

小学数学

高才生

6 年级

nian ji

丛书主编：李玉文



天津教育出版社
TIANJIN EDUCATION PRESS

整体推进素质教育,全面提高国民素质和民族创新能力,已成为我国教育改革深入发展的主旋律,为配合基础教育课程新教材的使用,培养出大批具有创新精神和实践能力的优秀学生,德州学院数学教育研究所在承担山东省教育科学“十五”规划重点课题“青少年智力开发实验研究”和教育部北京师范大学基础教育课程研究中心立项重点课题“小学数学开放题研究”取得丰富成果的基础上,总结多年少儿智力开发的实践经验,根据小学生的年龄特征和认知水平,广泛吸取国际上的先进资料,经过认真探索、筛选,创编出了一套具有重要学术价值和应用价值的数学教育科学研究成果,共分六册。在当地多所学校进行实验证明,本丛书是适合小学各年级数学学习的重要学生用书和小学数学教师教学辅导用书,为小学数学爱好者开创出一片新的求知园地。

本丛书具有以下五大特色:

1.同步性:所选题材与小学数学新教材知识同步,以便于学生学习,也适于教师和家长辅导,并有利于加深对课内知识的理解和灵活运用。

2.系统性:根据小学数学竞赛大纲的要求,将七大知识块、48个专题进行分割、交叉和立体设计,螺旋提升。在小学生所能接受的范围内,系统而全面的介绍了小学数学竞赛知识,为参加数学竞赛、提高数学素质奠定了基础。

3.趣味性:针对小学生心理特征,力求生动活泼,融知识性、科学性和趣味性于一体,使学生在饶有趣味的数学故事和数学游戏中,走进知识和智慧之门。

4.智巧性:为了培养小学生思维的灵活性与应变能力,我们选取了一类不需要进行复杂计算,而是通过机智地思考获得答

前言

foreword

案的题目。

5. 开放性:本书特意选取了部分开放题,以利于学生的创造性思维。我们期望它能起到抛砖引玉的作用。

值丛书出版之际,我们衷心希望能够对我国的基础教育新课程改革作出积极贡献,借此机会祝全国的少年朋友充分发掘智慧潜能,促进身心健康发展,早日成为国家建设有用之材。

天津教育出版社的同志们对本书的出版给予大力的支持与帮助,在此,致以最诚挚的谢意。

编 者

目录

CONTENTS

第一课	数学故事	1
第二课	列方程(组)解应用题	7
第三课	不定方程	15
第四课	循环小数、分数、繁分数	20
第五课	速算与巧算(一)	29
第六课	速算与巧算(二)	36
第七课	乘法原理	42
第八课	加法原理	49
第九课	逻辑推理	54
第十课	列举法	65
第十一课	单位“1”的转化	71
第十二课	分数、百分数应用题	79
第十三课	单位分数	86
第十四课	方阵	94
第十五课	圆和扇形	102
第十六课	正方体和长方体的计算问题	110
第十七课	比和比例应用题	115
第十八课	圆柱体和圆锥体的计算问题	122
第十九课	切割体	128
第二十课	从整体看问题	134
第二十一课	图形的割补	139
第二十二课	最大最小问题	145
第二十三课	中国剩余定理	152
第二十四课	抽屉原则	157
第二十五课	染色问题	161
第二十六课	包含与排除	166

目录

CONTENTS

第二十七课 牛吃草问题	171
第二十八课 综合练习	178
第二十九课 数学游戏	185
第三十课 开放性问题	189
参考答案	196

第一课

数学故事

一、分马

从前有一位老牧人,他有三个儿子.一天老人病危,他将三个儿子叫到床前并对他们说:“我没有什么遗产留给你们,咱家仅有的也就是这 17 匹马,我死后这些马分给你们哥仨,老大分 $\frac{1}{2}$,老二分 $\frac{1}{3}$,老三分 $\frac{1}{9}$.可有一样——不许把马杀掉.”

过了几天,老牧人去世了.兄弟三人开始分这 17 匹马.但是,无论怎么分,也无法按老牧人的遗愿分掉,因为 $17 \times \frac{1}{2}$, $17 \times \frac{1}{3}$, $17 \times \frac{1}{9}$ 都不是整数.大哥说:如果是 18 匹马就好了,可惜只有 17 匹.小弟听了大哥的话,忽然眼睛一亮想出一个办法:“我们何不借一匹马来分呢?”大哥连连摇头:“使不得!我们借来一匹马,虽然好分,可是分完后,借来的这匹马又由我们三个人谁来还呢?”小弟胸有成竹:“二位哥哥请放心,我自有办法.”大哥和二哥也只好依了小弟.于是,他们向邻居借了一匹马,这样共 18 匹马,依父亲的遗嘱算:老大分得 9 匹,老二分得 6 匹,老三分得 2 匹.令老大、老二惊奇的是,分完后恰好剩了一匹马,他们把剩下的这匹马又还给了邻居.

同学们,你们知道这是怎么回事吗?

其实,这个问题乍一看,似乎有些蹊跷,但仔细一分析,奥妙就显见了:

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{9} = \frac{17}{18}$$

也就是说:兄弟三人总共分得的份数不是1而是 $\frac{17}{18}$,加上借来的一匹马($\frac{1}{18}$)后,共为1.这时再按老牧人的遗嘱去分就能办到.这就是为何起初不好分,借了一匹马就好分了,分完后又还掉这匹马的缘由.

我们把这种方法叫做“借来还去法”。“借”的技巧就是:当要分的物体总共分得的份数不是1而是一个真分数,所分物体的数目正好是分母时,我们就借(分母-分子)个物体,分完后再把所借的物体还回去即可.

你能举两个这样的例子吗?

练习

1. 一幼儿园有41件玩具,如果将其中的 $\frac{1}{2}$ 分给小班的小朋友, $\frac{1}{3}$ 分给中班的小朋友, $\frac{1}{7}$ 分给大班的小朋友,小、中、大班各分得多少件玩具?

2. 红光小学买了46根跳绳,如果将其中的 $\frac{1}{3}$ 分给六年级, $\frac{1}{4}$ 分给五年级, $\frac{1}{6}$ 分给四年级, $\frac{1}{12}$ 分给三年级, $\frac{1}{12}$ 分给二年级, $\frac{1}{24}$ 分给一年级,每个年级各分得多少根跳绳?

其实,同学们只要仔细观察就不难发现,“借”的技巧不仅在解智力题时常遇到,就是在解数学题中也是常常用到的一种解题方法,用这种“借来还去法”也可以解下面这类的问题:

例 一个啤酒厂为了回收空酒瓶,规定每3个空酒瓶可以换

一瓶啤酒。小王叔叔买了 20 瓶啤酒，喝完之后拿空酒瓶换酒喝，他一共可以喝到多少瓶啤酒？

解：(1)喝完买来的 20 瓶啤酒；

(2) $20 \div 3 = 6 \cdots 2$ ，用 20 个空瓶中的 18 个换 6 瓶啤酒，又可以喝到 6 瓶啤酒；

(3) $(2 + 6) \div 3 = 2 \cdots 2$ ，用 8 个空瓶中的 6 个换 2 瓶啤酒，又可以喝到 2 瓶啤酒；

(4) $(2 + 2) \div 3 = 1 \cdots 1$ ，用 4 个空瓶中的 3 个换 1 瓶啤酒，又可以喝到 1 瓶啤酒；

(5)现在只剩下 $1 + 1 = 2$ (个)空瓶，该怎么办呢？“借”1 个空瓶，与这 2 个空瓶合起来刚好可以换 1 瓶啤酒，喝完之后，“还掉”借来的空瓶。

这样，小王叔叔一共可以喝到啤酒

$$20 + 6 + 2 + 1 + 1 = 30 \text{ (瓶)}.$$

有的同学 in 解答这道题的时候，做到第(4)步就完了，他们不知道怎样处理最后剩下的 2 个空瓶。这就需要脑筋转转弯。

按照这种“借来还去”的思路，本题还有更为简便的解法：先喝完买来的 20 瓶啤酒，然后“借”10 个空瓶，与 20 个空瓶合起来，可以换到 $(20 + 10) \div 3 = 10$ (瓶)啤酒，喝完之后，“还掉”借来的 10 个空瓶。这样，小王叔叔一共可以喝到 $20 + 10 = 30$ (瓶)啤酒。

练习

3. 一个汽水厂规定每 3 个空汽水瓶可以换一瓶汽水。小明买了 10 瓶汽水，他一共可以喝到多少瓶汽水？

二、数学皇冠上的明珠

早在二百多年前，德国有一位数学家，叫哥德巴赫，他通过

长时间的运算发现了一个数学规律:大于2的偶数,可以写成两个素数之和.

同学们知道:

偶数,就是可以用2整除的整数,如2,4,6,8,10,...

素数,就是除了1和它自身以外,不能被其他整数整除的数,如2,3,5,7,11,...这个规律用算式表示为:

$$4 = 2 + 2,$$

$$6 = 3 + 3,$$

$$8 = 3 + 5,$$

$$10 = 5 + 5,$$

.....

哥德巴赫发现这个规律后,异常兴奋.

但是,他深知,这还仅仅是猜想,要想使这个规律得到数学界的公认,成为数学定理,它必须给予严格的证明,即证明这个规律对所有大于2的偶数都是成立的.于是,他不分昼夜全身心投入到证明这一猜想的工作中,意想不到的,这个看起来很简单的问题,竟难以证明.

怎么办呢?哥德巴赫急的一筹莫展.看来也只好求助于当时最有名的数学家欧拉了.

于是,哥德巴赫把自己的猜想写信告诉了欧拉.

欧拉收到哥德巴赫的信后,被哥德巴赫的猜想深深吸引住了.他立即对哥德巴赫的猜想作了大量的演算、推理,想方设法,力求证明它.然而,这个一生中发现过几十条重要定理和公式的数学家,却怎么也征服不了这个看似简单的猜想.由于积劳成疾,欧拉终于病倒了,后来双目失明,可他一天也没有中断过思考.后来,当欧拉意识到自己将不久于人世,在有生之年已证明

不了哥德巴赫猜想时,这位才华盖世又谦虚好学的数学大师,便把哥德巴赫猜想公布于世.请他的同行们解决.不久,欧拉带着遗憾,带着未了的心愿永远地离开了这个世界.

随着哥德巴赫猜想的公布,数学界轰动了.多少数学家绞尽脑汁,可仍无法解决这一问题.人们便把这个问题比作数学皇冠上的明珠,只有最有智慧的人,才能将它摘取下来.

直到1920年,研究才有了点进展,挪威数学家布朗证明了:每个大偶数,写成两个数之和,这两个数虽然不一定是素数,但是它们的素因子都不超过9个.

什么是一个数的素因子呢?就是:一个数等于几个素数的乘积,这些素数,就是这个数的素因子,例如: $42 = 2 \times 3 \times 7$,素数2,3,7就是42的素因子,也就是42的素因子总共是3个.

后来,有人进一步证明了:每个大偶数,可以写成这样的两个数之和,这两个数的素因子都不超过7个.为方便起见,人们把上面的两个结果,分别记作“9+9”和“7+7”.

接着又有一些著名的数学家证明了“6+6”和“5+5”,直到1965年得出了“1+3”.也就是证明了:一个大偶数可以写成这样的两个数之和:其中一个素数,另一个素因子不超过3个.

如果能证明出“1+2”,最后证明出“1+1”,那么哥德巴赫猜想就被证明了.然而每前进一步是多么艰难,往往需要数学家们几年、十几年,甚至几十年的探索才可能攀登下一步.1937年,我国数学家陈景润,发表了一篇重要论文,不仅轰动了整个数学界,而且几乎中国的普通老百姓都略知一二,这便是“一个大偶数可以写成这样的两个数之和:其中一个素数,另一个素因子不超过2个.”也就是说陈景润征服了多少数学家要征服又未能征服的“1+2”这个难题.这个定理被命名为“陈氏定理”.当时,

各国数学家纷纷来信称赞他所取得的杰出的成就,说他移动了“群山”。

现在,离最后夺取这颗数学皇冠上的明珠只有一步之遥了.然而这又是多么艰难的一步啊.距陈景润证明“ $1+2$ ”已有三十多遍了,许多数学家仍在艰难探索中,这颗灿烂的明珠最终属于谁呢?历史告诉我们,他必将属于具有渊博的数学知识而又有坚忍不拔的毅力的人。

思考题

1. 什么是哥德巴赫猜想?
2. 陈氏定理的内容是什么?

第二课

列方程(组)解应用题

1. 列方程(组)解应用题时,就是用字母恰当地代替未知数,字母和已知量处于同等的地位,然后根据垫在于问题中的等量关系,把已知量、未知量的关系用一(几)个等式表示出来,即得方程(组),求出方程(组)的解,使应用题得以解答.

2. 列方程(组)解应用题的一般步骤是:审题→选元→列代数式→列方程(组)→解方程(组)→检验→做结论.

审题:审题就是要弄清题目中事物的已知量和未知量间的基本数量关系.

选元:合理选择未知数是解题的关键步骤之一.一般设直接未知数,即把题目所求设为.特殊情况下也可设间接未知数 $x(y)$,即把与所求量相关的某个变量设作 $x(y)$.

列代数式:把题目中用语言叙述的数量关系用代数式表示出来.列代数式时应特别注意实际问题中所具有的基本关系.

列方程(组):根据题目所设的条件,利用等量关系布列含有未知数的等式—方程(组).

解方程(组):求未知数 $x(y)$.

检验:检查验证方程的解是否合乎题意.

做结论:写出正确的答语.

例1 一位妇女在河边洗碗,邻居问:“家里来了多少客人,要用这么多碗?”她回答说:“客人每两位合用一个菜碗,每三位合用一个汤碗,每四位合用一个饭碗,共用 65 个碗.”她家里究竟来了多少位客人?(中国古代数学问题)

分析:题目中有很多日常语言,找出来后用译式法翻译成代数语言.

设她家里来了 x 位客人.

日常语言	代数语言
来了多少位客人	x 位
共用多少个菜碗	$\frac{x}{2}$ (个)
共用多少个汤碗	$\frac{x}{3}$ (个)
共用多少个饭碗	$\frac{x}{4}$ (个)
共用多少个碗(65)	$\left(\frac{x}{2} + \frac{x}{3} + \frac{x}{4}\right)$ (个)

于是可以列出方程解应用题.

解:设她家里来了 x 位客人.

$$\begin{aligned}\frac{x}{2} + \frac{x}{3} + \frac{x}{4} &= 65, \\ 6x + 4x + 3x &= 780, \\ 13x &= 780, \\ x &= 60.\end{aligned}$$

答:她家里来了 60 位客人.

例 2 师徒两人加工一批零件,徒弟先加工 240 个,然后师傅和徒弟共同加工,完成任务时,师傅加工的零件比这批任务的 $\frac{3}{8}$ 少 40 个,已知师徒工作效率的比是 5:3,这批零件有多少个?

分析:设这批零件有 x 个.

日常语言	代数语言
师徒共同加工的零件有多少个?	$x - 240$ (个)

师傅加工的零件有多少个?

(比这批任务的 $\frac{3}{8}$ 少40个)

$$\frac{3}{8}x - 40(\text{个})$$

师傅加工的零件有多少个?

(师徒工作效率的比是5:3)

$$\frac{5}{8}(x - 240)(\text{个})$$

于是可以列出方程解应用题.

解:设这批零件有 x 个.

$$\frac{5}{8}(x - 240) = \frac{3}{8}x - 40,$$

$$\frac{5}{8}x - 150 = \frac{3}{8}x - 40,$$

$$\left(\frac{5}{8} - \frac{3}{8}\right)x = 150 - 40,$$

$$x = 440(\text{个}).$$

答:这批零件有440个.

练习

1. 有人问杨老师:“你班里有多少学生?”杨老师说:“我们班现在有 $\frac{1}{2}$ 学生在参加数学竞赛, $\frac{1}{4}$ 的学生在参加音乐兴趣小组, $\frac{1}{7}$ 的学生在阅览室,还剩3个女同学在看电视”.则杨老师班里学生的人数是多少?

2. 有一篮苹果,发给幼儿园小朋友吃,第一次拿出全部的 $\frac{1}{2}$ 又1个,第二次拿出剩下的 $\frac{1}{5}$ 又4个,第三次拿出剩下的 $\frac{1}{4}$ 又3个,第四次拿出剩下的 $\frac{1}{3}$ 又1个,这时篮里只剩下1个苹果了.篮里原来有苹果多少个?

例 3 一组割草人要把两块地的草割完,大的一块比小的一块大一倍.上午全部人都在大的一块草地割草,下午一半人仍留在大块草地上,到傍晚时正好把草割完,另一半人去割小块草地的草,到傍晚时还剩下一小块.这一小块由一个割草人再用一天时间刚好割完.这组割草人共有多少人?

分析:由“大的一块比小的一块大一倍”可知,大的一块是小的一块的 2 倍,若将小的一块用正方形表示,大的一块用长是正方形边长的 2 倍,宽是正方形边长的长方形表示,如图 2-1

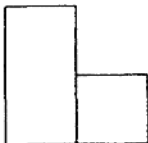


图 2-1

1. 由题意可知,小块草地是两块草地的 $\frac{1}{3}$,而一天内割完两块草地需要的人数比实际参加的人数多 1 人,一天内割完小块草地需要的人数占需要总人数的 $\frac{1}{3}$,一半人割半天,相当于需要人数的一半,则一天内割完小块草地需要的人数比实际人数的 $\frac{1}{4}$ 多 1 人.因此,可以列出方程求解.

解:设这组割草人共有 x 人.

$$\frac{x+1}{3} = \frac{x}{2} \times \frac{1}{2} + 1,$$

$$4x + 4 = 3x + 12,$$

$$x = 8.$$

也可以列下列方程:

$$\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right)x = 1 + \frac{1}{3} \text{ 或 } \frac{2}{3}(x+1) = \frac{x}{2} + \frac{x}{4}.$$

还可以用算术方法解:

$$\left(1 + \frac{1}{3}\right) \div \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right).$$

答:这组割草人共有 8 人.

例 4 一项工程,甲、乙两人合作 6 天能完成 $\frac{5}{6}$,若单独做,甲完成

$\frac{1}{3}$ 与乙完成 $\frac{1}{2}$ 所需的时间相等.问单独做甲、乙各需要多少天?

分析:由于甲完成 $\frac{1}{3}$ 与乙完成 $\frac{1}{2}$ 所需的时间相等,所以甲、乙的劳动效率之比为 2:3,如果设甲单独做需要 x 天,那么乙单独做就需要 $\frac{2}{3}x$ 天.甲、乙每天就完成工程的 $\left(\frac{1}{x} + \frac{3}{2x}\right)$;又因为甲乙两人合作 6 天能完成 $\frac{5}{6}$,所以甲、乙每天完成工程的 $\frac{5}{6} \div 6 = \frac{5}{36}$.那么我们可以利用以上分析得到的等量关系列出方程.

解:设甲单独做需要 x 天.

$$\frac{1}{x} + \frac{3}{2x} = \frac{5}{36},$$

$$\frac{1}{x} \left(1 + \frac{3}{2}\right) = \frac{5}{36},$$

$$\frac{1}{x} \times \frac{5}{2} = \frac{5}{36},$$

$$x = \frac{5}{2} \times \frac{36}{5},$$

$$x = 18.$$

这样,乙就需要 $\frac{2}{3} \times 18 = 12$ (天).

答:甲单独做需要 18 天,乙单独做需要 12 天.

练习

3. 现在父亲的年龄是儿子的 3 倍少 2,再过 10 年,父亲的年龄是儿子的 2 倍.现在父亲多少岁?

4. 在公路上汽车 A, B, C 分别以每小时 80, 70, 50 千米的速度匀速行驶, A 从甲站开往乙站, 同时, B, C 从乙站开往甲站. A 在与 B 相遇后两小时又与 C 相遇, 则甲、乙两站相距多少公里?

例 5 《孙子算经》上记载了这样的“鸡兔同笼”问题: 今有鸡兔同笼, 上有三十五头, 下有九十四足, 问鸡兔各多少只?

分析: 此题有很多解法, 这里把要求的数都设为未知数, 设鸡兔的个数分别为 x 和 y , 则根据头和足的总数可以列出两个方程, 它们构成一个方程组.

解: 设鸡兔的个数分别为 x 和 y , 则有

$$\begin{cases} x + y = 35, & \text{①} \\ 2x + 4y = 94. & \text{②} \end{cases}$$

在方程②的两边同除以 2, (2) 可以化简为

$$x + 2y = 47. \quad \text{③}$$

由①得

$$x = 35 - y. \quad \text{④}$$

将④代入③得

$$\begin{aligned} (35 - y) + 2y &= 47, \\ 35 + y &= 47, \\ y &= 12. \end{aligned}$$

把 $y = 12$ 代入④得

$$x = 35 - 12 = 23.$$

$$\therefore \begin{cases} x = 23, \\ y = 12. \end{cases}$$

再把这对未知数的值代入原方程组中的每一个方程中进行检验.