

现代应用数学手册

《现代应用数学手册》编委会

分析与方程卷



清华大学出版社

<http://www.tup.tsinghua.edu.cn>

《现代应用数学手册》编委会

现代应用数学手册

分析与方程卷

清华大学出版社

内 容 简 介

本卷包括一元微积分、多元微积分、复变函数、常微分方程、矩阵分析与线性系统、系统辨识、偏微分方程、积分方程共 8 部分内容. 书中从理论与应用方面深入浅出地阐述了各分支中的基本概念、基本理论与基本方法. 内容注重背景, 强调应用, 便于读者加深理解、掌握与应用. 本书可供理、工、农、医、经管等领域的广大科技人员, 大、中专院校教师、学生及研究生使用.

版权所有, 翻印必究. 举报电话: 010-62782989 13501256678 13801310933

图书在版编目(CIP)数据

现代应用数学手册. 分析与方程卷/《现代应用数学手册》编委会编著. —北京: 清华大学出版社, 2006. 6

ISBN 7-302-06261-7

I. 现… II. 现… III. 应用数学—手册 IV. O29-62

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2003)第 004204 号

出 版 者: 清华大学出版社 地 址: 北京清华大学学研大厦
http://www.tup.com.cn 邮 编: 100084
社 总 机: 010-62770175 客户服务: 010-62776969

责任编辑: 刘 颖

印 刷 者: 北京鑫丰华彩印有限公司

装 订 者: 三河市春园印刷有限公司

发 行 者: 新华书店总店北京发行所

开 本: 140 × 203 印张: 33.875 字数: 848 千字

版 次: 2006 年 6 月第 1 版 2006 年 6 月第 1 次印刷

书 号: ISBN 7-302-06261-7/O · 276

印 数: 1 ~ 3000

定 价: 59.90 元

《现代应用数学手册》

编辑委员会

主 编：马振华

编 委：（依姓氏笔画序）

马振华 刘坤林

陆 璇 陈景良

郑乐宁 顾丽珍

葛余博

分析与方程卷

责任编辑委 刘坤林

章 次	编 者	校 者
1 ~ 4	柏 瑞	胡 露 犀
5	胡 露 犀	马 振 华
6	黄昭度	胡 露 犀
7 ~ 8	胡 露 犀	马 振 华
9	胡 露 犀 黄昭度	马 振 华
10~12	胡 露 犀	马 振 华
13	黄昭度	胡 露 犀
14	黄昭度	马 振 华
15~20	范景媛	马 振 华
21~26	陈水莲	李建国
27~32	刘 坤 林	姜启源
33~40	刘 坤 林	姜启源
41~46	高策理	李建国
47~53	靳志和 高策理	李建国

序

随着计算机科学技术的飞速发展,人类正进入信息时代.

信息时代是应用数学大发展的时代,人类长期积累起来的知识体系,正面临着第3次数学化.数学思想,数学方法与数学模型随着计算机的广泛应用,日益渗透到各种行业中.

当代,除了古典的数学理论(初等数学,微积分学,微分方程,复变函数等)早已得到广泛的应用外,一些比较抽象的现代数学理论(集合论、数理逻辑、范畴论、抽象代数、泛代数、代数几何、拓扑学、泛函分析等)以及一些新兴的数学理论(随机过程、时间序列、运筹学、最优化理论、有限元方法、模糊数学、混沌与分形等)也逐渐成为社会生产、科学实验、工程技术及经济管理中不可缺少的工具,应用数学的适用范围正在迅速扩大.

为了满足日益增长的社会需求,清华大学应用数学系《现代应用数学手册》编委会,组织编写了这套多卷集的手册.

本书读者是理、工、医、农、经管等领域的广大工程技术人员、科研人员、大、中专院校的师生、学生、研究生及其他使用数学工具的实际工作者.其中有些内容对于中学生也是适用的.

编者力求使本书成为一套高质量的工具书,它有下列特点:

(1) **内容“新颖”** 本书力求做到内容现代化,除用现代观点介绍古典内容外,对已出现的新理论、新方法尽量优先选入.

(2) **突出“应用”** 本书在选材上突出数学理论的应用,以通

通俗易懂的方式着重介绍在现代科学技术等实际领域中应用广泛的数学理论和方法。

(3) **紧密“结合”计算机应用** 为了更有效地应用数学方法解决各种实际问题,广大科技人员迫切要求数学方法与计算机应用相结合,提高工作效率。为此,本书在结合计算机应用方面给予特别的重视。

(4) **版面设计“合理”,便于迅速查阅** 为方便读者使用,本书采用了一套较为完善的索引体系。除正文中章、节的编号沿用国际通行的十进制编号外,对于重要的定义、定理、例题、公式、图、表等均有编号。读者可以从(1)目录,(2)中文—外文名词索引,(3)外文—中文名词索引等三种途径,迅速找到所需资料。此外,本书对载人的外国科学家人名,尽量采用“名从主人”的原则。

(5) **数学符号力求“统一”与国际化** 鉴于目前国内各种文献、书籍中使用的数学符号不够统一与国际化,增加了读者阅读时的困难。本书除按国家标准 GB 3102—93 外,兼用国际数学界权威著作《数学大百科辞典》(Encyclopedic Dictionary of Mathematics, EDM)中的符号为标准。对于不在上述文献中的其他新符号,则选用较为流行者。

本手册各卷内容独立完整,便于个体和团体读者按需选购。当前应用数学急剧发展,编委会在条件成熟的时候,还将增出新卷。

本书的编撰是与清华大学应用数学系领导,特别是萧树铁教授的热心支持,编辑委员会各位编委的通力协作,校内外的许多教师、科研工作者的大力支持分不开的,编者深致谢意。

在编辑出版过程中,还得到清华大学出版社的热情支持。

本书从编撰到出版,历尽艰辛,饮水思源,编者还要感谢本书的发起人,清华大学应用数学系陆璇教授,北京出版社李利军编辑

及已故的北京出版社社长王政人先生.

最后,编者还要对夫人王华敏表示谢忱,没有她的深刻理解、热情支持与持久的帮助,本书也难以问世.

主编 马振华

1997 年于清华园

符号表

$\mathbb{Q}$

有理数集

$\mathbb{R}$

实数集

$\inf E / \inf_{x \in E} \{x\}$

下确界

$\sup E / \sup_{x \in E} \{x\}$

上确界

$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = A, a_n \rightarrow A$

数列 $\{a_n\}$ 收敛于 A , 或以 A 为极限

$\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} a_n (\lim_{n \rightarrow \infty} a_n)$

上(下)极限

$\left(\frac{dy}{dx}\right)_{x=x_0}, f'(x_0)$

函数 f 在 x_0 处的导数

$f''(x), \frac{d^2 y}{dx^2}, \frac{d^2 f}{dx^2}$

二阶导函数

$f^{(n)}(x), \frac{d^n y}{dx^n}, \frac{d^n f}{dx^n}$

n 阶导函数

$\int f(x) dx$

$f(x)$ 在 I 上的不定积分

$6!! = 2 \times 4 \times 6$

二阶阶乘

$7!! = 1 \times 3 \times 5 \times 7$

二阶阶乘

$\sum_{n=1}^{\infty} u_n = u_1 + u_2 + \cdots$

无穷级数

$+ u_n + \cdots$

$\sum_{i,j=1}^{\infty} a_{i,j}$

二重级数

$\sum_{i,j,\dots,l=1}^{\infty} a_{i,j,\dots,l}$

多重(r -重)级数

$$\prod_{n=1}^{(\infty)} b_n = b_1 b_2 \cdots b_n \cdots$$

无穷乘积

$$\sum_{n=1}^{(\infty)} u_n(x) = u_1(x) + u_2(x) + \cdots + u_n(x) + \cdots$$

函数项级数

$$\sum_{n=0}^{(\infty)} a_n (x - x_0)^n = a_0 + a_1 (x - x_0) + \cdots + a_n (x - x_0)^n + \cdots$$

幂级数

$$\| \cdot \|$$

范数

$$\int_a^{+\infty} f(x) dx,$$

无穷限广义积分

$$\int_{-\infty}^b f(x) dx \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx$$

$$\mathbb{R}^n = \underbrace{\mathbb{R} \times \cdots \times \mathbb{R}}_n$$

n 维(重) 实空间

$$\mathcal{E}^n(\mathcal{E}^m)$$

$n(m)$ 维欧氏空间

$$\forall$$

全称量词, 所有的 ……

$$\exists$$

存在量词, 存在 …… , 至少有 ……

$$B_0(x_0; \delta), B(x_0)$$

x_0 的 δ 邻域, x_0 的邻域

$$\rho(x, y) = \|x - y\|$$

点 x, y 的距离

$$\emptyset$$

空集

$$\rho(A, B) = \inf_{x \in A, y \in B} \rho(x, y)$$

集合 A, B 间的距离

$$d(S) = \sup_{x \in S, y \in S} \rho(x, y)$$

集合 S 的直径

$$\lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ x \in D}} f(x) = A, \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = A,$$

多元函数的极限

$$\lim_{\substack{x_1 \rightarrow x_1^* \\ \cdots \\ x_n \rightarrow x_n^*}} f(x_1, \cdots, x_n) = A$$

$\frac{\partial f(\mathbf{x}_0)}{\partial x_i}, \frac{\partial f}{\partial x_i} \Big _{\mathbf{x}=\mathbf{x}_0}, f'_{x_i}(\mathbf{x}_0),$ $f'_{x_i}(x_1^0, \dots, x_n^0),$ $\frac{\partial f(x_1^0, \dots, x_n^0)}{\partial x_i}, f'_{x_i} \Big _{\mathbf{x}=\mathbf{x}_0}$	一阶偏导数
$\frac{\partial f(\mathbf{x})}{\partial \mathbf{l}}$	方向导数
grad, ∇	Nabla 算子
$\frac{\partial^n f(\mathbf{x})}{\partial x_{k_n} \cdots \partial x_{k_2} \partial x_{k_1}}$	n 阶偏导数
$d^n f$	n 阶全微分
$D_x f(\mathbf{x}, \mathbf{y}), D_y f(\mathbf{x}, \mathbf{y})$	函数 $f(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ 对向量 $\mathbf{x}, \mathbf{y}$ 的偏导数
$\int_a^b f(x, y) dy$	含参量积分
$S^+(f, \Delta), S_-(f, \Delta)$	f 关于划分 Δ 的大和及小和
∇^2	Laplace 算子
$\Phi_{j_1 \cdots j_r}^{i_1 \cdots i_r} = \Phi(r^{i_1}, \dots, r^{i_r},$ $g_{j_1}, \dots, g_{j_r})$	张量
$\Phi \otimes \Psi$	Φ 和 Ψ 的张量积
$\Phi \wedge \Psi$	Φ 与 Ψ 的外积
$\delta_{j_1 \cdots j_r}^{i_1 \cdots i_r}$	r 阶广义 Kronecker 符号
$\text{Res}(f, a)$	函数 $f(z)$ 在孤立奇点 a 处的函数
$D^k = \frac{d^k}{dx^k}$	微分算子
$\mathcal{L}$	Laplace 变换算子
$\ \mathbf{x}\ _1, \ \mathbf{x}\ _p, \ \mathbf{x}\ _\infty$	向量的范数
$\mu(\mathbf{A})$	矩阵 $\mathbf{A}$ 的测度
$\mathbf{A}'(x) = \frac{d\mathbf{A}(x)}{dx}$	矩阵 $\mathbf{A}(x)$ 的导数

$$\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial \mathbf{A}}$$

矩阵 $\mathbf{B}$ 对 $\mathbf{A}$ 的导数

def

定义为

$\mathcal{Z}$

Z 变换

$\oplus$

模 2 加法

$\sum \oplus$

模 2 加法求和

$F[f], \hat{f}$

$f(x)$ 的 Fourier 变换

$F^{-1}[g], \check{g}$

$g(\lambda)$ 的 Fourier 逆变换

$f_1 * f_2$

$f_1(x)$ 与 $f_2(x)$ 的卷积

$$F(s) = \int_0^{+\infty} e^{-s't} f(t) dt$$

$f(t)$ 的 Laplace 变换

$$f(t) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\sigma_0 - i\infty}^{\sigma_0 + i\infty} e^{s't} F(s) ds$$

Laplace 逆变换

目 录

符号表	9
-----------	---

一 元 分 析

1 函数、数列、极限、函数连续性	1
1.1 实数	1
1.1.1 实数的定义	1
1.1.2 实数的性质及四则运算	2
1.1.3 关于实数的一些基本定理	7
1.2 函数与数列	9
1.2.1 变量变化区间	9
1.2.2 函数概念及分类	10
1.2.3 初等函数及其图象	12
1.2.4 序列	25
1.3 极限	26
1.3.1 数列极限	26
1.3.2 聚点	28
1.3.3 判断数列极限存在的若干定理	29
1.3.4 收敛数列的性质及运算	32
1.3.5 函数极限的定义	32
1.3.6 判断函数极限存在的若干定理	33
1.3.7 函数极限的性质及运算	35
1.3.8 无穷小量与无穷大量	37

1.4	函数连续性	41
1.4.1	连续性的基本概念	41
1.4.2	连续函数的性质	44
1.4.3	一致连续(均匀连续)	45
2	一元函数微分学	46
2.1	导数与微分	46
2.1.1	基本概念	46
2.1.2	连续、可导、可微间的相互关系	48
2.1.3	微分法则及基本公式	49
2.1.4	高阶导数与高阶微分	52
2.2	微分学基本定理	55
2.2.1	Fermat 定理	55
2.2.2	微分中值定理	55
2.2.3	Taylor 公式	57
2.3	导数与微分的应用	59
3	一元函数积分学	68
3.1	不定积分	68
3.1.1	不定积分概念	68
3.1.2	积分法	69
3.2	定积分	80
3.2.1	概念与性质	80
3.2.2	定积分计算	84
3.3	定积分应用	89
3.3.1	平面域的面积	89
3.3.2	空间体的体积	90
3.3.3	质心与形心	95
3.4	积分表	98

4	级数	114
4.1	数项级数	114
4.1.1	基本概念	114
4.1.2	级数收敛性的基本定理	115
4.1.3	正项级数的判敛	117
4.1.4	任意项级数	125
4.1.5	绝对收敛级数与条件收敛级数的某些特性、 级数加快收敛法	128
4.1.6	二重级数	133
4.1.7	无穷乘积	136
4.2	函数项级数	141
4.2.1	基本概念	141
4.2.2	一致收敛的判别法	144
4.2.3	一致收敛函数项级数的性质	146
4.3	幂级数	149
4.3.1	基本概念	149
4.3.2	幂级数性质	151
4.3.3	幂级数的运算	153
4.3.4	Taylor 级数	155
4.4	Fourier 级数	162
4.4.1	基本概念	162
4.4.2	Fourier 系数的性质	168
4.4.3	Fourier 级数的收敛性	170
4.4.4	Fourier 级数的一致收敛性	172
4.4.5	Fourier 级数的逐项积分与逐项微分	173
4.4.6	Fourier 级数的求和	174
4.4.7	Fourier 级数的应用	178
5	广义积分	181
5.1	无穷限广义积分	181
5.1.1	基本概念	181

5.1.2	收敛性判别法	182
5.2	无界函数的广义积分	184
5.2.1	基本概念	184
5.2.2	收敛性判别法	185

多元分析

6	向量代数	194
6.1	n 维向量空间中的代数	194
6.1.1	n 维向量空间和基	194
6.1.2	向量的内积与度量矩阵	196
6.1.3	逆变基	198
6.1.4	坐标变换与基的转换	200
6.2	三维向量空间中的代数	200
7	多元函数及其极限、连续性	206
7.1	n 维欧氏空间 E^n	206
7.1.1	概念	206
7.1.2	n 维欧氏空间中的点集	207
7.1.3	n 维欧氏空间的性质	210
7.2	多元函数	211
7.2.1	映射	211
7.2.2	多元函数的概念	212
7.3	多元函数的极限及连续性	214
7.3.1	多元函数的极限	214
7.3.2	二元函数的累次极限	215
7.3.3	多元函数的连续性	216
7.4	多元向量函数及其极限、连续性	217
7.4.1	概念	217
7.4.2	向量函数的极限及连续性	219
7.5	附录 γ^3 中的几何图形及公式	221

8 多元函数的微分学	232
8.1 偏导数	232
8.2 全微分	234
8.3 复合函数的偏导数与全微分	236
8.4 方向导数与梯度	239
8.4.1 方向导数	239
8.4.2 梯度	240
8.5 高阶偏导数与高阶全微分	242
8.5.1 高阶偏导数	242
8.5.2 高阶全微分	244
8.6 Taylor 公式	245
8.7 隐函数及其微分法	246
8.8 空间曲线及其切线	248
8.9 光滑曲面与切平面	250
8.10 极值	253
8.10.1 极值	253
8.10.2 条件极值	255
9 向量函数的微分学	257
9.1 一元向量函数的微分学	257
9.2 多元向量函数的可微性与导数	261
9.2.1 基本概念	261
9.2.2 求导法则	266
9.2.3 方向导数	268
9.2.4 Taylor 公式	268
9.3 向量函数的反函数	269
9.4 由方程组确定的隐函数组	272
10 含参量积分	274
10.1 含参量积分	274
10.2 含参量广义积分	276