高等学校教材

微分几何

（第三版）

梅向明　黄敬之　编

高等教育出版社
HIGHER EDUCATION PRESS

内容提要

本书是在《微分几何》(第二版，梅向明、黄敬之编)的基础上修订而成的，这次再版主要是删除了原教材的第一章中的向量代数部分和第二章中的平面曲线部分；同时在第四章增添了完备曲面一节，其目的是使读者阅读了这些以后思维领域能够从紧致扩充到完备。本书最后添加了名词索引。

本书可供高等师范院校数学系用作教材。

图书在版编目(CIP)数据

微分几何/梅向明，黄敬之编. —3版. —北京：高等教育出版社，2003.12（2005重印）

ISBN 7-04-012945-0

Ⅰ.微… Ⅱ.①梅… ②黄… Ⅲ.微分几何-师范大学-教材 Ⅳ.O186.1

中国版本图书馆CIP数据核字(2003)第087028号

出版发行	高等教育出版社	购书热线	010-58581118
社　　址	北京市西城区德外大街4号	免费咨询	800-810-0598
邮政编码	100011	网　　址	http://www.hep.edu.cn http://www.hep.com.cn
总　　机	010-58581000	网上订购	http://www.landraco.com http://www.landraco.com.cn
经　　销	北京蓝色畅想图书发行有限公司		
印　　刷	高等教育出版社印刷厂		
开　　本	850×1168　1/32	版　　次	1981年7月第1版 2003年12月第3版
印　　张	10.875	印　　次	2005年4月第4次印刷
字　　数	270 000	定　　价	16.50元

物料号　12945-00

第三版序言

这本《微分几何》教材自从1981年出版、1988年再版以来，一直被许多高等学校的数学专业采用，看来它的内容基本上能够符合时代发展的要求。1999年，这本教材的第二版还获得了北京市科技进步奖的二等奖。这一次再版，砍掉了一些内容，主要是原教材的第一章中的向量代数部分和第二章中的平面曲线部分，因为这些内容可以在解析几何和微积分的教材中找到。砍掉这些内容的原意是，在整体微分几何部分增添一些近代微分几何的内容。但是由于这本书是大学本科的专业课教材，并不是给研究生用的教材，不能添加过深的内容，最后决定只是在第四章增加了一节：完备曲面，其目的是使读者阅读了这些内容以后思维领域能够从**紧致**扩充到**完备**，这也是目前近代微分几何研究的重点之一。对于这个问题，在这本教材中开了一个头，使读者学习了近代微分几何这些内容以后在脑子里经常思索这样一个问题：如何把微分几何中对**紧致**情形成立的一些成果推广到**完备**的情形。

在这一版的最后，添加了名词索引。名词后的数码表示第几章第几节。

梅向明　黄敬之

2003年1月于首都师范大学

第二版序言

在这一版中,我们增加了第四章:整体微分几何初步。原来我校所用的"微分几何"讲义中曾包括这部分内容,后来根据高等师范学校"微分几何"教学大纲的要求,删掉了这一章。但是根据许多兄弟院校使用这本教材的教师和学生所提出的要求,我们又重新把这一章列入,作为微分几何选修课或进一步自学的内容。我们曾在选修课中多次讲授了这一章。本版中这一章的内容是根据北京师范学院数学系的王汇淳同志试用的情况以及其他兄弟院校的同志试用后所提出的意见多次修改而成的。

教材第一版的原来部分没有改动,只是作了一些文字上的修改,并根据读者的要求,在前三章中增加了一些习题。

本书的责任编辑张爱和同志提出了不少好的修改意见,我们谨在此表示衷心的感谢。

梅向明　黄敬之

1986 年 8 月于北京师范学院数学系

第一版前言

这本教材是我们多年来讲授微分几何课所用的讲义，根据高等师范院校微分几何教学大纲的要求，整理修改而成。其中第一、二章曾在 1966 年前反复讲授多遍，第三章只在近年来才讲过。

微分几何是一门历史悠久的学科。可以这样说，微积分诞生时就同时诞生了微分几何，不过这门学科的生命力至今还很旺盛。近年来它对数学中其他分支的影响越来越深刻，对于自然科学中其他学科的影响的范围也越来越扩大。与此同时，这门学科本身从内容上到方法上也在不断更新。作为一本教科书应该尽可能地反映这样一种发展趋势。但是由于高等师范院校数学专业教学计划中所给予微分几何这门课的课时的限制，不可能完全满足这样的要求。我们的想法是，从内容上来说还是讲授微分几何中最基础的部分——三维欧氏空间中的曲线和曲面的局部理论，可是从方法上来说则加以更新。这样做将使学生能够从较浅显的内容去学习近代的处理方法，对新方法接受起来阻力比较小一些；另一方面，对于微分几何有兴趣的学生，在掌握了新方法以后，就可以通过选修课或讨论班进一步运用这些方法去学习微分几何的近代内容。

在这本教材里作为新的方法来说，我们的目的是介绍法国数学家嘉当(E. Cartan)的活动标架法，同时介绍相应的数学工具——外微分形式。不过为了使学生容易接受，开始时我们还是用向量分析的方法讲授三维欧氏空间的曲线和曲面的局部理论，到了曲面论的基本定理和曲面上的内蕴几何部分，由于用向量符号表达起来不方便，我们采用了张量符号，使学生稍稍接触一些张量分析的方法。最后，我们在第三章里用嘉当的活动标架法把曲线

论和曲面论又复习一遍,使学生既学习了新方法,同时又加深对已学过的知识的理解。

杭州大学的白正国教授和北京师范大学的朱鼎勋教授在审查这本教材时提出了不少宝贵的意见,我们谨在此表示衷心的感谢。同时希望使用这本教材的兄弟院校的同志对教材中的错误缺点和不足之处给予批评指正。

梅向明　黄敬之

1981 年 4 月于北京师范学院数学系

目　　录

第一章　曲线论 …… 1
§1　向量函数 …… 1
1.1　向量函数的极限 …… 1
1.2　向量函数的连续性 …… 4
1.3　向量函数的微商 …… 5
1.4　向量函数的泰勒(Taylor)公式 …… 7
1.5　向量函数的积分 …… 8
§2　曲线的概念 …… 13
2.1　曲线的概念 …… 13
2.2　光滑曲线　曲线的正常点 …… 16
2.3　曲线的切线和法面 …… 18
2.4　曲线的弧长　自然参数 …… 22
§3　空间曲线 …… 29
3.1　空间曲线的密切平面 …… 29
3.2　空间曲线的基本三棱形 …… 32
3.3　空间曲线的曲率、挠率和伏雷内(Frenet)公式 …… 36
3.4　空间曲线在一点邻近的结构 …… 44
3.5　空间曲线论的基本定理 …… 47
3.6　一般螺线 …… 51
第二章　曲面论 …… 56
§1　曲面的概念 …… 56
1.1　简单曲面及其参数表示 …… 56
1.2　光滑曲面　曲面的切平面和法线 …… 59
1.3　曲面上的曲线族和曲线网 …… 65
§2　曲面的第一基本形式 …… 68
2.1　曲面的第一基本形式　曲面上曲线的弧长 …… 68

2.2 曲面上两方向的交角 …… 71
2.3 正交曲线族和正交轨线 …… 72
2.4 曲面域的面积 …… 73
2.5 等距变换 …… 75
2.6 保角变换 …… 78
§3 曲面的第二基本形式 …… 81
3.1 曲面的第二基本形式 …… 81
3.2 曲面上曲线的曲率 …… 87
3.3 杜邦(Dupin)指标线 …… 91
3.4 曲面的渐近方向和共轭方向 …… 93
3.5 曲面的主方向和曲率线 …… 95
3.6 曲面的主曲率、高斯(Gauss)曲率和平均曲率 …… 99
3.7 曲面在一点邻近的结构 …… 105
3.8 高斯曲率的几何意义 …… 109
§4 直纹面和可展曲面 …… 115
4.1 直纹面 …… 115
4.2 可展曲面 …… 120
§5 曲面论的基本定理 …… 130
5.1 曲面的基本方程和克里斯托费尔(Christoffel)符号 …… 131
5.2 曲面的黎曼(Riemann)曲率张量和高斯－科达齐－迈因纳尔迪 (Gauss-Codazzi-Mainardi) 公式 …… 134
5.3 曲面论的基本定理 …… 139
§6 曲面上的测地线 …… 145
6.1 曲面上曲线的测地曲率 …… 145
6.2 曲面上的测地线 …… 148
6.3 曲面上的半测地坐标网 …… 151
6.4 曲面上测地线的短程性 …… 154
6.5 高斯－波涅(Gauss-Bonnet)公式 …… 157
6.6 曲面上向量的平行移动 …… 160
6.7 *极小曲面 …… 166
§7 常高斯曲率的曲面 …… 171

7.1 常高斯曲率的曲面 …… 171
7.2 伪球面 …… 173
7.3 罗氏几何 …… 178
第三章 外微分形式和活动标架 …… 183
§1 外微分形式 …… 183
1.1 格拉斯曼(Grassmann)代数 …… 183
1.2 外微分形式 …… 188
1.3 弗罗贝尼乌斯(Frobenius)定理 …… 198
§2 活动标架 …… 213
2.1 合同变换群 …… 213
2.2 活动标架 …… 215
2.3 活动标架法 …… 225
§3 用活动标架法研究曲面 …… 227
3.1 曲面论的基本定理 …… 227
3.2 曲面的第一和第二基本形式 …… 229
3.3 曲面上的曲线 法曲率 测地曲率和测地挠率 …… 230
3.4 曲面的主曲率 欧拉公式 高斯曲率和平均曲率 …… 233
3.5 曲面上向量的平行移动 …… 234
3.6 闭曲面的高斯-波涅公式 …… 237
第四章 整体微分几何初步 …… 242
§1 平面曲线的整体性质 …… 242
1.1 旋转数 …… 243
1.2 凸曲线 …… 250
1.3 等周不等式 …… 255
1.4 四顶点定理 …… 258
1.5 等宽曲线 …… 260
1.6 平面上的 Crofton 公式 …… 262
§2 空间曲线的整体性质 …… 267
2.1 Fenchel 定理 …… 267
2.2 球面上的 Crofton 公式 …… 274
2.3 Fary-Milnor 定理 …… 277
2.4 闭曲线的全挠率 …… 281

§3　曲面的整体性质 …… 285
3.1　曲面的整体定义 …… 285
3.2　曲面的一般性质 …… 290
3.3　卵形面 …… 294
3.4　完备曲面 …… 313
§4　紧致曲面的高斯－波涅公式和欧拉示性数 …… 322
4.1　紧致曲面的三角剖分 …… 322
4.2　紧致曲面的欧拉示性数 …… 324
4.3　紧致定向曲面的亏格(gerus) …… 324
4.4　紧致曲面的高斯－波涅公式 …… 326
4.5　紧致曲面上的向量场 …… 327
名词索引 …… 333

第一章　曲　线　论

§1　向量函数

在本书的学习中，要广泛地应用向量分析的知识，因此在这里对向量分析的基本内容作简单扼要的介绍.

首先介绍向量函数的概念.

给出一点集 G，如果对于 G 中每一个点 x，有一个确定的向量 $\boldsymbol{r}$ 和它对应，则我们说，在 G 上给定了一个向量函数，记作

$$\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}(x), x \in G.$$

例如，设 G 是实数轴上一区间 $t_0 \leqslant t \leqslant t_1$，则得一元向量函数

$$\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}(t).$$

设 G 是一平面域，$(u, v) \in G$，则得二元向量函数

$$\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}(u, v).$$

设 G 是空间中一区域，$(x, y, z) \in G$，则得三元向量函数

$$\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}(x, y, z).$$

正如数学分析中对实函数所讨论的那样，我们也对向量函数引进极限、连续、微商和积分等概念.

1.1　向量函数的极限

设 $\boldsymbol{r}(t)$ 是所给的一元向量函数，$\boldsymbol{a}$ 是常向量（即长度与方向都固定的向量），如果对任意给定的 $\varepsilon > 0$，都存在数 $\delta > 0$，使得当 $0 < |t - t_0| < \delta$ 时

$$|\boldsymbol{r}(t) - \boldsymbol{a}| < \varepsilon$$

成立，则我们说，当 $t \to t_0$ 时，向量函数 $\boldsymbol{r}(t)$ 趋于极限 $\boldsymbol{a}$. 记作

$$\lim_{t\to t_0}\boldsymbol{r}(t) = \boldsymbol{a}. \tag{1.1}$$

有关数量函数的极限性质,都可以推广到向量函数的情况,从而得到类似的命题.

命题 1 如果 $\boldsymbol{r}(t)$和 $\boldsymbol{s}(t)$是两个一元向量函数,$\lambda(t)$是一个实函数,并且当 $t\to t_0$ 时这些函数的值趋向极限

$$\boldsymbol{r}(t)\to\boldsymbol{a},\boldsymbol{s}(t)\to\boldsymbol{b},\lambda(t)\to m,$$

即$|\boldsymbol{r}(t)-\boldsymbol{a}|\to 0$,$|\boldsymbol{s}(t)-\boldsymbol{b}|\to 0$,$|\lambda(t)-m|\to 0$,则有

(1) 两个向量函数之和(差)的极限等于极限之和(差):

$$\boldsymbol{r}(t)\pm\boldsymbol{s}(t)\longrightarrow\boldsymbol{a}\pm\boldsymbol{b}.$$

(2) 乘积 $\lambda(t)\boldsymbol{r}(t)$(数量乘向量)的极限等于极限的乘积:

$$\lambda(t)\boldsymbol{r}(t)\longrightarrow m\boldsymbol{a}.$$

(3) 数量积 $\boldsymbol{r}(t)\cdot\boldsymbol{s}(t)$的极限等于极限的数量积:

$$\boldsymbol{r}(t)\cdot\boldsymbol{s}(t)\longrightarrow\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}.$$

(4) 向量积 $\boldsymbol{r}(t)\times\boldsymbol{s}(t)$的极限等于极限的向量积:

$$\boldsymbol{r}(t)\times\boldsymbol{s}(t)\longrightarrow\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}.$$

证明 这些命题的证明原则上和数学分析中关于实函数所对应的命题的证明没有什么区别.

(1)
$$\begin{aligned}&|(\boldsymbol{r}(t)\pm\boldsymbol{s}(t))-(\boldsymbol{a}\pm\boldsymbol{b})|\\ =&|(\boldsymbol{r}(t)-\boldsymbol{a})\pm(\boldsymbol{s}(t)-\boldsymbol{b})|\\ \leqslant&|\boldsymbol{r}(t)-\boldsymbol{a}|+|\boldsymbol{s}(t)-\boldsymbol{b}|,\end{aligned}$$

当 $t\to t_0$ 时,由已知条件$|\boldsymbol{r}(t)-\boldsymbol{a}|\to 0$,$|\boldsymbol{s}(t)-\boldsymbol{b}|\to 0$,有

$$|(\boldsymbol{r}(t)\pm\boldsymbol{s}(t))-(\boldsymbol{a}\pm\boldsymbol{b})|\longrightarrow 0,$$

即
$$\boldsymbol{r}(t)\pm\boldsymbol{s}(t)\longrightarrow\boldsymbol{a}\pm\boldsymbol{b}.$$

(2) 作出向量的差

$$\lambda(t)\boldsymbol{r}(t)-m\boldsymbol{a}=\lambda(t)(\boldsymbol{r}(t)-\boldsymbol{a})+(\lambda(t)-m)\boldsymbol{a},$$

由此得出

$$|\lambda(t)\boldsymbol{r}(t)-m\boldsymbol{a}|\leqslant|\lambda(t)||\boldsymbol{r}(t)-\boldsymbol{a}|+|\lambda(t)-m||\boldsymbol{a}|,$$

当 $t\to t_0$ 时,由已知条件$|\boldsymbol{r}(t)-\boldsymbol{a}|\to 0$,$|\lambda(t)-m|\to 0$ 及

$$|\lambda(t)| \to |m|, |\boldsymbol{a}| \text{是常数},$$

有

$$|\lambda(t)\boldsymbol{r}(t) - m\boldsymbol{a}| \to 0,$$

即

$$\lambda(t)\boldsymbol{r}(t) \longrightarrow m\boldsymbol{a}.$$

(3) 作出数量差

$$\boldsymbol{r}(t)\cdot\boldsymbol{s}(t) - \boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b} = (\boldsymbol{r}(t) - \boldsymbol{a})\cdot\boldsymbol{s}(t) + (\boldsymbol{s}(t) - \boldsymbol{b})\cdot\boldsymbol{a},$$

由此得出

$$\begin{aligned}|\boldsymbol{r}(t)\cdot\boldsymbol{s}(t) - \boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}| \leqslant &|(\boldsymbol{r}(t) - \boldsymbol{a})\cdot\boldsymbol{s}(t)| + \\ &|(\boldsymbol{s}(t) - \boldsymbol{b})\cdot\boldsymbol{a}|.\end{aligned} \tag{1.2}$$

因为任何两个向量 $\boldsymbol{p}$、$\boldsymbol{q}$ 的数量积 $\boldsymbol{p}\cdot\boldsymbol{q} = |\boldsymbol{p}||\boldsymbol{q}|\cos(\widehat{\boldsymbol{pq}})$,所以

$$|\boldsymbol{p}\cdot\boldsymbol{q}| \leqslant |\boldsymbol{p}||\boldsymbol{q}|.$$

因此,如果 $\boldsymbol{p}$ 趋于零(即 $|\boldsymbol{p}| \to 0$),而 $\boldsymbol{q}$ 趋于确定的极限 $\boldsymbol{q}_0$(此时有 $|\boldsymbol{q}| \to |\boldsymbol{q}_0|$),那么不等式的右边趋向于零. 这时有

$$|\boldsymbol{p}\cdot\boldsymbol{q}| \longrightarrow 0.$$

因而当 $t \to t_0$ 时,我们由已知条件

$$|\boldsymbol{r}(t) - \boldsymbol{a}| \longrightarrow 0, |\boldsymbol{s}(t)| \longrightarrow |\boldsymbol{b}|,$$

知不等式(1.2)右边第一项有

$$|(\boldsymbol{r}(t) - \boldsymbol{a})\cdot\boldsymbol{s}(t)| \longrightarrow 0,$$

同理

$$|(\boldsymbol{s}(t) - \boldsymbol{b})\cdot\boldsymbol{a}| \longrightarrow 0.$$

于是得到

$$|\boldsymbol{r}(t)\cdot\boldsymbol{s}(t) - \boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}| \longrightarrow 0,$$

即

$$\boldsymbol{r}(t)\cdot\boldsymbol{s}(t) \longrightarrow \boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}.$$

(4) 作出向量的差

$$\begin{aligned}\boldsymbol{r}(t)\times\boldsymbol{s}(t) - \boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b} = &(\boldsymbol{r}(t) - \boldsymbol{a})\times\boldsymbol{s}(t) + \\ &\boldsymbol{a}\times(\boldsymbol{s}(t) - \boldsymbol{b}),\end{aligned}$$

由此得出

$$|\boldsymbol{r}(t)\times\boldsymbol{s}(t)-\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}|\leqslant|(\boldsymbol{r}(t)-\boldsymbol{a})\times\boldsymbol{s}(t)|+|\boldsymbol{a}\times(\boldsymbol{s}(t)-\boldsymbol{b})|. \tag{1.3}$$

因为两个向量 $\boldsymbol{p}$ 和 $\boldsymbol{q}$ 的向量积的模 $|\boldsymbol{p}\times\boldsymbol{q}|=|\boldsymbol{p}||\boldsymbol{q}|\cdot|\sin(\widehat{\boldsymbol{pq}})|$，所以 $|\boldsymbol{p}\times\boldsymbol{q}|\leqslant|\boldsymbol{p}||\boldsymbol{q}|$. 因此，如果 $|\boldsymbol{p}|\to 0$，而 $|\boldsymbol{q}|$ 趋于确定的极限，则 $|\boldsymbol{p}\times\boldsymbol{q}|\to 0$.

把这个结论应用到不等式(1.3)的右边，便有当 $t\to t_0$ 时，由已知条件可得到

$$|\boldsymbol{r}(t)\times\boldsymbol{s}(t)-\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}|\to 0,$$

即

$$\boldsymbol{r}(t)\times\boldsymbol{s}(t)\longrightarrow\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}.$$

1.2 向量函数的连续性

有了向量函数的极限概念，我们就可以引进向量函数的连续性概念. 给出一元向量函数 $\boldsymbol{r}(t)$，当 $t\to t_0$ 时，若向量函数 $\boldsymbol{r}(t)\to\boldsymbol{r}(t_0)$，则称向量函数 $\boldsymbol{r}(t)$ 在 t_0 点是**连续的**.

利用极限的定义，我们把向量函数 $\boldsymbol{r}(t)$ 在 t_0 连续的定义可表示为

$$\lim_{t\to t_0}\boldsymbol{r}(t)=\boldsymbol{r}(t_0).$$

如果 $\boldsymbol{r}(t)$ 在区间 $t_1\leqslant t\leqslant t_2$ 的每一点都连续，则称 $\boldsymbol{r}(t)$ **在区间 $t_1\leqslant t\leqslant t_2$ 上是连续**[①]**的**.

利用命题 1 的结果，我们可以得到：

命题 2 如果 $\boldsymbol{r}(t)$ 和 $\boldsymbol{s}(t)$ 是在点 t_0 连续的向量函数，而 $\lambda(t)$ 是在点 t_0 连续的实函数，则向量函数 $\boldsymbol{r}(t)\pm\boldsymbol{s}(t)$，$\lambda(t)\boldsymbol{r}(t)$，$\boldsymbol{r}(t)\times\boldsymbol{s}(t)$ 和实函数 $\boldsymbol{r}(t)\cdot\boldsymbol{s}(t)$ 也都在点 t_0 连续（把命题

---

① 在端点 $t=t_1$ 和 $t=t_2$ 处指的是右连续和左连续.

中的点 t_0 改为区间 $t_1 \leqslant t \leqslant t_2$ 时,命题也成立).

1.3 向量函数的微商

设 $\boldsymbol{r}(t)$是定义在区间 $t_1 \leqslant t \leqslant t_2$ 上的一个向量函数. 设 $t_0 \in (t_1, t_2)$,如果极限

$$\lim_{\Delta t \to 0} \frac{\boldsymbol{r}(t_0 + \Delta t) - \boldsymbol{r}(t_0)}{\Delta t}$$

存在,则称 $\boldsymbol{r}(t)$在 t_0 点是可微分的,这个极限称为 $\boldsymbol{r}(t)$在 t_0 点的**微商**(或**导矢**),用$\left(\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t}\right)_{t_0}$ 或 $\boldsymbol{r}'(t_0)$表示,即

$$\left(\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t}\right)_{t_0} = \boldsymbol{r}'(t_0) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\boldsymbol{r}(t_0 + \Delta t) - \boldsymbol{r}(t_0)}{\Delta t}.$$

如果 $\boldsymbol{r}(t)$在某个开区间的每一点都有微商存在,则我们说 $\boldsymbol{r}(t)$在**此区间内是可微的**或简称**向量函数** $\boldsymbol{r}(t)$**是可微的**,它的微商记为 $\boldsymbol{r}'(t)$.

对于向量函数的微分法有以下命题:

命题 3 设 $\boldsymbol{r}(t), \boldsymbol{s}(t), \boldsymbol{u}(t)$分别是可微的向量函数,$\lambda(t)$是可微的实函数,则 $\lambda(t)\boldsymbol{r}(t), \boldsymbol{r}(t) \pm \boldsymbol{s}(t), \boldsymbol{r}(t) \times \boldsymbol{s}(t), \boldsymbol{r}(t) \cdot \boldsymbol{s}(t), (\boldsymbol{r}(t), \boldsymbol{s}(t), \boldsymbol{u}(t))$都是可微的,并且

$$(\lambda \boldsymbol{r})' = \lambda \boldsymbol{r}' + \lambda' \boldsymbol{r},$$

$$(\boldsymbol{r} \pm \boldsymbol{s})' = \boldsymbol{r}' \pm \boldsymbol{s}',$$

$$(\boldsymbol{r} \times \boldsymbol{s})' = \boldsymbol{r}' \times \boldsymbol{s} + \boldsymbol{r} \times \boldsymbol{s}',$$

$$(\boldsymbol{r} \cdot \boldsymbol{s})' = \boldsymbol{r}' \cdot \boldsymbol{s} + \boldsymbol{r} \cdot \boldsymbol{s}',$$

$$(\boldsymbol{r}, \boldsymbol{s}, \boldsymbol{u})' = (\boldsymbol{r}', \boldsymbol{s}, \boldsymbol{u}) + (\boldsymbol{r}, \boldsymbol{s}', \boldsymbol{u}) + (\boldsymbol{r}, \boldsymbol{s}, \boldsymbol{u}').$$

这些公式的证明和数学分析中实函数的对应公式的证明相似,但是应该注意的是向量的向量积和混合积跟向量的次序有关,不能把次序任意交换. 作为例子,我们证明后面三个结果.

$$(\boldsymbol{r} \times \boldsymbol{s})' = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\boldsymbol{r}(t + \Delta t) \times \boldsymbol{s}(t + \Delta t) - \boldsymbol{r}(t) \times \boldsymbol{s}(t)}{\Delta t}$$

$$
\begin{aligned}
&= \lim_{\Delta t\to 0}\left\{\frac{[\boldsymbol{r}(t+\Delta t)-\boldsymbol{r}(t)]\times \boldsymbol{s}(t+\Delta t)}{\Delta t}+\right.\\
&\quad\left.\frac{\boldsymbol{r}(t)\times[\boldsymbol{s}(t+\Delta t)-\boldsymbol{s}(t)]}{\Delta t}\right\}\\
&= \lim_{\Delta t\to 0}\frac{\boldsymbol{r}(t+\Delta t)-\boldsymbol{r}(t)}{\Delta t}\times\lim_{\Delta t\to 0}\boldsymbol{s}(t+\Delta t)+\\
&\quad\lim_{\Delta t\to 0}\boldsymbol{r}(t)\times\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\boldsymbol{s}(t+\Delta t)-\boldsymbol{s}(t)}{\Delta t}\\
&= \boldsymbol{r}'(t)\times\boldsymbol{s}(t)+\boldsymbol{r}(t)\times\boldsymbol{s}'(t).
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
(\boldsymbol{r}\cdot\boldsymbol{s})' &= \lim_{\Delta t\to 0}\frac{\boldsymbol{r}(t+\Delta t)\cdot\boldsymbol{s}(t+\Delta t)-\boldsymbol{r}(t)\cdot\boldsymbol{s}(t)}{\Delta t}\\
&= \lim_{\Delta t\to 0}\left\{\frac{[\boldsymbol{r}(t+\Delta t)-\boldsymbol{r}(t)]\cdot\boldsymbol{s}(t+\Delta t)}{\Delta t}+\right.\\
&\quad\left.\frac{\boldsymbol{r}(t)\cdot[\boldsymbol{s}(t+\Delta t)-\boldsymbol{s}(t)]}{\Delta t}\right\}\\
&= \lim_{\Delta t\to 0}\frac{\boldsymbol{r}(t+\Delta t)-\boldsymbol{r}(t)}{\Delta t}\cdot\lim_{\Delta t\to 0}\boldsymbol{s}(t+\Delta t)+\\
&\quad\lim_{\Delta t\to 0}\boldsymbol{r}(t)\cdot\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\boldsymbol{s}(t+\Delta t)-\boldsymbol{s}(t)}{\Delta t}\\
&= \boldsymbol{r}'(t)\cdot\boldsymbol{s}(t)+\boldsymbol{r}(t)\cdot\boldsymbol{s}'(t).
\end{aligned}
$$

由上面的结果可以得到

$$
\begin{aligned}
(\boldsymbol{r},\boldsymbol{s},\boldsymbol{u})' &= [(\boldsymbol{r}\times\boldsymbol{s})\cdot\boldsymbol{u}]'\\
&= (\boldsymbol{r}\times\boldsymbol{s})'\cdot\boldsymbol{u}+(\boldsymbol{r}\times\boldsymbol{s})\cdot\boldsymbol{u}'\\
&= [\boldsymbol{r}'\times\boldsymbol{s}+\boldsymbol{r}\times\boldsymbol{s}']\cdot\boldsymbol{u}+(\boldsymbol{r}\times\boldsymbol{s})\cdot\boldsymbol{u}'\\
&= (\boldsymbol{r}'\times\boldsymbol{s})\cdot\boldsymbol{u}+(\boldsymbol{r}\times\boldsymbol{s}')\cdot\boldsymbol{u}+(\boldsymbol{r}\times\boldsymbol{s})\boldsymbol{u}'\\
&= (\boldsymbol{r}',\boldsymbol{s},\boldsymbol{u})+(\boldsymbol{r},\boldsymbol{s}',\boldsymbol{u})+(\boldsymbol{r},\boldsymbol{s},\boldsymbol{u}').
\end{aligned}
$$

向量函数 $\boldsymbol{r}(t)$的微商 $\boldsymbol{r}'(t)$仍为 t 的一个向量函数,如果函数 $\boldsymbol{r}'(t)$也是连续的和可微的,则 $\boldsymbol{r}'(t)$的微商 $\boldsymbol{r}''(t)$称为 $\boldsymbol{r}(t)$的**二阶微商**. 类似地可以定义三阶、四阶等等的微商. 在区间$[t_1, t_2]$上有直到 k 阶连续微商的函数称为这区间上的 **k 次可微函数**或 **C^k 类函数**,连续函数也称为 C^0 类函数,无限可微的函数记为

C^{∞} 类函数. 解析函数记为 C^{ω} 类函数.

设 $\boldsymbol{e}_1,\boldsymbol{e}_2,\boldsymbol{e}_3$ 是笛卡儿直角坐标系的三个基向量,向量函数 $\boldsymbol{r}(t)$可以表示为

$$\boldsymbol{r}(t)=x(t)\boldsymbol{e}_1+y(t)\boldsymbol{e}_2+z(t)\boldsymbol{e}_3,$$

所以每一个向量函数 $\boldsymbol{r}(t)$ 与三个有序实函数组 $\{x(t),y(t),z(t)\}$一一对应.

命题 4 如果向量函数 $\boldsymbol{r}(t)$在$[t_1,t_2]$上是 C^k 类函数,则向量函数所对应的三个实函数 $x(t),y(t),z(t)$在$[t_1,t_2]$上是 C^k 类函数.

证明 将 $\boldsymbol{r}(t)=x(t)\boldsymbol{e}_1+y(t)\boldsymbol{e}_2+z(t)\boldsymbol{e}_3$ 两边点乘 $\boldsymbol{e}_1$ 得

$$x(t)=\boldsymbol{r}(t)\cdot\boldsymbol{e}_1.$$

由于 $\boldsymbol{e}_1$ 是常向量,而 $\boldsymbol{r}(t)$是 C^k 类函数,所以 $x(t)$是 C^k 类函数.

同理可证 $y(t),z(t)$是 C^k 类函数.

1.4 向量函数的泰勒(Taylor)公式

定理 设向量函数 $\boldsymbol{r}(t)$在$[t_0,t_0+\Delta t]$上是 C^{n+1}类函数,则有泰勒展开式

$$\boldsymbol{r}(t_0+\Delta t)=\boldsymbol{r}(t_0)+\Delta t\boldsymbol{r}'(t_0)+\frac{(\Delta t)^2}{2!}\boldsymbol{r}''(t_0)+\cdots+$$
$$\frac{(\Delta t)^n}{n!}\boldsymbol{r}^{(n)}(t_0)+\frac{(\Delta t)^{n+1}}{(n+1)!}[\boldsymbol{r}^{(n+1)}(t_0)+\boldsymbol{\varepsilon}(t_0,\Delta t)],$$

其中 $\Delta t\to 0$ 时,$\boldsymbol{\varepsilon}(t_0,\Delta t)\to\boldsymbol{0}$.

证明 向量函数 $\boldsymbol{r}(t)$可表示为

$$\boldsymbol{r}(t)=x(t)\boldsymbol{e}_1+y(t)\boldsymbol{e}_2+z(t)\boldsymbol{e}_3$$

由已知条件在$[t_0,t_0+\Delta t]$有 $\boldsymbol{r}(t)\in C^{n+1}$,所以在$[t_0,t_0+\Delta t]$有 $x(t),y(t),z(t)\in C^{n+1}$. 根据实函数的泰勒公式得知

$$x(t_0+\Delta t)=x(t_0)+\Delta tx'(t_0)+\frac{(\Delta t)^2}{2!}x''(t_0)+\cdots+$$