(1)题, 3分) 设对任意的 x , 总有 $\varphi(x) \leq f(x) \leq g(x)$, 且 $\lim_{x \rightarrow \infty} [g(x) - \varphi(x)] = 0$, 则 $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x)$

- (A) 存在且等于零.
(C) 一定不存在.

- (B) 存在但不一定为零.
(D) 不一定存在.

[]

【答】 应选(D).

【分析】 本题考查极限存在的夹逼定理.

【详解】 若令 $\varphi(x) = 1 - e^{-|x|}$, $g(x) = 1 + e^{-|x|}$, $f(x) = 1$, 则有 $\varphi(x) \leq f(x) \leq g(x)$, 且 $\lim_{x \rightarrow \infty} [g(x) - \varphi(x)] = 0$, $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = 1$,

可排除(A)、(C)两个选项.

又如 $\varphi(x) = e^x - e^{-|x|}$, $g(x) = e^{-|x|} + e^x$, $f(x) = e^x$, 显然 $\varphi(x), g(x), f(x)$ 满足题设条件, 但 $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x)$ 不存在, 因此(B)也可排除, 剩下(D)为正确选项.

【评注】 本题的典型错误是由 $\lim_{x \rightarrow \infty} [g(x) - \varphi(x)] = 0$, 推出 $\lim_{x \rightarrow \infty} g(x), \lim_{x \rightarrow \infty} \varphi(x)$ 存在且相等, 但该题的题设条件并不是夹逼定理的条件. 夹逼定理: 设在 x_0 的邻域内, 恒有 $\varphi(x) \leq f(x) \leq g(x)$, 且 $\lim_{x \rightarrow x_0} \varphi(x) = \lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = A$, 则 $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = A$.

2. (02, 填(1) 题, 3 分) 设常数 $a \neq \frac{1}{2}$, 则 $\lim_{n \rightarrow \infty} \ln \left[\frac{n - 2na + 1}{n(1 - 2a)} \right]^n = \frac{1}{1 - 2a}$.

【分析】 本题可直接应用重要极限 $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e$ 求解.

【详解】 因为

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left[\frac{n - 2na + 1}{n(1 - 2a)} \right]^n = \lim_{n \rightarrow \infty} \left[1 + \frac{1}{n(1 - 2a)} \right]^{n(1 - 2a) \cdot \frac{1}{1 - 2a}} = e^{\frac{1}{1 - 2a}},$$

所以

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \ln \left[\frac{n - 2na + 1}{n(1 - 2a)} \right]^n = \ln e^{\frac{1}{1 - 2a}} = \frac{1}{1 - 2a}.$$

【评注】 另外, 本题也可利用将求数列极限转化为求函数极限, 用无穷小代换 $\ln(1 + x) \sim x (x \rightarrow 0)$.

做此类题型, 需要记住两个重要极限: $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$; $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = e$. 对于“ 1^∞ ”型未定式通常的解法:

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x)^{g(x)} = \lim_{x \rightarrow 0} [1 + (f(x) - 1)]^{\frac{1}{f(x) - 1} \cdot (f(x) - 1) \cdot g(x)} = e^{\lim_{x \rightarrow 0} (f(x) - 1) \cdot g(x)}$$

3. (04, 填(1) 题, 4 分) 若 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{e^x - a} (\cos x - b) = 5$, 则 $a = 1$, $b = -4$.

【分析】 本题属于已知极限求参数的反问题, 需从极限式中找关系.

【详解】 因为 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{e^x - a} (\cos x - b) = 5$, 且 $\lim_{x \rightarrow 0} \sin x \cdot (\cos x - b) = 0$,

所以 $\lim_{x \rightarrow 0} (e^x - a) = 0$, 得 $a = 1$.

极限化为 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{e^x - 1} (\cos x - b) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{x - 1} (\cos x - b) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{x} (\cos x - b) = 1 - b = 5$,

得 $b = -4$. 因此, $a = 1, b = -4$.

【评注】 一般地, 已知 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{g(x)} = A$, 那么

(1) 若 $g(x) \rightarrow 0$, 则 $f(x) \rightarrow 0$;

(2) 若 $f(x) \rightarrow 0$, 且 $A \neq 0$, 则 $g(x) \rightarrow 0$.

若 $\frac{f(x)}{g(x)}$ 仅含一个参数, 则由(1)、(2)可求出; 若含两个参数 a 和 b , 则可将由(1)、(2)求出的 a 和 b 的关系代入极限式进一步求解.

4. (04, (15) 题, 8 分) 求 $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1}{\sin^2 x} - \frac{\cos^2 x}{x^2} \right)$.

【分析】 本题属于“ $\infty - \infty$ ”型未定式求极限的基本题型, 一般是先通分再利用等价无穷小替换和洛必达法则求解即可. 先通分化为 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 - \sin^2 x \cos^2 x}{x^2 \sin^2 x}$, 为“ $\frac{0}{0}$ ”型, 使用洛必达法则.

【详解】
$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1}{\sin^2 x} - \frac{\cos^2 x}{x^2} \right) &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 - \sin^2 x \cos^2 x}{x^2 \sin^2 x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 - \frac{1}{4} \sin^2 2x}{x^4} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2x - \frac{1}{2} \sin 4x}{4x^3} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos 4x}{6x^2} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{2} (4x)^2}{6x^2} = \frac{4}{3}.\end{aligned}$$

【评注】 使用洛必达法则计算时,应用等价无穷小代换可以简化计算.

熟记以下等价无穷小替换:

当 $x \rightarrow 0$ 时, $\sin x \sim x$, $\arcsin x \sim x$, $\tan x \sim x$, $\arctan x \sim x$, $\ln(1+x) \sim x$, $e^x - 1 \sim x$, $a^x - 1 \sim x \ln a$,
 $1 - \cos x \sim \frac{1}{2}x^2$, $(1+x)^{\frac{1}{n}} - 1 \sim \frac{1}{n}x$.

5. (05, 填(1)题, 4分) 极限 $\lim_{x \rightarrow \infty} x \sin \frac{2x}{x^2 + 1} = \underline{2}$.

【分析】 本题考查等价无穷小 $\sin x \sim x (x \rightarrow 0)$. 用换元法把求极限的式子化简, 然后将极限存在且非零的因子用四则运算法则分离出去, 得到两极限相乘的形式. 其中用了已知极限 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$.

【详解】 令 $y = \frac{2x}{x^2 + 1}$, 因 $\lim_{x \rightarrow \infty} y = 0$, 故

$$\begin{aligned}\text{原式} &= \lim_{x \rightarrow \infty} x \sin y = \lim_{x \rightarrow \infty} x y \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sin y}{y} \\ &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x^2}{x^2 + 1} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin y}{y} = 2 \cdot 1 = 2.\end{aligned}$$

【评注】 做此题时注意当 $\varphi(x) \rightarrow 0$ 时, $\sin \varphi(x) \sim \varphi(x)$.

6. (05, (15)题, 8分)(15) 求 $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{1+x}{1-e^{-x}} - \frac{1}{x} \right)$.

【分析】 本题属 $\infty - \infty$ 型, 先通分, 再求极限.

【详解】 利用洛必达法则可得 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1-e^{-x}}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{-x}}{1} = 1$, 于是又有 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{1-e^{-x}} = 1$.

$$\begin{aligned}\text{从而} \quad \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1+x}{1-e^{-x}} - \frac{1}{x} \right) &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x(1+x) - 1 + e^{-x}}{x(1-e^{-x})} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2}{x(1-e^{-x})} + \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x-1+e^{-x}}{x(1-e^{-x})} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{1-e^{-x}} + \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x-1+e^{-x}}{x^2} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{1-e^{-x}}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &= 1 + \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - 1 + e^{-x}}{x^2} = 1 + \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - e^{-x}}{2x} \\
 &= 1 + \frac{1}{2} = \frac{3}{2}.
 \end{aligned}$$

【评注】 利用洛必达法则求未定式的极限,其中“ $\frac{0}{0}$ ”、“ $\frac{\infty}{\infty}$ ”型未定式可直接用洛必达法则,即 $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f'(x)}{g'(x)}$;其他各种未定式必须化归这两种未定式之后才可用洛必达法则.

7. (06, (1) 题, 4 分) $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n+1}{n} \right)^{(-1)^n} = \underline{\hspace{2cm}}.$

【分析】 由于 $(-1)^n$ 处于指数位置,只能先分析 u_n 的取值,再计算极限.

【详解】 设 $u_n = \left(\frac{n+1}{n} \right)^{(-1)^n}$ ($n = 1, 2, \dots$),那么当 $n = 2k$ 时,有

$$u_n = \left(\frac{2k+1}{2k} \right)^1 = 1 + \frac{1}{2k} = 1 + \frac{1}{n};$$

当 $n = 2k - 1$ 时,有

$$u_n = \left(\frac{2k}{2k-1} \right)^{-1} = \frac{2k-1}{2k} = 1 - \frac{1}{2k} = 1 - \frac{1}{n+1}.$$

所以当 $n \rightarrow \infty$ 时,有

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n+1}{n} \right)^{(-1)^n} = \lim_{n \rightarrow \infty} u_n = 1.$$

【评注】 本题属于极限计算题,只能从数列极限概念入手,分析通项的取值,再计算极限.数列极限概念是本题的考点.

8. (06, (15) 题, 7 分) 设 $f(x, y) = \frac{y}{1+xy} - \frac{1-y\sin \frac{\pi x}{y}}{\arctan x}$, $x > 0$, $y > 0$. 求

$$(I) y(x) = \lim_{y \rightarrow +\infty} f(x, y);$$

$$(II) \lim_{x \rightarrow 0^+} y(x).$$

【分析】 虽然 $f(x, y)$ 是二元函数,但所求极限实为一元函数的极限.计算中注意使用洛必达法则.

【详解】 (I) 注意当 $y \rightarrow +\infty$ 时, x 不变,所以 $x > 0$ 时,

$$\begin{aligned}
 y(x) &= \lim_{y \rightarrow +\infty} f(x, y) \\
 &= \lim_{y \rightarrow +\infty} \left[\frac{y}{1+xy} - \frac{1-y\sin \frac{\pi x}{y}}{\arctan x} \right]
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \lim_{y \rightarrow +\infty} \frac{y}{1+xy} = \frac{1}{\arctan x} \lim_{y \rightarrow +\infty} \left(1 - \frac{\sin \frac{\pi x}{y}}{\frac{1}{y}} \right) \\
&= \frac{1}{x} - \frac{1}{\arctan x} (1 - \pi x)
\end{aligned}$$

(II) 由于

$$\begin{aligned}
\lim_{x \rightarrow 0^+} y(x) &= \lim_{x \rightarrow 0^+} \left[\frac{1}{x} - \frac{1 - \pi x}{\arctan x} \right] \\
&= \lim_{x \rightarrow 0^+} \left[\frac{1}{x} - \frac{1}{\arctan x} \right] + \pi \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x}{\arctan x} = I_1 + \pi I_2.
\end{aligned}$$

当 $x \rightarrow 0^+$ 时, $\arctan x \sim x$, 所以

$$I_2 = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{\arctan x} = 1.$$

而极限 I_1 是 $\infty - \infty$ 型未定式, 用洛必达法则计算, 于是

$$\begin{aligned}
I_1 &= \lim_{x \rightarrow 0^+} \left[\frac{1}{x} - \frac{1}{\arctan x} \right] \\
&= \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\arctan x - x}{x \cdot \arctan x} \\
&= \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\arctan x - x}{x^2} \\
&= \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\frac{1}{1+x^2} - 1}{2x} \\
&= \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{-x^2}{1+x^2} = 0
\end{aligned}$$

所以

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} y(x) = 0 + \pi \cdot 1 = \pi.$$

【评注】 本题实际上是带参数的一元函数求极限问题. 极限的四则运算法则、洛必达法则和等价无穷小是本题的知识点和考点.

小 结

1. 根据极限的定义证明某些极限.
2. 利用极限四则运算法则和一些初等方法, 如有理化、因式分解、同乘(除)一个因式等.
3. 利用重要极限 $\lim_{x \rightarrow \infty} (1 + \frac{1}{x})^x = e$, $\lim_{x \rightarrow 0} (1 + \frac{1}{x})^x = e$, $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$.
4. 根据“单调有界数列必有极限”的准则, 证明数列极限存在, 再求极限.
5. 利用夹逼定理.

6. 利用泰勒展开式.
7. 等价无穷小代换.
8. 洛必达法则.
9. 利用定积分概念,把某些和式极限转化为求函数在闭区间上的定积分.
10. 利用函数的连续性和导数定义.

二、连续

1. (98, 选(2) 题, 3 分) 设函数 $f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1+x}{1+x^{2n}}$, 讨论函数 $f(x)$ 的间断点, 其结论为

- (A) 不存在间断点. (B) 存在间断点 $x = 1$.
(C) 存在间断点 $x = 0$. (D) 存在间断点 $x = -1$.

【 】

【答】 应选(B).

【分析】 本题的关键是求极限得 $f(x)$ 的分段函数表达式, 然后再找 $f(x)$ 的间断点.

【详解】 由于

$$f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1+x}{1+x^{2n}} = \begin{cases} 0, & x > 1, \\ 1, & x = 1, \\ 1+x, & -1 < x < 1, \\ 0, & x \leq -1. \end{cases}$$

可见, $x = 1$ 为 $f(x)$ 的间断点.

【评注】 函数 $f(x)$ 为极限函数, 为讨论 $f(x)$ 连续性, 应先求出极限, 得到仅用 x 表示的函数, 一般为分段函数, 要确定间断点, 无定义的点必为间断点, 分段函数的分界点可能为间断点.

2. (03, 填(1) 题, 4 分) 设 $f(x)$ 为不恒等于零的奇函数, 且 $f'(0)$ 存在, 则函数 $g(x) = \frac{f(x)}{x}$

- (A) 在 $x = 0$ 处左极限不存在 (B) 有跳跃间断点 $x = 0$.
(C) 在 $x = 0$ 处右极限不存在 (D) 有可去间断点 $x = 0$.

【 】

【答】 应选(D).

【分析】 由题设, 可推出 $f(0) = 0$, 再利用在点 $x = 0$ 处的导数定义进行讨论即可.

【详解】 显然 $x = 0$ 为 $g(x)$ 的间断点, 且由 $f(x)$ 为不恒等于零的奇函数知 $f(0) = 0$.

于是有 $\lim_{x \rightarrow 0} g(x) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = f'(0)$ 存在, 故 $x = 0$ 为函数 $g(x)$ 的可去间断点.

【评注】 ①反例排除法是解决选择题的首选方法, 简便快捷. 本题亦可采用此方法. 若 $f(x)$ 为奇函数, 则 $f(-x) = -f(x)$, 从而 $f(x) = 0$. 然后再利用在点 $x = 0$ 处的导数定义进行讨论即可. 例如 $f(x) = x$, 则 $g(x) = \frac{x}{x} = \begin{cases} 1, x \neq 0 \\ 0, x = 0 \end{cases}$, 从而排除 (A), (B), (C) 三项.

②若 $f(x)$ 在 $x = x_0$ 处连续, 则 $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{x - x_0} = A \Leftrightarrow f(x_0) = 0, f'(x_0) = A$.

3. (03, 三题, 8 分) 设 $f(x) = \frac{1}{\pi x} + \frac{1}{\sin \pi x} - \frac{1}{\pi(1-x)}, x \in [\frac{1}{2}, 1)$, 试补充定义 $f(1)$ 使得 $f(x)$ 在 $[\frac{1}{2}, 1]$ 上连续.

【分析】 只须求出极限 $\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x)$, 然后定义 $f(1)$ 为此极限值即可.

【详解】 因为

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 1^-} \left[\frac{1}{\pi x} + \frac{1}{\sin \pi x} - \frac{1}{\pi(1-x)} \right] \\ &= \frac{1}{\pi} + \frac{1}{\pi} \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{\pi(1-x) - \sin \pi x}{(1-x) \sin \pi x} \\ &= \frac{1}{\pi} + \frac{1}{\pi} \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{-\pi - \pi \cos \pi x}{-\sin \pi x + (1-x) \pi \cos \pi x} \\ &= \frac{1}{\pi} + \frac{1}{\pi} \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{\pi^2 \sin \pi x}{-2\pi \cos \pi x - (1-x) \pi^2 \sin \pi x} \\ &= \frac{1}{\pi}, \end{aligned}$$

由于 $f(x)$ 在 $[\frac{1}{2}, 1]$ 上连续, 因此定义 $f(1) = \frac{1}{\pi}$, 则 $f(x)$ 在 $[\frac{1}{2}, 1]$ 上连续.

【评注】 常用的等价形式有

$$\text{当 } x \rightarrow 0 \text{ 时, } \sin x \sim x, \arcsin x \sim x, \tan x \sim x, \arctan x \sim x, \ln(1+x) \sim x, (e^x - 1) \sim x, (1 - \cos x) \sim \frac{1}{2}x^2, [(1+x)^{\frac{1}{n}} - 1] \sim \frac{1}{n}x.$$

当利用上述等价形式时, 应注意条件 $x \rightarrow 0, \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\sin x}{x} = 1$, 而 $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sin x}{x} = 0$, 因为无穷小量乘以有界变量仍为无穷小量. 这是无穷小量的性质.

4. (04, 选(7)题, 4 分) 函数 $f(x) = \frac{|x| \sin(x-2)}{x(x-1)(x-2)^2}$ 在下列哪个区间内有界.

(A) $(-1, 0)$ (B) $(0, 1)$ (C) $(1, 2)$ (D) $(2, 3)$

【 1]

【答】 应选 (A).

【分析】 如 $f(x)$ 在 (a, b) 内连续, 且极限 $\lim_{x \rightarrow a^+} f(x)$ 与 $\lim_{x \rightarrow b^-} f(x)$ 存在, 则函数 $f(x)$ 在 (a, b) 内有界.

【详解】 当 $x \neq 0, 1, 2$ 时, $f(x)$ 连续, 而

$$\lim_{x \rightarrow -1^+} f(x) = -\frac{\sin 3}{18}, \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = -\frac{\sin 2}{4},$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \frac{\sin 2}{4}, \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \infty, \lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = \infty,$$

所以, 函数 $f(x)$ 在 $(-1, 0)$ 内有界, 故选 (A).

【评注】 一般地, 如函数 $f(x)$ 在闭区间 $[a, b]$ 上连续, 则 $f(x)$ 在闭区间 $[a, b]$ 上有界; 如函数 $f(x)$ 在开区间 (a, b) 内连续, 且极限 $\lim_{x \rightarrow a^+} f(x)$ 与 $\lim_{x \rightarrow b^-} f(x)$ 存在, 则函数 $f(x)$ 在开区间 (a, b) 内有界.

5. (04, 选(8)题, 4分) 设 $f(x)$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 内有定义, 且 $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = a, g(x) =$

$$\begin{cases} f(\frac{1}{x}), & x \neq 0, \\ 0, & x = 0 \end{cases}, \text{ 则}$$

(A) $x = 0$ 必是 $g(x)$ 的第一类间断点.

(B) $x = 0$ 必是 $g(x)$ 的第二类间断点.

(C) $x = 0$ 必是 $g(x)$ 的连续点.

(D) $g(x)$ 在点 $x = 0$ 处的连续性与 a 的取值有关.

【 1]

【答】 应选(D).

【分析】 本题主要考查极限 $\lim_{x \rightarrow 0} g(x)$ 是否存在, 如存在, 是否等于 $g(0)$ 即可, 通过换元 $u = \frac{1}{x}$, 可将极限 $\lim_{x \rightarrow 0} g(x)$ 转化为 $\lim_{u \rightarrow \infty} f(u)$.

【详解】 因为 $\lim_{x \rightarrow 0} g(x) = \lim_{x \rightarrow 0} f(\frac{1}{x}) = \lim_{u \rightarrow \infty} f(u) = a$ (令 $u = \frac{1}{x}$), 又 $g(0) = 0$,

所以, 当 $a = 0$ 时, $\lim_{x \rightarrow 0} g(x) = g(0)$, 即 $g(x)$ 在点 $x = 0$ 处连续,

当 $a \neq 0$ 时, $\lim_{x \rightarrow 0} g(x) \neq g(0)$, 即 $x = 0$ 是 $g(x)$ 的第一类间断点,

因此, $g(x)$ 在点 $x = 0$ 处的连续性与 a 的取值有关, 故选(D).

【评注】 本题属基本题型, 考查了分段函数在分界点处的连续性, 其中, 间断点的类型:

第 I 类间断点 $\xrightarrow{\Delta} f_-(x_0), f_+(x_0)$ 均存在:

$\begin{cases} \text{若 } f_-(x_0) = f_+(x_0) \neq f(x_0), x = x_0 \text{ 为可去间断点;} \\ f_-(x_0) \neq f_+(x_0), x = x_0 \text{ 为跳跃间断点.} \end{cases}$

第 II 类间断点 $\xrightarrow{\Delta} f_-(x_0), f_+(x_0)$ 至少有一个不存在.

若 $f_-(x_0), f_+(x_0)$ 中有一为 ∞ , 则 $x = x_0$ 为无穷间断点.

6. (04, 选(11)题, 4分) 设 $f'(x)$ 在 $[a, b]$ 上连续, 且 $f'(a) > 0, f'(b) < 0$, 则下列结论中