21世纪高等学校规划教材

高等数学

（上册）

主编　李育文　司清亮　王红卫

西安地图出版社

高等数学

21世纪高等学校规划教材

高 等 数 学

（上册）

主编 李育文 司清亮 王红卫

西安地图出版社

内容提要

本书分为上、下两册，上册包含函数与极限、导数与微分、微分中值定理与导数的应用、不定积分、定积分及应用、空间解析几何与向量代数等内容；下册包含多元函数微分法及其应用、重积分、曲线积分与曲面积分、微分方程、无穷级数等内容。少数带“*”的节与段落可以根据所使用专业的需要决定取舍．习题大多以基本概念与基本方法为主，是学生必须掌握的；部分习题则有一定难度，综合性、论证性较强，希望能较好地适应学生进一步深造的需要．书末附有习题答案或提示，以便于教师和学生参考．

本书可作为高等院校相关专业的高等数学教材，亦可作为自学和数学爱好者的参考教材．

图书在版编目(CIP)数据

高等数学/李育文，司清亮，王红卫主编．—西安：西安地图出版社．2004.8

ISBN 7-80670-684-4

Ⅰ.高…　Ⅱ.①李…②司…③王…　Ⅲ.高等数学—高等学校—教材　Ⅳ.O13

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2004)第 087577 号

高等数学

李育文　司清亮　王红卫　主编

西安地图出版社出版发行

（西安市友谊东路 334 号　邮政编码：710054）

新华书店经销　黄委会设计院印刷厂印刷

787×1092 毫米　1/16 开本　35.25 印张　730 千字

2004 年 8 月第 1 版　2004 年 8 月第 1 次印刷

印数 1-2000 册

ISBN 7-80670-684-4/O·13

定价(上下册) 46 元　本册 24.00 元

前　言

数学是基础性学科，是各门自然科学发展的基础.高等数学是相关学科专业的学生从事学习与研究必不可少的工具，掌握好运用数学分析的思想方法去解决各种应用问题，对他们以后的发展是大有裨益的.为使学生能更好地理解与掌握微积分的数学思想及其实际背景，根据我们多年来从事高等数学教学的经验和体会，并参照教育部近期颁发的“专升本”以及硕士生入学考试对高等数学的基本内容和方法的要求，确定本书各章节内容与习题的取舍，让学生在学时紧凑的情况下能了解和初步掌握高等数学中最基本的概念、理论和方法，从而使此书尽可能适应相关专业高等数学教学的实际情况与需求.在内容的安排上，尽可能做到与初等数学紧密衔接，通过各种实例自然地引入微积分中的许多新概念；在叙述和讲解风格上，尽可能做到文字通俗易懂，一般而言，具有高中数学的基础即可阅读此书.

本书分为上、下两册，上册包含函数与极限、导数与微分、微分中值定理与导数的应用、不定积分、定积分及应用、空间解析几何与向量代数等内容；下册包含多元函数微分法及其应用、重积分、曲线积分与曲面积分、微分方程、无穷级数等内容。少数带“*”的节与段落可以根据所使用专业的需要决定取舍.习题大多以基本概念与基本方法为主，是学生必须掌握的；部分习题则有一定难度，综合性、论证性较强，希望能较好地适应学生进一步深造的需要.书末附有习题答案或提示，以便于教师和学生参考.

本书由李育文、司清亮、王红卫任主编，由田德宇、叶留青、张曙光、安春香、韩忠民、徐建国任副主编，由刘瑞华、陈全红、皇甫红琴、原三领任编委.撰写分工如下：郑州轻工业学院李育文（习题答案与提示），王红卫（第一章），徐建国（第十一章）；焦作师范专科学校司清亮（第三章），叶留青（第八章），张曙光（第六章），安春香（第四章），刘瑞华（第九章）；漯河职业技术学院田德宇（第五章），陈全红（第二章）；商丘师范学院韩忠民（第七章）；江汉大学实验师范学院皇甫红琴（第十章的第一节至第六节）；上海交通大学博士后流动站原三领（第十章的第七节至第九节及附录）.

本书可作为高等院校相关专业的高等数学教材，亦可作为自学和数学爱好者的参考教材.

由于编者的水平有限，书中定有不少疏漏和不当之处，敬请广大读者指正.

编　者

2004 年 7 月

目　　录

第一章 函数与极限

初等数学的研究对象基本上是不变的量，而高等数学的研究对象则是变动的量．所谓函数关系就是变量之间的依赖关系，极限方法是研究变量的一种基本方法．本章介绍映射、函数、极限和函数的连续性等基本概念，以及它们的一些性质．

第一节 映射与函数

一、集合

1．集合的概念

集合是数学中的一个基本概念，例如，中国的所有大学构成一个集合，某大学里的大学生构成一个集合，全体实数构成一个集合等等．一般地，所谓集合（简称集）是指具有某种特定性质的事物的总体，组成这个集合的事物称为该集合的元素（简称元）．

通常用大写拉丁字母 $A,B,C,\cdots$ 表示集合，用小写拉丁字母 $a,b,c,\cdots$ 表示集合的元素．如果 a 是集合 A 的元素，就说 a 属于 A，记作 $a\in A$；如果 a 不是 A 的元素，就说 a 不属于 A，记作 $a\notin A$．一个集合，若它只含有有限个元素，则称为有限集；否则称为无限集．通常表示集合的方法有两种：

①列举法，即把集合的全体元素一一列举出来表示．例如，由元素 $a_1,a_2,\cdots,a_n$ 组成集合 A，可表示成

$$A=\{a_1,a_2,\cdots,a_n\};$$

② 描述法，若集合 B 是由具有某种性质 P 的元素 x 的全体所组成的，就可表示成

$$B=\{x\mid x\text{ 具有性质 }P\}$$

例如：集合 B 是方程 $x^2-2=0$ 的解集，就可表示成

$$B=\{x\mid x^2-2=0\}$$

对于数集，我们可在表示数集的字母的右上角标上“ $*$ ”来表示该数集内排除 0 的集，标上“ + ”来表示该数集内排除 0 与负数的集．

全体非负整数（自数然）的集合记作 N，

$$N=\{0,1,2,\cdots,n,\cdots\}$$

全体正整数的集合记作 N^+

$$N^+=\{1,2,\cdots,n,\cdots\}$$

全体整数的集合记作 Z

$$Z=\{\cdots,-n,\cdots,-2,-1,0,1,2,\cdots,n,\cdots\}$$

全体有理数的集合记作 Q

$$Q=\{\frac{p}{q}\mid p\in Z,q\in N^{+}\text{ 且 }p\text{ 与 }q\text{ 互质}\}$$

全体实数的集合记作 R,除 0 的实数集记作 R^{*},全体正实数的集记作 R^{+}.

设有 A、B 两个集合,若集合 A 的元素都是集合 B 的元素,则 A 是 B 的子集,记作 $A\subset B$(读作 A 包含于 B)或 $B\supset A$(读作 B 包含 A).

若集合 A、B 互为子集,即 $A\subset B$ 且 $B\supset A$,称 A 与 B 相等,记作 $A=B$.例如,

$$A=\{2,3\},B=\{x\mid x^{2}-5x+6=0\},$$

则 $A=B$.

若 $A\subset B$ 且 $A\neq B$,则 A 是 B 的真子集,记作 $A\subsetneqq B$.例如:$N\subsetneqq Z\subsetneqq Q\subsetneqq R$.

不含任何元素的集合为空集.例如,

$$\{x\mid x\in R\text{ 且 }x^{2}+2=0\}$$

是空集,因为适合条件 $x^{2}+2=0$ 的实数是不存在的.空集记作 $\varnothing$,且规定空集 $\varnothing$ 是任何集合 A 的子集,即 $\varnothing\subset A$.

2.集合的运算

集合的运算通常包含集合的并、交和差.

设有 A、B 两集合,由所有属于 A 或者属于 B 的元素组成的集合,称为 A 与 B 的并集(简称并),记作 $A\cup B$,即

$$A\cup B=\{x\mid x\in R\text{ 或 }x\in B\}$$

由所有既属于 A 又属于 B 的元素组成的集合,称为 A 与 B 的交集(简称交),记作 $A\cap B$,即

$$A\cap B=\{x\mid x\in A\text{ 且 }x\in B\}$$

由所有属于 A 而不属于 B 的元素组成的集合,称为 A 与 B 的差集(简称差),记作 $A\setminus B$,即

$$A\setminus B=\{x\mid x\in A\text{ 且 }x\notin B\}.$$

有时候我们所研究的问题限定在一个大集合 I 中,所研究的其他集合都是集合 I 的子集.我们称 I 为全集或基本集,称 $I\setminus A$ 为 A 的余集或补集,记作 A^{C}.例如,在实数集 R 中,集合 $A=\{x\mid |x|\leqslant 1\}$ 的余集为

$$A^{C}=\{x\mid x<-1\text{ 或 }x>1\}$$

设 A,B,C 为任意三个集合,它们的并、交、余运算满足下列法则:

①交换律　$A\cup B=B\cup A$,　$A\cap B=B\cap A$;

②结合律　$(A\cup B)\cup C=A\cup(B\cup C)$

$$(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$$

③分配律 $(A \cup B) \cap C = (A \cap C) \cup (B \cap C)$

$$(A \cap B) \cup C = (A \cup C) \cap (B \cup C)$$

④对偶律 $(A \cup B)^C = A^C \cap B^C$

$$(A \cap B)^C = A^C \cup B^C$$

以上法则都可根据集合相等的定义验证.现就对偶律的第一式:"两个集合的并的余集等于它们余集的交集"证明如下:

因为 $x \in (A \cup B)^C \Rightarrow x \notin A \cup B \Rightarrow x \notin A$ 且 $x \notin B \Rightarrow x \in A^C$ 且 $x \in B^C \Rightarrow x \in A^C \cap B^C$

所以 $(A \cup B)^C = A^C \cap B^C$

反之

因为 $x \in A^C \cap B^C \Rightarrow x \in A^C$ 且 $x \in B^C \Rightarrow x \notin A$ 且 $x \notin B \Rightarrow x \notin A \cup B \Rightarrow x \in (A \cup B)^C$

所以 $A^C \cap B^C = (A \cup B)^C$

于是 $(A \cup B)^C = A^C \cap B^C$ 得证.

上述证明中"$\Rightarrow$"表示"推出"(或"蕴含").若在证明的第一阶段中,用符号"$\Leftrightarrow$"代替"$\Rightarrow$"("$\Leftrightarrow$"表示"等价")则第二阶段可省略.

在两个集合之间还可定义直积或笛卡尔乘积.设有两任意集合 A 和 B,在 A 中任取一个元素 x,在 B 中任取一元素 y,组成一个有序对 (x,y),把这样的有序对作为新的元素,它们全体组成的集合称为集合 A 与集合 B 的直积,记作 $A \times B$,即

$$A \times B = \{(x,y) \mid x \in A \text{ 且 } y \in B\}$$

例如:$R \times R = \{(x,y) \mid x \in R, y \in R\}$ 即为 xOy 面上全体点的集合,$R \times R$ 常记作 R^2.

3.区间和邻域

区间是用得较多的一类数集.设 a 和 b 都是实数,且 $a < b$.数集

$$\{x \mid a < x < b\}$$

称为开区间,记作 (a,b) 即

$$(a,b) = \{x \mid a < x < b\}$$

a 和 b 称为开区间 (a,b) 的端点,这里 $a \notin (a,b)$, $b \notin (a,b)$.数集

$$\{x \mid a \leqslant x \leqslant b\}$$

称为闭区间,记作 $[a,b]$,即

$$[a,b] = \{x \mid a \leqslant x \leqslant b\}$$

a 和 b 也称为闭区间 $[a,b]$ 的端点,这里 $a \in [a,b]$, $b \in [a,b]$.类似地:

$$[a,b) = \{x \mid a \leqslant x < b\}$$

$$(a,b] = \{x \mid a < x \leqslant b\}$$

$[a,b)$ 和 $(a,b]$ 都称为半开区间.

上述区间为有限区间.数 $(b-a)$ 称为区间长度.从数轴上看,这些有限区间是长度有限的线段.闭区间 $[a,b]$ 与开区间 (a,b) 在数轴上表示法如图1.1(a)和(b)所示.此外还有所谓无限区间,引进记号 $+\infty$(读作正无穷大)及 $-\infty$(读作负无穷大),则可类似地表示无限区间,例如

$$[a,+\infty) = \{x \mid x \geqslant a\}$$

$$(-\infty,b) = \{x \mid x < b\}$$

这两个无限区间在数轴上如图1.1(c)(d)所示.

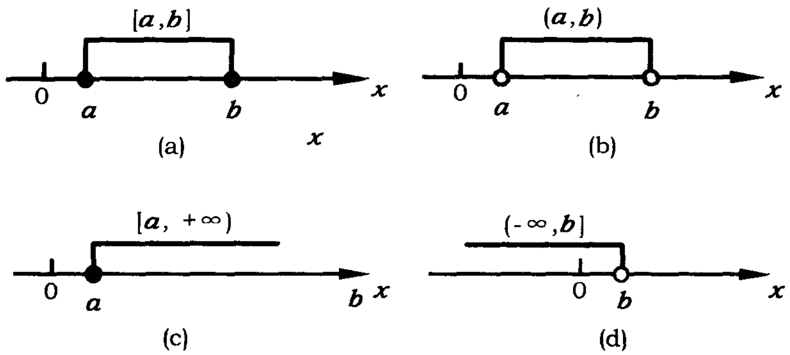

图 1.1

全体实数的集合 R 也可记作 $(-\infty,+\infty)$,它也是无限区间.

以后在不需要辨明所论区间是否包含端点,以及是有限区间还是无限区间的场合,我们就简单地称它为"区间",且常用 I 表示.

邻域也是一个重要的概念.以点 a 为中心的任何开区间称为点 a 的邻域,记作 $U(a)$.

设 δ 是任一正数,则开区间 $(a-\delta,a+\delta)$ 就是点 a 的一个邻域,这个邻域称为点 a 的 δ 邻域,记作 $U(a,\delta)$,即

$$U(a,\delta) = \{x \mid a-\delta < x < a+\delta\}$$

点 a 称作这邻域的中心,δ 称为这邻域的半径(图1.2).

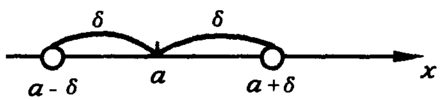

图 1.2

由于 $a-\delta < x < a+\delta$,相当于 $|x-a| < \delta$,因此

$$U(a,\delta) = \{x \mid |x-a| < \delta\}$$

因为 $|x-a|$ 表示点 x 与点 a 间的距离,所以 $U(a,\delta)$ 表示与点 a 距离小于 δ 的一切点 x 的全体.

有时用到的邻域需要把邻域中心去掉,点 a 的 δ 邻域去掉中心 a 后,称为点 a 的去心 δ 邻域,记作 $\mathring{U}(a,\delta)$.

$$\mathring{U}(a,\delta) = \{x \mid 0 < |x-a| < \delta\}$$

$0 < |x-a|$ 即表示 $x \neq a$.

我们称开区间 $(a-\delta,a)$ 为 a 的左 δ 邻域,称开区间 $(a,a+\delta)$ 为 a 的右 δ 邻域.

两个闭区间的直积表示 xOy 平面上的矩形区域.例如,

$$[a,b]\times[c,d] = \{(x,y) \mid x \in [a,b], y \in [c,d]\}$$

即为 xOy 平面上的一个矩形区域,这个区域在 x 轴和 y 轴上的投影分别为闭区间 $[a,b]$ 和闭区间 $[c,d]$.

二、映射

1.映射概念

定义 设 X,Y 是两个非空集合,若存在一个法则 f,使得对 X 中每个元素 x,按法则 f,在 Y 中有惟一确定的元素 y 与之对应,则称 f 为从 X 到 Y 的映射,记作

$$f:\quad X \to Y,$$

其中 y 是元素 x 在映射 f 下的像,记作 $f(x)$,即

$$y = f(x)$$

而元素 x 称为元素 y 在映射 f 下的一个原像;集合 X 称为映射 f 的定义域,记作 D_f,即 $D_f = X$,X 中所有元素的像所组成的集合称为映射 f 的值域,记作 R_f 或 $f(X)$,即

$$R_f = f(X) = \{f(x) \mid x \in X\}$$

由映射定义可知:

①构成一个映射必须具备以下三个要素:集合 X,即定义域 $D_f = X$;集合 Y,即值域的范围:$R_f \subset Y$;对应法则 f,使对每个 $x \in X$,有惟一确定的 $y = f(x)$ 与之对应.

②对每个 $x \in X$,元素 x 的像 y 是惟一的;而对每个 $y \in R_f$,元素 y 的原像不一定是惟一的;映射 f 的值域 R_f 是 Y 的一个子集,即 $R_f \subset Y$,不一定 $R_f = Y$.

例 1 设 $f: R \to R$,对每个 $x \in R$,$f(x) = x^2$.显然,f 是一个映射,f 的定义域 $D_f = R$,值域 $R_f = \{y \mid y \geqslant 0\}$,它是 R 的一个真子集.对于 R_f 中的元素 y,除 $y = 0$ 外,它的原像不是惟一的.如 $y = 9$ 的原像就有 $x = 3$ 和 $x = -3$ 两个.

例 2 设 $X = \{(x,y) \mid x^2 + y^2 = 1\}$,$Y = \{(x,0) \mid |x| \leqslant 1\}$,$f: X \to Y$,对每个 $(x,y) \in X$,有惟一确定的 $(x,0) \in Y$ 与之对应.显然 f 是一个映射,f 的定义域 $D_f = X$,值域 $R_f = Y$.在几何上,这个映射表示将平面上一个圆心在原点的单位圆周上的点投影到区间

$[-1,1]$ 上.

例 3 设 $f:[0,\frac{\pi}{2}]\to[0,1]$，对每个 $x\in[0,\frac{\pi}{2}]$，$f(x)=\sin x$. 这 f 是一个映射，其定义域 $D_f=[0,\frac{\pi}{2}]$，值域 $R_f=[0,1]$.

设 f 是从集合 X 到集合 Y 的映射，若 $R_f=Y$，即 Y 中任一元素 y 都是 X 中某元素的像，则称 f 为 X 到 Y 上的映射或满射；若对 X 中任意两个不同的元素 $x_1\neq x_2$，它们的像 $f(x_1)\neq f(x_2)$，则称 f 为 X 到 Y 的单射；若映射 f 既是单射，又是满射，则称 f 为一一映射(或双射).

上面例 1 中的映射，既非单射，也非满射；例 2 中映射不是单射，是满射；例 3 中的映射，既是单射，又是满射，因此是一一映射.

2. 逆射与复合映射

设 f 是 X 到 Y 的单射，则由定义，对每个 $y\in R_f$，有惟一的 $x\in X$，适合 $f(x)=y$. 于是，我们定义一个从 R_f 到 X 的新映射 y，即

$$g:\quad R_f\to X$$

对每个 $y\in R_f$，规定 $g(y)=x$，这 x 满足 $f(x)=y$，这个映射 g 称为 f 的逆映射，记作 f^{-1}，其定义域 $D_f^{-1}=R_f$，值域 $D_f=X$.

按上述定义，只有单射才存在逆映射. 所以，在上述 3 个例中，只有例 3 中的映射 f 才存在逆映射 f^{-1}，这个 f^{-1} 就是反正弦函数的主值部分：

$$f^{-1}(x)=\arcsin x,\ x\in[0,1],$$

其定义域 $D_f^{-1}=[0,1]$，值域 $D_f^{-1}=[0,\frac{\pi}{2}]$.

设有两个映射

$$g:\quad X\to Y_1,\quad f:\quad Y_2\to Z,$$

其中 $Y_1\subset Y_2$. 则由映射 g 和 f 可以定义出一个从 X 到 Z 的对应法则，它将每个 $x\in X$ 映成 $f(g(x))\in Z$. 显然，这个对应法则确定了一个从 X 到 Z 的映射，这个映射称为映射 g 和 f 构成的复合映射，记作 $f^\circ g$，即

$$f^\circ g:\quad X\to Z,$$
$$(f^\circ g)(x)=f[g(x)],\ x\in X.$$

由复合映射的定义可知，映射 g 和 f 构成复合映射的条件是：g 的值域 R_g 必须包含在 f 的定义域内，即 $R_g\subset D_f$. 否则不能构成复合映射. 由此可知，映射 g 和 f 的复合是有顺序的，$f^\circ g$ 有意义并不表示 $g^\circ f$ 也有意义. 即使 $f^\circ g$ 与 $g^\circ f$ 都有意义，复合映射 $f^\circ g$ 与 $g^\circ f$ 也未必相同.

例 4 设有映射 $g:R\to[-1,1]$ 对每个 $x\in R$，$g(x)=\sin x$，映射 $f:[-1,1]\to[0,$

1], 对每个 $u \in [-1,1]$, $f(u) = \sqrt{1-u^2}$. 由映射 g 和 f 构成的复合映射 $f^{\circ}g: R \to [0,1]$, 对每个 $x \in R$, 有

$$(f^{\circ}g)(x) = f[g(x)] = f(\sin x) = \sqrt{1-\sin^2 x} = |\cos x|$$

三、函数

1. 函数的概念

定义 设数集 $D \subset R$, 则称映射 $f: D \to R$ 为定义在 D 上的函数, 通常简记为

$$f = f(x), \quad x \in D$$

其中 x 称为自变量, y 称为因变量, D 称为定义域, 记作 D_f, 即 $D_f = D$.

函数定义中, 对每个 $x \in D$, 按对应法则 f, 总有惟一确定的值 y 与之对应, 这个值称为函数 f 在 x 处的函数值, 记作 $f(x)$, 即 $y = f(x)$. 因变量 y 与自变量 x 之间的这种依赖关系称为函数关系. 函数值 $f(x)$ 的全体所构成的集合称为函数 f 的值域, 记作 R_f 或 $f(D)$, 即

$$R_f = f(D) = \{y \mid y = f(x), x \in D\}$$

注意, 记号 f 与 $f(x)$ 的含义是不同的: 记号 f 表示自变量 x 和因变量 y 之间的对应法则, $f(x)$ 表示与自变量 x 对应的函数值. 习惯上通常用记号"$f(x), x \in D$"或"$y = f(x), x \in D$"来表示定义在 D 上的函数, 这时应理解为由它所确定的函数 f.

表示函数的记号可任意选取, 除了习惯用 f 外, 还可用其他的英文字母或希腊字母, 如"g"、"f"、"φ"等. 相应地, 函数可记作 $y = g(x)$, $y = f(x)$, $y = \varphi(x)$ 等. 有时还直接用因变量的记号直接表示函数, 即把函数记作 $y = y(x)$. 但在同一问题中, 讨论到几个不同的函数时, 为了表示区别, 要用不同的记号来表示它们.

函数是从实数集到实数集的映射, 其值域总在 R 内, 因此构成函数的要素是: 定义域 D_f 及对应法则 f. 若两个函数定义域相同, 对应法则也相同, 则这两个函数是相同的, 否则就是不同的.

函数的定义域通常按以下两种情形确定:

①对有实际背景的函数, 根据实际背景中变量的实际意义确定. 例如, 在自由落体运动中, 设物体下落的时间为 t, 下落的距离为 S, 开始下落时刻 $t = 0$, 落地时刻 $t = T$, 则 S 与 t 之间的函数关系是

$$S = \frac{1}{2}gt^2 \qquad t \in [0, T].$$

这个函数的定义域就是 $[0, T]$.

②对抽象地用算式表达的函数, 通常约定这种函数的定义域是使算式有意义的一切实数组成的集合, 这种定义域称为自然定义域. 在这种约定下, 一般的用算式表达的函数