21世纪高等院校计算机教材系列

数值计算方法
习题及习题解答

马东升　熊春光　编

机械工业出版社
CHINA MACHINE PRESS

21世纪高等院校计算机教材系列

数值计算方法习题及习题解答

马东升　熊春光　编

机械工业出版社

本书是《数值计算方法》的配套教材，内容包括数值计算引论、非线性方程的数值解法、线性代数方程组的数值解法、插值法、曲线拟合的最小二乘法、数值积分和数值微分、常微分方程初值问题的数值解法和试题及解答等8章。前7章每章均由内容提要、习题及解答、同步练习题及解答三部分组成，最后一章给出了3份试题样卷及解答。

本书可作为高等学校理工科各专业本科生学习数值分析或计算方法的配套教材或参考书。

图书在版编目(CIP)数据

数值计算方法习题及习题解答/马东升，熊春光编.
—北京：机械工业出版社，2006.9
(21世纪高等院校计算机教材系列)
ISBN 7-111-19307-5

Ⅰ.数… Ⅱ.①马…②熊… Ⅲ.数值计算-计算方法-高等学校-习题 Ⅳ.O241

中国版本图书馆CIP数据核字(2006)第060588号

机械工业出版社(北京市百万庄大街22号 邮政编码100037)
策　划：胡毓坚 责任编辑：陈振虹 版式设计：张世琴
责任校对：张晓蓉 责任印制：李 妍

北京铭成印刷有限公司印刷

2006年8月第1版第1次印刷
184mm×260mm · 13.25印张 · 321千字
0001—5000册
定价：19.00元

凡购本书，如有缺页、倒页、脱页，由本社发行部调换
本社购书热线电话(010)68326294
编辑热线电话(010)88379739
封面无防伪标均为盗版

出 版 说 明

计算机技术是一门迅速发展的现代科学技术，它在经济建设与社会发展中，发挥着非常重要的作用。近年来，我国高等院校十分注重人才的培养，大力提倡素质教育、优化知识结构，提倡大学生必须掌握计算机应用技术。为了满足教育的需求，机械工业出版社组织了这套“21 世纪高等院校计算机教材系列”。

在本套系列教材的组织编写过程中，我社聘请了各高等院校相关课程的主讲老师进行了充分的调研和细致的研讨，并针对非计算机专业的课程特点，根据自身的教学经验，总结出知识点、重点和难点，一并纳入到教材中。

本套系列教材定位准确，注重理论教学和实践教学相结合，逻辑性强，层次分明，叙述准确而精炼，图文并茂，习题丰富，非常适合各类高等院校、高等职业学校及相关院校的教学，也可作为各类培训班和自学用书。

参加编写本系列教材的院校包括：清华大学、西安交通大学、上海交通大学、北京交通大学、北京邮电大学、北京化工大学、北京科技大学、山东大学、首都经贸大学、河北大学等。

机械工业出版社

前　　言

随着计算机技术和计算数学的发展，用计算机进行科学计算已成为与理论分析、科学实验同样重要的科学研究方法。科学研究和工程技术中提出的数学问题往往需要求出数值解，利用计算机求解各种数学模型的数值计算方法是科学计算的核心，它已成为广大科学技术人员的必备知识，高等学校的许多专业已普遍将数值计算方法列入必修课或选修课。

本书按机械工业出版社 2006 年出版的《数值计算方法（第 2 版）》教材的章节顺序编写，内容包括数值计算引论，非线性方程的数值解法，线性代数方程组的数值解法，插值法，曲线拟合的最小二乘法，数值积分和数值微分，常微分方程初值问题的数值解法和试题及解答等 8 章。前 7 章每章均由内容提要、习题及解答和同步练习题及解答组成，最后一章给出了 3 份试题样卷及解答。

感谢北京理工大学杨国孝、程恺元教授对本书编写给予的热情帮助和支持。

限于编者水平，谬误之处敬祈批评指正。

编　者

目　　录

第 1 章　数值计算引论

1.1　内容提要

一、误差的来源

数值计算主要研究以下两类误差。

1. 截断误差

数学模型的准确解与用数值方法求得的解的差称为截断误差，又称为方法误差。这种误差常常是由用有限过程代替无穷过程时产生的误差。例如，要计算级数

$$1+\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}+\cdots+\frac{1}{n!}+\cdots=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k!}$$

的值，当用计算机计算时，用前 n 项(有限项)的和

$$1+\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}+\cdots+\frac{1}{n!}=\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k!}$$

来代替无穷项之和，即舍弃了 n 项后边的无穷多项，因而产生了截断误差

$$\sum_{k=n+1}^{\infty}\frac{1}{k!}$$

2. 舍入误差

由于计算机字长为有限位，原始数据和数据四则运算过程中进行舍入所产生的误差称为舍入误差。例如，用 3.141 59 表示圆周率 π 时产生的误差 0.000 002 6…，用 0.333 33 表示 $1\div3$ 的运算结果时所产生的误差 $1\div3-0.333\,33=0.000\,003\,3\cdots$ 都是舍入误差。

二、近似数的误差表示

1. 绝对误差

设 x^* 是准确值 x 的一个近似值，称

$$e(x^*)=x-x^*$$

为近似值 x^* 的绝对误差，简称误差。

令 $|e(x^*)|$ 的一个上界为 ε^*，即

$$|e(x^*)|=|x-x^*|\leqslant\varepsilon^*$$

把 ε^* 称为近似数 x^* 的绝对误差限，简称误差限。

2. 相对误差

设 x^* 是精确值 x 的一个近似值，称

$$\frac{e(x^*)}{x}=\frac{x-x^*}{x}$$

为近似值 x^* 的相对误差。在实际应用中常取

$$e_r(x^*)=\frac{x-x^*}{x^*}$$

为 x^* 的相对误差。

令相对误差绝对值 $|e_r(x^*)|$ 的一个上界为 ε_r^*，即

$$|e_r(x^*)| = \frac{|x - x^*|}{|x^*|} \leqslant \varepsilon_r^*$$

把 ε_r^* 称为近似数 x^* 的相对误差限。

3. 有效数字

对有多位数字的准确值按四舍五入原则得到其前若干位的近似值时，该近似值的绝对误差不超过末位的半个单位。

设数 x 的近似值 $x^* = \pm 0.x_1x_2\cdots x_n \times 10^m$，其中 x_i 是 0～9 之间的任一个数，但 $x_1 \neq 0$，$i = 1, 2, \cdots, n$ 是正整数，m 是整数，若

$$|x - x^*| \leqslant \frac{1}{2} \times 10^{m-n}$$

则称 x^* 为 x 的具有 n 位有效数字的近似值，x^* 准确到第 n 位，$x_1, x_2, \cdots, x_n$ 是 x^* 的有效数字。

有效数字位数越多，绝对误差越小。

4. 有效数字和相对误差

若近似值 $x^* = \pm 0.x_1x_2\cdots x_n \times 10^m$ 具有 n 位有效数字，则其相对误差

$$|e_r^*| \leqslant \frac{1}{2x_1} \times 10^{-(n-1)}$$

有效数字位数越多，相对误差越小。

若近似值 $x^* = \pm 0.x_1x_2\cdots x_n \times 10^m$ 的相对误差

$$|e_r^*| \leqslant \frac{1}{2(x_1 + 1)} \times 10^{-(n-1)}$$

则该近似数 x^* 至少有 n 位有效数字。

三、数值计算误差分析

1. 函数运算误差

设一元函数 $f(x)$，自变量 x 的近似值为 x^*，函数 $f(x)$ 的近似值为 $f(x^*)$，则函数 $f(x)$ 的绝对误差限

$$\varepsilon[f(x^*)] \approx |f'(x^*)| \varepsilon(x^*)$$

相对误差限

$$\varepsilon_r[f(x^*)] \approx \left| \frac{f'(x^*)}{f(x^*)} \right| \varepsilon(x^*)$$

设多元函数 $y = f(x_1, x_2, \cdots, x_n)$，自变量 $x_1, x_2, \cdots, x_n$ 的近似值为 $x_1^*, x_2^*, \cdots, x_n^*$，函数 y 的近似值为 $y^* = f(x_1^*, x_2^*, \cdots, x_n^*)$，则函数 y 的绝对误差限

$$\varepsilon(y^*) = \sum_{i=1}^{n} \left| \left(\frac{\partial f}{\partial x_i} \right)^* \right| \varepsilon(x^*)$$

相对误差限

$$\varepsilon_r(y^*) = \sum_{i=1}^{n} \left| \left(\frac{\partial f}{\partial x_i} \right)^* \right| \frac{\varepsilon(x^*)}{y^*}$$

上二式中

$$\left(\frac{\partial f}{\partial x_i}\right)^* = \frac{\partial f(x_1^*, x_2^*, \cdots, x_n^*)}{\partial x_i}$$

2. 算术运算误差

以 x_1，x_2 两数为例，设 x_1^*，x_2^* 分别为准确值 x_1、x_2 的近似值，其误差限分别为 $\varepsilon(x_1^*)$，$\varepsilon(x_2^*)$，则

$$\varepsilon(x_1^* \pm x_2^*) \approx \varepsilon(x_1^*) + \varepsilon(x_2^*)$$

$$\varepsilon(x_1^* x_2^*) \approx |x_1^*|\varepsilon(x_2^*) + |x_2^*|\varepsilon(x_1^*)$$

$$\varepsilon\left(\frac{x_1^*}{x_2^*}\right) \approx \frac{|x_1^*|\varepsilon(x_2^*) + |x_2^*|\varepsilon(x_1^*)}{(x_2^*)^2}, \quad x_2^* \neq 0$$

四、数值稳定性和减小运算误差

1. 数值稳定性

在数值计算过程中，舍入误差在一定条件下能得到控制，或者说舍入误差的增长不影响产生可靠的结果，则该计算是数值稳定的，否则是数值不稳定的。在实际计算时，要选用数值稳定的方法，不稳定的数值方法不能使用。

2. 减小运算误差

（1）避免相近的数相减，防止有效数字位数的损失。

（2）防止大数“吃掉”小数，保护重要的物理参数。

（3）绝对值小的数不宜做除数。

（4）简化计算步骤，减少运算次数。

1.2 习题及解答

1. 已知 $\pi = 3.141\ 592\ 654\cdots$，问：

（1）若其近似值取 5 位有效数字，则该近似值是多少？其误差限是多少？

（2）若其近似值精确到小数点后面 4 位，则该近似值是什么？其误差限是什么？

（3）若其近似值的绝对误差限为 0.5×10^{-5}，则该近似值是什么？

解　（1）近似值 $\pi^* = 3.141\ 6$，误差限 $\varepsilon^* = \frac{1}{2} \times 10^{-4}$。

（2）和(1)相同，$\pi^* = 3.141\ 6$，$\varepsilon^* = \frac{1}{2} \times 10^{-4}$。

（3）$\pi^* = 3.141\ 59$。

2. 下列各数都是经过四舍五入得到的近似值，求各数的绝对误差限、相对误差限和有效数字的位数。

（1）3 580

解　绝对误差限 $\varepsilon^* = \frac{1}{2} \times 10^0 = 0.5$。

相对误差限 $\varepsilon_r^* = \frac{\varepsilon^*}{|x^*|} = \frac{0.5}{3\ 580} = 1.4 \times 10^{-4} = 0.014\%$。

经过四舍五入得到的近似值 3 580，其各位都是有效数字，故有 4 位有效数字。

(2) 0.047 6

解 绝对误差限 $\varepsilon^* = \frac{1}{2} \times 10^{-4} = 0.5 \times 10^{-4}$。

相对误差限 $\varepsilon_r^* = \frac{\varepsilon^*}{|x^*|} = \frac{0.5 \times 10^{-4}}{0.047\,6} \approx 0.001\,05 \approx 0.11\%$。

经过四舍五入得到的近似值0.047 6，其各位都是有效数字，故有效数字的位数为3位。

(3) 30.120

解 绝对误差限 $\varepsilon^* = \frac{1}{2} \times 10^{-3} = 0.000\,5$。

相对误差限 $\varepsilon_r^* = \frac{\varepsilon^*}{|x^*|} = \frac{0.000\,5}{30.120} = 0.001\,7\%$。

经过四舍五入得到的近似值30.120，其各位都是有效数字，故有效数字的位数为5位。

(4) $0.301\,2 \times 10^{-5}$

解 绝对误差限 $\varepsilon^* = \frac{1}{2} \times 10^{-4} \times 10^{-5} = 0.5 \times 10^{-9}$。

相对误差限 $\varepsilon_r^* = \frac{\varepsilon^*}{|x^*|} = \frac{0.5 \times 10^{-9}}{0.301\,2 \times 10^{-5}} = 0.017\%$。

经过四舍五入得到的近似值 $0.301\,2 \times 10^{-5}$，其各位都是有效数字，故有效数字的位数为4位。

3. 确定圆周率 π 如下近似值的绝对误差限、相对误差限，并求其有效数字的位数。

(1) $\frac{22}{7}$

解 $\frac{22}{7} = 3.142\,857\cdots$，$\pi = 3.141\,592\cdots$。

$\left|\pi - \frac{22}{7}\right| = |3.141\,592\cdots - 3.142\,857\cdots| = 0.001\,264\cdots$，取绝对误差 $e^* = 0.001\,3$，则相对误差

$$e_r^* = \frac{e^*}{|x^*|} = \frac{0.001\,3}{\pi} = 0.041\,38\%$$

或取绝对误差限 $\varepsilon^* = 0.005 = \frac{1}{2} \times 10^{-2}$。因为 $m = 1$，$m - n = -2$，所以 $n = 3$，有3位有效数字。此时相对误差限 $\varepsilon_r^* = \frac{\varepsilon^*}{|x^*|} = \frac{\frac{1}{2} \times 10^{-2}}{3.14} = 0.159\%$。又解，相对误差限 $\varepsilon_r^* = \frac{1}{2 \times 3} \times 10^{-(3-1)} = 0.17\%$。前者比后者更精确。

(2) $\frac{223}{71}$

解 $\frac{223}{71} = 3.140\,84\cdots$，$\pi = 3.141\,59\cdots$。

$\left|\pi - \frac{223}{71}\right| = |3.141\,59\cdots - 3.140\,84\cdots| = 0.000\,75\cdots$，取绝对误差 $e^* = 0.000\,76$。则相对误差

$$e_r^* = \frac{e^*}{|x^*|} = \frac{0.000\ 76}{\pi} = 0.024\ 19\%。$$

或取绝对误差限 $\varepsilon^* = 0.005 = \frac{1}{2} \times 10^{-2}$。因为 $m=1$，$m-n=-2$，所以 $n=3$，有 3 位有效数字。此时相对误差限 $\varepsilon_r^* = \frac{\varepsilon^*}{|x^*|} = \frac{\frac{1}{2} \times 10^{-2}}{3.14} = 0.159\%$。

又解，相对误差限 $\varepsilon_r^* = \frac{1}{2 \times 3} \times 10^{-(3-1)} = 0.17\%$。前者比后者更精确。

(3) $\frac{355}{113}$

解 $\frac{355}{113} \approx 3.141\ 592\ 92\cdots$，$\pi = 3.141\ 59\cdots$。

$\left| \pi - \frac{355}{113} \right| = |3.141\ 592\ 654\cdots - 3.141\ 592\ 920\cdots| = 0.000\ 000\ 266\cdots$，取绝对误差

$$e^* = 0.000\ 000\ 267。$$

则相对误差 $e_r^* = \frac{e^*}{|x^*|} = \frac{0.000\ 000\ 267}{\pi} = 0.000\ 008\ 5\%$。

或取绝对误差限 $\varepsilon^* = 0.000\ 000\ 5 = \frac{1}{2} \times 10^{-6}$。因为 $m=1$，$m-n=-6$，所以 $n=7$，有 7 位有效数字。此时相对误差限

$$\varepsilon_r^* = \frac{\varepsilon^*}{|x^*|} = \frac{\frac{1}{2} \times 10^{-6}}{3.14} = 0.000\ 015\ 9\%。$$

又解，相对误差限 $\varepsilon_r^* = \frac{1}{2 \times 3} \times 10^{-(7-1)} = 0.000\ 017\%$。前者比后者更精确。

4. 设 $x = 108.57\ln t$，其近似值 x^* 的相对误差 $e(x^*) \leqslant 0.1$，证明 t^* 的相对误差 $e_r(t^*) < 0.1\%$。

证 $e(x^*) = 108.57(\ln t - \ln t^*) = 108.57\ln\left(\frac{t}{t^*}\right) \leqslant 0.1$

$$0 < \frac{t}{t^*} \leqslant e^{\frac{0.1}{108.57}}$$

$$e_r(t^*) = \frac{t - t^*}{t^*} = \frac{t}{t^*} - 1 \leqslant e^{\frac{0.1}{108.57}} - 1 \approx 9.21 \times 10^{-4} < 0.1\%。$$

5. 要使 $\sqrt{6}$ 的近似值的相对误差限小于 0.1%，需取几位有效数字？

解 方法 1：因为 $\sqrt{6} = 2.449\ 4\cdots$，有 $x_1 = 2$，设近似值 x^* 有 n 位有效数字，由定理

$$\varepsilon_r^* = \frac{1}{2x_1} \times 10^{-(n-1)}$$

有

$$\frac{1}{2 \times 2} \times 10^{-(n-1)} < 0.1\%$$

$$\frac{1}{4} \times 10^{-(n-1)} < 1 \times 10^{-3}$$

比较不等式$\frac{1}{4}<1$，所以有 $n-1=3$，$n=4$，故取 4 位有效数字，$x^*=2.449$。

方法 2：根据相对误差限 $\varepsilon_r^*=\frac{\varepsilon^*}{|x^*|}$，有 $\varepsilon^*=\varepsilon_r^*|x^*|$，所以

$$\frac{1}{2}\times10^{-3}\times2.449\cdots=0.001\ 224\ 7\cdots<0.000\ 5=\frac{1}{2}\times10^{-3}=\varepsilon^*$$

即 $m-n=-3$，由于 $m=1$，所以 $n=4$，故取 $x^*=2.449$。

方法 3：解法 1 和解法 2 的结果都是偏于保守的。在解法 1 中，定理对所有具有 n 位有效数字的近似值都正确，故对误差估计偏大；在解法 2 中，取绝对误差限确定有效数字 n 也是偏大的。对于本例题，根据上述的结论，试取 3 位有效数字 2.45 进行试算，其相对误差

$$\frac{|\sqrt{6}-2.45|}{2.45}=0.000\ 208<0.1\%$$

实际已满足要求。

6. 已知近似数 x^* 的相对误差限为 0.3%，问 x^* 至少有几位有效数字？

解 由 $\varepsilon_r^*=0.3\%$，根据定理，有

$$0.3\%=\frac{1}{2(x_1+1)}\times10^{-(n-1)}$$

x_1 的取值范围是 1 ~ 9，由于 x_1 未给出，取 $x_1=1$，$n=2.92$；取 $x_1=9$，$n=2.22$，按最不利的情况，x^* 至少有 2 位有效数字。

7. 设 $x>0$，其近似数 x^* 的相对误差限为 δ，求 $\ln x^*$ 的绝对误差限和相对误差限。

解 由函数运算的误差限 $\varepsilon[f(x^*)]\approx|f'(x^*)|\varepsilon^*$，并考虑到 $x>0$，有

$$\varepsilon(\ln(x^*))\approx(\ln x^*)'\varepsilon^*=\frac{\varepsilon^*}{x^*}=\delta$$

或解

$$\varepsilon(\ln x^*)=|\ln x-\ln x^*|=\left|\ln\frac{x}{x^*}\right|=\left|\ln\frac{x-x^*+x^*}{x^*}\right|$$

$$=\left|\ln\frac{x-x^*}{x^*}+1\right|=|\ln(\delta+1)|\approx\delta$$

由函数运算的相对误差限 $\varepsilon_r[f(x^*)]\approx\left|\frac{f'(x^*)}{f(x^*)}\right|\varepsilon^*$，有

$$\varepsilon_r(\ln x^*)\approx\left|\frac{(\ln x^*)'}{\ln x^*}\right|\varepsilon^*=\frac{\varepsilon^*}{x^*}\left|\frac{1}{\ln x^*}\right|=\frac{\delta}{|\ln x^*|}$$

8. 计算球体积 $V=\frac{4}{3}\pi r^3$ 时，为使 V 的相对误差不超过 0.3%，问半径 r 的相对误差允许是多少？

解 设 r 的近似值为 r^*，V 的近似值为 V^*。

解法 1：根据定义

$$e_r(V^*)=\frac{\frac{4}{3}\pi r^3-\frac{4}{3}\pi r^{*3}}{\frac{4}{3}\pi r^{*3}}=\frac{r^3-r^{*3}}{r^{*3}}$$

$$=\frac{r-r^*}{r^*}\frac{r^2+rr^*+r^{*2}}{r^{*2}}$$

注意到 $r\approx r^*$，有

$$e_r(V^*)\approx e_r(r^*)\frac{3r^{*2}}{r^{*2}}=3e_r(r^*)$$

令 $|e_r(V^*)|\approx|3e_r(r^*)|\leqslant 0.3\%$，可知半径 r 允许的相对误差 $|e_r(r^*)|\leqslant 0.1\%$。

解法 2：利用数值运算误差估计公式（下面公式用 r 和 V 表示也可）

$$\varepsilon(V)\approx\left(\frac{4}{3}\pi r^3\right)'\varepsilon(r)=4\pi r^2\varepsilon(r)$$

$$|\varepsilon_r(V)|=\left|\frac{\varepsilon(V)}{V}\right|\approx\frac{4\pi r^2\varepsilon(r)}{\frac{4}{3}\pi r^3}=3|\varepsilon_r(r)|\leqslant 0.3\%$$

可得半径 r 的允许相对误差为

$$|\varepsilon_r(r)|\leqslant\frac{0.3\%}{3}=0.1\%$$

9. 真空中自由落体运动距离 s 和时间 t 的关系是 $s=\frac{1}{2}gt^2$，并设重力加速度 g 是准确的，而对 t 的测量有 ±0.1s 的误差，证明当 t 增加时，距离 s 的绝对误差增加，而相对误差却减少。

解 由 $s=\frac{1}{2}gt^2$ 得 $\mathrm{d}s=gt\mathrm{d}t$，因而

$$e(s^*)\approx gte(t^*)$$

$$e_r(s^*)\approx\frac{gte(t^*)}{\frac{1}{2}gt^2}=\frac{2}{t}e(t^*)$$

于是

$$|e(s^*)|\approx gt|e(t^*)|$$

$$|e_r(s^*)|\approx\frac{2}{t}|e(t^*)|$$

可见，当 $|e(t)|$ 固定时，$|e(s^*)|$ 随着 t 的增加而增加，而 $|e_r(t)|$ 却随着 t 的增加而减少。

10. 求积分值 $I_n=\int_0^1\frac{x^n}{x+5}\mathrm{d}x$，$n=0,1,\cdots,8$。

解 由

$$I_n+5I_{n-1}=\int_0^1\frac{x^n+5x^{n-1}}{x+5}\mathrm{d}x=\int_0^1 x^{n-1}\mathrm{d}x=\frac{1}{n}$$

可得两个递推计算方法。

方法 1：
$$I_n=\frac{1}{n}-5I_{n-1},\qquad n=1,2,\cdots,8$$

方法 2：
$$I_{n-1}=\frac{1}{5}\left(\frac{1}{n}-I_n\right),\qquad n=8,7,\cdots,1$$

方法 1 的初值

$$I_0=\int_0^1\frac{1}{x+5}\mathrm{d}x=\ln 1.2=0.182\ 3$$

方法 2 的初值，利用广义积分中值定理

$$I_n = \frac{1}{\xi+5}\int_0^1 x^n \mathrm{d}x = \frac{1}{\xi+5}\frac{1}{n+1}, \quad \xi \in [0,1]$$

所以

$$\frac{1}{6(n+1)} \leqslant I_n \leqslant \frac{1}{5(n+1)}$$

取

$$I_8 = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{54}+\frac{1}{45}\right) = 0.020\ 37$$

取 4 位有效数字进行计算，其结果如表 1-1 所示。

表 1-1 计 算 结 果

I_n	方法 1	方法 2	准确值	I_n	方法 1	方法 2	准确值
I_0	0.182 3	0.182 3	0.182 3	I_5	0.095 75	0.028 46	0.028 47
I_1	0.088 50	0.088 39	0.088 39	I_6	-0.312 1	0.024 39	0.024 33
I_2	0.057 50	0.058 04	0.058 04	I_7	-1.703	0.020 93	0.021 23
I_3	0.045 83	0.043 14	0.043 14	I_8	-8.392	0.020 37	0.018 84
I_4	0.020 85	0.034 31	0.034 31				

从计算结果可以看出，方法 1 在 I_6 时已为负值，显然与 $I_n>0$ 矛盾，事实上 I_4 和准确值相比已经连 1 位有效数字也没有了，这是因为当 I_0 带有$\frac{1}{2}\times10^{-4}$的误差时，这个初始数据的误差在以后的每次计算时顺次乘以 5^1，5^2，…而传播到 I_n 中，使得算到 I_4 就完全不准确了。方法 2 在初始值 I_8 时 1 位有效数字也没有，但倒推计算到 $I_4, I_3, \cdots, I_0$ 时各位都是有效数字，这是因为递推公式的误差是按$\frac{1}{5^n}$减少的，是稳定的计算公式。

11. 设 $a=1\ 000$，取 4 位有效数字用如下两个等价的式子

$$x=\sqrt{a+1}-\sqrt{a} \quad 和 \quad x=\frac{1}{\sqrt{a+1}+\sqrt{a}}$$

进行计算，求 x 的近似值 x^*，并将结果与准确值 $x=0.015\ 807\ 437\cdots$比较，各有多少位有效数字。

解 将$a=1\ 000$ 代入，取 4 位有效数字，有

$$x^* = \sqrt{a+1}-\sqrt{a} = \sqrt{1\ 000+1}-\sqrt{1\ 000} = 31.64-31.62 = 0.02$$

$$x^* = \frac{1}{\sqrt{a+1}+\sqrt{a}} = \frac{1}{\sqrt{1\ 000+1}+\sqrt{1\ 000}} = \frac{1}{31.64+31.62} = 0.015\ 81$$

与准确值 $x=0.015\ 807\ 437\cdots$比较，因前者出现相近数相减，计算结果只有 1 位有效数字，后者没有相近数相减，有 4 位有效数字。

12. 计算 $f=(\sqrt{2}-1)^6$，取$\sqrt{2}\approx1.4$，利用下列等价的式子计算，得到的哪一个结果最好？

(1) $\frac{1}{(\sqrt{2}+1)^6}$；(2) $(3-2\sqrt{2})^3$；(3) $\frac{1}{(3+2\sqrt{2})^3}$；(4) $99-70\sqrt{2}$

解 第(4)式和第(2)式出现相近数相减，且第(2)式计算量比第(4)式大，二者都不可能得到好的运算结果。第(1)式和第(3)式均不出现相近数相减，但第(1)式乘法运算次数

比第(3)式多，而二者除法运算次数相同，故第(1)式的计算量比第(3)式大，每次乘除法运算都可能引入新的舍入误差，故只有第(3)式能给出好的运算结果。

13. 利用四位数学用表求 $1-\cos 2°$，比较不同方法计算所得结果的误差。

解 用四位数学用表直接计算

$$1-\cos 2°\approx 1-0.9994=0.0006$$

只有1位有效数字。

改用其他方法计算

$$1-\cos 2°=\frac{\sin^2 2°}{1+\cos 2°}\approx\frac{0.03490^2}{1.9994}\approx 6.092\times 10^{-4}$$

具有4位有效数字。

$$1-\cos 2°=2\sin^2 1°\approx 6.09\times 10^{-4}$$

具有3位有效数字。

准确值 $1-\cos 2°=6.0917\cdots\times 10^{-4}$，故以上三种计算方法的误差限分别是 0.1×10^{-4}，0.0003×10^{-4}，0.002×10^{-4}。

14. 用消元法解线性方程组

$$\begin{cases} x+10^{15}y=10^{15} \\ x+y=2 \end{cases}$$

若只用3位数计算，结果是否可靠？

解 用方程组的上式减下式，得

$$(10^{15}-1)y=10^{15}-2$$

即

$$y=\frac{10^{15}-2}{10^{15}-1}$$

再将方程组的下式乘以 10^{15},减去上式,可得

$$(10^{15}-1)x=10^{15}$$

从而有

$$x=\frac{10^{15}}{10^{15}-1}$$

假定只用3位数计算，则通过上述消元过程分别得到的方程组是

$$\begin{cases} 10^{15}y=10^{15} \\ 10^{15}x=10^{15} \end{cases}$$

从而得到原方程的解为

$$\begin{cases} x=1 \\ y=1 \end{cases}$$

这个结果显然不可靠，因为在消元过程中发生了大数“吃掉”小数的现象。

15. 对反双曲正弦函数 $f(x)=\ln(x-\sqrt{x^2-1})$，求 $f(30)$ 的值。若开平方用6位函数表，问求对数时误差有多大。若改用另一等价公式 $\ln(x-\sqrt{x^2-1})=-\ln(x+\sqrt{x^2-1})$ 计算，问求对数时误差有多大。

解 对于反双曲正弦函数 $f(30)=\ln(30-\sqrt{30^2-1})$，记 $a=30-\sqrt{899}$，若用6位的开平

方函数表，则有

$$a^* = 30 - 29.983\ 3 = 0.016\ 7$$

故有绝对误差

$$\varepsilon(a^*) = \frac{1}{2} \times 10^{-4}，而 f(30) \approx \ln a^*$$

于是有

$$\varepsilon[f(30)] = \varepsilon(\ln a^*) \approx \left|\frac{1}{a^*}\right| \varepsilon(a^*) = \frac{0.5}{0.016\ 7} \times 10^{-4} \approx 0.003$$

对于等价公式有

$$f(30) = -\ln(30 + \sqrt{30^2 - 1})$$

记 $b = 30 + \sqrt{899}$，若用同样的 6 位的开平方函数表，有

$$b^* = 30 + 29.983\ 3 = 59.983\ 3$$

进而得到绝对误差

$$\varepsilon(b^*) = \frac{1}{2} \times 10^{-4}$$

而 $f(30) \approx \ln b^*$，使用误差传播公式

$$\varepsilon[f(30)] = \varepsilon(\ln b^*) \approx \left|\frac{1}{b^*}\right| \varepsilon(b^*) = \frac{0.5}{59.983\ 3} \times 10^{-4} \approx 0.834 \times 10^{-6}$$

16. 利用 $\sqrt{783} \approx 27.982$（有 5 位有效数字），求方程 $x^2 - 56x + 1 = 0$ 的两个根，使其至少具有 4 位有效数字。

解 求根公式 $x_{1,2} = \dfrac{56 \pm \sqrt{56^2 - 4}}{2} = 28 \pm \sqrt{783}$

解出 $x_1 = 57.98$

$$x_2 = 28 - \sqrt{783} = \frac{28^2 - 783}{28 + \sqrt{783}} \approx \frac{1}{55.98} = 0.017\ 86$$

或 $x_2 = \dfrac{1}{x_1} = \dfrac{1}{55.98} = 0.017\ 86$

17. 用秦九韶算法计算

$$p(x) = x^3 - 3x - 1$$

在 $x = 2$ 处的值。

解 秦九韶算法

$$\begin{cases} v_0 = a_n \\ v_k = v_{k-1}x + a_{n-k}, \quad k = 1, 2, \cdots, n \end{cases}$$

由已知，$n = 3$

$k = 1$ 时，$v_0 = a_3 = 1$，$v_1 = v_0 x + a_2 = 1 \times 2 + 0 = 2$

$k = 2$ 时，$v_2 = v_1 x + a_1 = 2 \times 2 + (-3) = 1$

$k = 3$ 时，$v_3 = v_2 x + a_0 = 1 \times 2 + (-1) = 1$

所以，$p(2) = 1$。

或写成紧凑形式

$$
\begin{array}{r|rrrl}
 & 1 & 0 & -3 & -1 \\
x=2 & & 2 & 4 & 2 \\
\hline
 & 1 & 2 & 1 & 1=p(2)
\end{array}
$$

1.3 同步练习题及解答

1. 下列各数都是经四舍五入得到的近似值，试指出它们各有几位有效数字，并给出其误差限与相对误差限。

$$x_1^*=4.702\ 1,\ x_2^*=0.067,\ x_3^*=280.20$$

解 x_1^* 有 5 位有效数字，其误差限 $\varepsilon^*=\frac{1}{2}\times10^{-4}$，相对误差限 $\varepsilon_r^*=\frac{\varepsilon^*}{|x^*|}=\frac{\frac{1}{2}\times10^{-4}}{4.702\ 1}=0.001\ 063\ 4\%$。

x_2^* 有 2 位有效数字，其误差限 $\varepsilon^*=\frac{1}{2}\times10^{-3}$，相对误差限 $\varepsilon_r^*=\frac{\varepsilon^*}{|x^*|}=\frac{\frac{1}{2}\times10^{-3}}{0.067}=0.746\%$。

x_3^* 有 5 位有效数字，其误差限 $\varepsilon^*=\frac{1}{2}\times10^{-2}$，相对误差限 $\varepsilon_r^*=\frac{\varepsilon^*}{|x^*|}=\frac{\frac{1}{2}\times10^{-2}}{280.20}=0.001\ 784\%$。

2. 设下列各对近似值均为有效数，问它们是否一样，若不一样有何区别。

（1）$45\ 800$ 和 458×10^2

解 不一样，二者的有效数字和误差限均不相同。

$45\ 800$ 的误差限 $\varepsilon^*=\frac{1}{2}$，有效数字的位数为 5 位。

458×10^2 的误差限 $\varepsilon^*=\frac{1}{2}\times10^2$，有效数字的位数为 3 位。

（2）$0.004\ 38$ 和 $0.043\ 80\times10^{-1}$

解 不一样，二者的有效数字和误差限均不相同。

$0.004\ 38$ 的误差限 $\varepsilon^*=\frac{1}{2}\times10^{-5}$，有效数字的位数为 3 位。

$0.043\ 80\times10^{-1}$的误差限 $\varepsilon^*=\frac{1}{2}\times10^{-6}$，有效数字的位数为 4 位。

（3）$0.401\ 5\times10^2$ 和 $0.040\ 15\times10^3$

解 一样，二者的有效数字和误差限均相同。

$0.401\ 5\times10^2$ 和 $0.040\ 15\times10^3$ 的误差限均为 $\varepsilon^*=\frac{1}{2}\times10^{-2}$，有效数字的位数均为 4 位。

（4）$9\ 800$ 和 98×10^2

解 不一样，二者的有效数字和误差限均不相同。