

新修订本

标准化考试参考资料
高中数学



选择题分析

天津教育出版社

G633.6-44
15

G633.6-44/LG18
G633.6-04

LG18

高中数学

选择题分析

(新修订本)

李根水 钟 毓

天津教育出版社

再版说明

标准化考试，是国外对学生素质进行科学测试的一种成功的作法。我国正在试验和推广这种先进的考试方法。选择题是标准化试题的主要形式。

为了向广大教师和学生介绍这种题型的种类和解题方法，并为建立标准化试题库提供参考资料，我们组织编辑了初、高中数学、物理、化学、英语、语文各科选择题分析，为在我国尽快施行标准化考试做一些有益的工作。

为适应教学需要，我们根据国家教委新颁布的《全日制中学（各科）教学大纲》和近两年考试要求，再次修订了本套丛书，并增加了中国历史、世界历史、中学地理、中学生物《选择题分析》，期望对广大中学师生提供更合适的资料。

前 言

数学选择题，是近几年在我国兴起的一种新的命题形式，这种命题形式，已在许多重大考试（如高校招生考试，数学竞赛等）中被采用，并为越来越多的数学教师所接受，逐步推广应用于教学之中。为了使命题科学化、标准化，许多研究工作者和实际工作者对这种命题形式展开了多方面的研究工作。本书就是在这种背景下编纂而成的。

在数学教学中，采用选择题进行训练，有助于加强学生的数学基础知识和基本技能，发展思维的灵活性，提高正确迅速的运算能力、逻辑思维能力和空间想象能力，有利于提高辨析能力和判断能力。数学选择题不失为提高教学质量、检验教学效果的一种较好的手段。但它并不是唯一的手段，也并非完美无缺的，它需要在实践中不断得到完善和提高。

本书紧紧围绕全日制高中数学内容，首先介绍了选择题的类型和选择题的几种常见解法，然后分别就代数、立体几何、平面解析几何、微积分初步几部分内容编选了选择题600余道。章节顺序，悉遵课本编排，题目的编选，力求覆盖各章的基本概念、基本理论和基本运算，基本技能技巧则隐含于题目之中。本书各题的选择支中，有且只有一个是正确的。每题要求后面的“（ ）”，供读者填写所选正确答案之用。书中带“*”者，为选学内容。每章后，都附有

答案、部分提示或解题分析，对综合性较强、难度较大的题目还给出了较为详细的解答，供读者参考。

本书力求做到既能满足高中数学教学的需要，又能适应高中毕业总复习的需要，可供高中、中专学生及其他数学爱好者阅读，又可作为高中数学教师教学参考书，也为标准化考试提供参考资料。

由于编者水平所限，书中疏漏之处在所难免，敬希读者不吝赐教。

本书编写过程中，承蒙天津市数学学会王连笑同志详细校勘了部分原稿，特致谢意。

作者

1988年8月于天津

目 录

一、选择题的类型	1
二、选择题的几种常见解法	6

代数

三、幂函数, 指数函数, 对数函数	30
四、三角函数	57
五、两角和与差的三角函数	72
六、反三角函数和简单三角方程	91
七、数列与数学归纳法	107
八、不等式	121
九、行列式和线性方程组	135
十、复数	141
十一、*一元多项式和高次方程	158
十二、排列、组合和二项式定理	163
十三、概率	176

立体几何

十四、直线和平面	181
十五、多面体和旋转体	192
十六、*多面角和正多面体	211

平面解析几何

十七、直线	212
十八、圆锥曲线	222
十九、坐标变换	256
二十、参数方程, 极坐标	264

微积分初步

二十一、极限	278
二十二、导数和微分	287
二十三、导数的应用	295
二十四、不定积分	302
二十五、定积分及其应用	308

综合训练

二十六、综合训练	313
----------	-----

一、选择题的类型

在一个题中给出了一定的条件和几个结论，同时给出了解答要求，要你将适合要求的结论前的代号填在括号内，这类习题通常叫做选择题。在各种各样的知识和能力的书面考查中，选择题以其特有的形式和作用，正在受到普遍的重视，并被广泛地采用。

选择题的种类很多，可以从不同的角度进行分类。

从题目的性质来分，选择题一般可分为三种类型：

1. 定量型

要求从命题的条件出发，运用相应的数学公式、定理、法则等，来确定某些数学元素的数量关系。此类选择题偏重于计算和验证。

2. 定性型

要求从命题的条件出发，通过相应的数学定义、定理、某种性质或关系等，来判定所考察的数学元素是否具有某种性质或关系。此类选择题往往偏重于概念辨析、推理论证与空间想象。

3. 混合型

定量与定性两个方面都有要求，此类选择题常要用到多方面的数学知识。

从题目的形式来分，常见的选择题可分为三种类型：

1. 是非题

此类题目实际上是从“是与非两项中选出一项”的二项选择题，或者是从“正确与错误两项中选出一项”的二项选择题，从语法结构看，这类题常由一个未写明的一般疑问句和一个写明的判断句作答句构成。

〔例1〕下列说法是否正确，正确的在括号内填“√”，错误的填“×”：

(1) 非负数就是正数。 ()

(2) 能被2除尽的数是偶数。 ()

(3) 任意两个有理数之间必定还有有理数。 ()

(4) 如果 $a^x > b^y$ ，那么 $x > y$ 。 ()

(5) $\lg x^2$ 可以等于 $2 \lg (-x)$ 。 ()

用是非题便于考查学生对数学概念和性质的理解，学生答题也比较简单。在例1中，(1)、(2)、(4)是错误的，(3)、(5)是正确的。

学生解答是非题时，应该联想有关的数学概念和性质，细心推敲，周密思考，通过这类题目的练习，提高对有关概念和性质的辨析能力与判断能力。但由于选择仅有“是”与“非”二项，所以猜对的可能性较大，因而用是非题作为试题时信度不高。

2. 配对题

这类题目给出了几个条件和几个结论，要你将其中某个条件正确地与某个结论搭配成一个正确的命题。

〔例2〕已知函数(1)、(2)、(3)、(4)、(5)与函数性质(A)、(B)、(C)、(D)、(E)、(F)、(G)。请你将具有这些函数性质的所有字母标号，填入所

列函数后面的 () 内。答案可以用一次、几次或者一次也不用。

- 函数: (1) $y = \frac{1}{x}$, () ;
(2) $y = x^2 - x$, () ;
(3) $y = x^4 + x^2$, () ;
(4) $y = 2^x$, () ;
(5) $y = \lg x$, () .

性质:

- (A) 偶函数;
(B) 奇函数;
(C) 增函数;
(D) 函数有最小值;
(E) 函数的图象过原点;
(F) 函数的图象与 x 轴没有公共点;
(G) 函数 $y = f(x)$, 满足 $f(x_1 + x_2) = f(x_1) \cdot f(x_2)$.

解答这道选择题时, 我们必须对函数 (1)、(2)、(3)、(4)、(5) 分别考察 (A) ~ (G), 可以得出如下答案:

- (1) $y = \frac{1}{x}$, (B、F) ;
(2) $y = x^2 - x$, (D、E) ;
(3) $y = x^4 + x^2$, (A、D、E) ;
(4) $y = 2^x$, (C、F、G) ;
(5) $y = \lg x$, (C) .

用配对题便于考查某一部分基础知识之间的联系与区

别。解答此类题目时应该看清题目的要求，联想有关的基础知识，重视同类对象的结构和性质上的区别，周密分析，作出配对选择。

3. 多支选择题

这是一种有多个选择支的选择题，它是配对题的特例。多支选择题的条件只有一个对象，这个对象叫做题干；它的结论通常有三个、四个或五个对象，这几个对象叫做选择支。其中不正确的对象叫做干扰支。每一道多支选择题总是由题干和选择支构成，同时给出解答要求，在考题中还规定了计分方法。从能力上要求，此类选择题优于是非题。

如果给出的选择支，其解答要求中指出“正确的结论至少有一个”，那么我们就将所给的每个结论都要周密思考，将所有正确的结论都选出来。

在多支选择题中，有时要你将“不正确的关系”或“不满足的条件”选出来。例如：

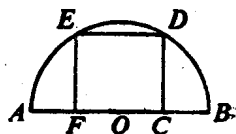


图 1-1

(1) 已知以 AB 为直径的半圆有一个内接正方形 $CDEF$ (如图 1-1)，其边长为 1，若 $AC = a$ ， $BC = b$ ，那么下面不正确的关系式是 ()

(A) $a - b = 1$.

(B) $ab = 1$.

(C) $a + b = \sqrt{5}$. (D) $a^2 + b^2 = 5$.

(2) 设有一个正数 x 恰好满足下面四个条件中的三个：

甲. $|x - 2.5| < 1.5$;

乙. $\sqrt{x^2+x+1}$ 不是整数;

丙. x 是整数;

丁. $\log_x 10 > 2$.

那么, x 不满足的条件是 ().

(A) 甲. (B) 乙. (C) 丙. (D) 丁. (E) 不能确定.

以上两题的答案是: (1) (D); (2) (C).

选择题的形式不同, 解法也不同. 如果不善于利用选择题的特点, 正确、迅速地作出判断, 而是去猜答案, 或当作常规题来解, 往往会浪费时间.

在多支选择题中, 常见“结论中有且只有一个正确”这种类型的题目, 下面我们来介绍这类题目的几种解法.

二、选择题的几种常见解法

1. 直接法

直接从条件出发，运用定义、定理、公式、性质进行推理，得出某一个正确的结论，再与所给的结论核对，选择相同结论的题号，这种判断方法叫做直接法。

〔例1〕三个数 a, b, c 不全为零的充要条件是（ ）。

- (A) a, b, c 都不是零。
- (B) a, b, c 中最多有一个是零。
- (C) a, b, c 中只有一个为零。
- (D) a, b, c 中至少有一个不是零。

要从本例四个判断中选出一个正确的判断，首先必须准确把握“充要条件”这个概念的含义，还应弄清“不全为零”、“都不是零”、“最多有一个是零”、“只有一个为零”这些数学用语的区别，用直接法可得(D)是正确的。

〔例2〕已知 $0 < a < 1, b > 1$ ，且 $ab > 1$ 那么，

$\log_a \frac{1}{b}, \log_a b, \log_b \frac{1}{b}$ 这三个数之间的大小顺序是

()。

- (A) $\log_a \frac{1}{b} < \log_a b < \log_b \frac{1}{b}$ 。

$$(B) \log_a b < \log_b \frac{1}{b} < \log_a \frac{1}{b}.$$

$$(C) \log_b \frac{1}{b} < \log_a \frac{1}{b} < \log_a b.$$

$$(D) \log_a b < \log_a \frac{1}{b} < \log_b \frac{1}{b}.$$

解：因 $\log_a \frac{1}{b} > 0$, $\log_a b < -1$, $\log_b \frac{1}{b} = -1$, 故

应选择 (B)。

〔例3〕如图2—1, $ABCD$ 为单位正方形, E, F 为 BC, CD 的中点, 沿 AE, EF, AF 折成一个四面体, 使 C, B, D 三点重合 (如图2—2), 那么这个四面体的体积等于 ()。

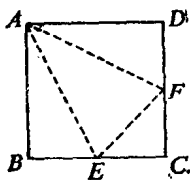


图 2-1

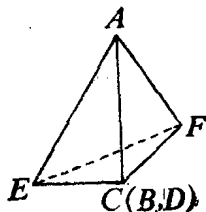


图 2-2

$$(A) \frac{1}{8}, \quad (B) \frac{1}{12}, \quad (C) \frac{1}{24}.$$

$$(D) \frac{\sqrt{2}}{24}, \quad (E) \frac{\sqrt{5}}{48}.$$

解：依题意知所求四面体的底面 ECF 为等腰直角三角形，其腰长为 $\frac{1}{2}$ ，四面体的高为1，这个四面体的体积为

$$V = \frac{1}{3} \cdot \left(\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \right) \cdot 1 = \frac{1}{24}. \text{ 故应选择 (C).}$$

〔例4〕设实数 m, n, x, y 满足 $m^2 + n^2 = a, x^2 + y^2 = b$ ，则 $mx + ny$ 的最大值是（ ）。

(A) $\frac{a+b}{2}$. (B) $\sqrt{ab}$. (C) $\sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}}$.

(D) $\frac{\sqrt{a^2+b^2}}{2}$.

解：由题设条件，联想到用三角代换。

$$\text{令} \begin{cases} m = \sqrt{a} \cos \alpha, \\ n = \sqrt{a} \sin \alpha; \end{cases} \quad \begin{cases} x = \sqrt{b} \cos \beta, \\ y = \sqrt{b} \sin \beta. \end{cases}$$

有 $mx + ny = \sqrt{ab} \cos(\alpha - \beta) \leq \sqrt{ab}$. 故选 (B)。

解此题时，学生往往会运用基本不等式，但却忽视取等号的条件，而导致误选 (A)。

〔例5〕已知函数 $f(x) = \frac{1 + \sin x - \cos x}{1 + \sin x + \cos x}$ 那么 $f(x)$

在其定义域内为（ ）。

- (A) 奇函数. (B) 偶函数.
(C) 既是奇函数，又是偶函数.
(D) 既非奇函数，又非偶函数.

解：常可看到这样的解法：利用奇函数的定义探

$$\begin{aligned} \text{求。因 } \frac{1 + \sin x - \cos x}{1 + \sin x + \cos x} &= \frac{2 \sin^2 \frac{x}{2} + 2 \sin \frac{x}{2} \cos \frac{x}{2}}{2 \cos^2 \frac{x}{2} + 2 \sin \frac{x}{2} \cos \frac{x}{2}} \\ &= \operatorname{tg} \frac{x}{2}, \end{aligned}$$

从而选 (A)。

但上面的解法实际是错误的。原因在于，在变形过程中扩大了原来函数的定义域。

原函数的定义域可如下法求得：

$$\begin{aligned} 1 + \sin x + \cos x \neq 0 &\Leftrightarrow 2 \cos \frac{x}{2} \left(\sin \frac{x}{2} + \cos \frac{x}{2} \right) \neq 0 \\ \Leftrightarrow \begin{cases} \cos \frac{x}{2} \neq 0, \\ \sin \frac{x}{2} + \cos \frac{x}{2} \neq 0 \end{cases} &\Leftrightarrow \begin{cases} x \neq (2k+1)\pi, \\ x \neq 2k\pi - \frac{\pi}{2}. \quad (k \in \mathbb{Z}) \end{cases} \end{aligned}$$

故原函数的定义域为

$$D = \{x | x \in \mathbb{R}, x \neq (2k+1)\pi, k \in \mathbb{Z}\}$$

$$\cap \{x | x \in \mathbb{R}, x \neq 2k\pi - \frac{\pi}{2}, k \in \mathbb{Z}\}.$$

根据奇偶函数的定义，对于任意的 $x \in D$ ，首先 $f(-x)$

必须有意义，即 $-x \in D$ 。若取 $\frac{\pi}{2} \in D$ ，显然有 $-\frac{\pi}{2} \notin D$ 。因

而，函数 $f(x)$ 既非奇函数，又非偶函数。故应选 (D)。

由此可见，在判断函数的奇偶性时，应先求出函数的定义域，判断定义域区间是否关于坐标原点对称。若不对称，即可断定该函数既非奇函数，又非偶函数；若对称，再来验证等式 $f(-x) = -f(x)$ 或 $f(-x) = f(x)$ 是否成立。

〔例 6〕方程 $x^2 - 79x + 1 = 0$ 的两根可分别作为 ()。

(A) 一椭圆和一双曲线的离心率。

(B) 两抛物线的离心率。

(C) 一椭圆和一抛物线的离心率。

(D) 两椭圆的离心率。

解：由方程解得

$$x = \frac{79 \pm \sqrt{79^2 - 4}}{2}.$$

$$\text{由 } \frac{79 + \sqrt{79^2 - 4}}{2} > 1, \quad 0 < \frac{79 - \sqrt{79^2 - 4}}{2} < 1,$$

而椭圆的离心率大于 0 且小于 1，双曲线的离心率大于 1，故应选择 (A)。

本例也可不解方程，设方程的两根为 x_1, x_2 ，令 $x_1 < x_2$ ，由韦达定理得 $x_1 + x_2 = 79, x_1 \cdot x_2 = 1$ 。显然 $0 < x_1 < 1, x_2 > 1$ 。再根据椭圆和双曲线的离心率的条件选(A)。

〔例 7〕对所有满足 $1 \leq n \leq m \leq 5$ 的 m, n ，极坐标方程

$$\rho = \frac{1}{1 - C_m^n \cos \theta} \text{表示的不同双曲线条数是 ()}.$$

(A) 15. (B) 10. (C) 7. (D) 6.