JS

高中数学竞赛解题方法

主　编 马洪炎
副主编 沈虎跃 许康华

GAOZHONG
SHUXUE
JINGSAI
JIETI
FANGFA

ZHEJIANG UNIVERSITY PRESS
浙江大学出版社

★ 冲刺全国高中数学联赛

★ 冲刺全国高中物理联赛

★ 冲刺全国高中化学联赛

★ 高中数学竞赛方法

★ 高中物理竞赛方法

★ 高中化学竞赛方法

★ 高中生物竞赛方法

ISBN 7-308-04691-5

9 787308 046916 >

ISBN 7-308-04691-5/G・1053
定价：28.00 元

高中数学竞赛解题方法

主　编　马洪炎

副主编　沈虎跃　许康华

编　委　马洪炎　沈虎跃　许康华
金荣生　蔡小雄　马茂年
严根林　李　辉　周海军
黄维民　吴国建　吕峰波

浙江大學出版社

图书在版编目（CIP）数据

高中数学竞赛解题方法／马洪炎主编．—杭州：浙江大学出版社，2006．4
ISBN 7-308-04691-5

Ⅰ．高...　Ⅱ．马...　Ⅲ．数学课－高中－解题
Ⅳ．G634.605

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2006)第 029152 号

出版发行	浙江大学出版社
	（杭州浙大路 38 号　邮政编码 310027）
	（E-mail：zupress@mail.hz.zj.cn）
	（网址：http://www.zjupress.com）
责任编辑	杨晓鸣
排 版 者	杭州好友排版工作室
印　　刷	临安曙光印刷厂
开　　本	787mm×960mm　1/16
印　　张	22.5
字　　数	430 千
版　　次	2006 年 4 月第 1 版　2006 年 4 月第 1 次印刷
印　　数	0001—6000
书　　号	ISBN 7-308-04691-5/G·1053
定　　价	28.00 元

编写说明

任何一门学科都有其独特的思维方法，尤其是数学，前人总结了许多思考问题的方法。对于中学生，特别对于参与数学竞赛的学生来说，适当地掌握一些思考问题的方法，无论是对学好数学，还是从整体上把握中学数学都是很有好处。本书编写的第一个目的就是向广大高中学生传授一些中学阶段必须掌握的数学方法。

对于传授知识、引导启发学生学习的教师而言，教会学生思考问题，传授学生方法是必须达到的教学目标。本书编写的第二个目的就是为一线教师和竞赛辅导的教练提供丰富的教学资源。

本书涉及的方法都是中学数学常用的思考方法，对于大部分学生都能够接受，不同层次的学生可以灵活取舍。

参与本书编写的都是长期从事高中数学竞赛辅导的优秀教练：北仑中学马洪炎(23～25、36)、镇海中学沈虎跃(17、33～35)、富阳二中许康华(22、32、37～40)、杭州二中蔡小雄(1、8)、金华一中严根林(2、3)、东阳中学吴国建(4、5)、嘉兴中学吕峰波(6、7)、镇海中学黄维民(9、10、12、14)、余姚中学李辉(11、13)、温州中学金荣生(15、16、18)、杭州十四中马茂年(19～21、30、31)、镇海中学周海军(26～29)。

限于我们的水平，书中可能存在一些纰漏，敬请各位读者提出宝贵建议。

2006年春于北仑港

目　　录

一、数学竞赛中常用数学解题策略

1.复杂问题简单化

方法介绍

数学竞赛题大都比较复杂,但也并不都是深不可测,我们常说“复杂问题是由简单问题演变而来的”.因此,将复杂问题简单化事实上是还原问题的本来面目.复杂型问题,从题设到结论,从题型到内容,条件隐蔽,变化多样,因此就决定了审题思考的复杂性和解题设计的多样性.为了能真正达到简单化的目的,在审题时,要把握好“三性”,即:(1)目的性:明确解题结果的终极目标和每一步骤的分目标;(2)准确性:提高概念把握的准确性和运算的准确性;(3)隐含性:注意题设条件的隐含性.审题这一步,不要怕慢,其实慢中有快,解题方向明确,解题手段合理,这是使问题简单化的前提和保证.

有时,我们可以尝试分三步进行:一是对已知条件进行分解,并根据这些条件进行相关知识的联想,从而寻找解题的突破口;二是将所配置的图形进行分解,使复杂图形简单化;三是对所要求的结论进行分解.最后,再将分解的条件与分解的图形串起来,求相关的结论.事实上,分而治之,各个击破是复杂问题简单化的主要策略之一.

例题精讲

【例 1】 求函数 $y=\dfrac{x-x^3}{2(x^4+2x^2+1)}$ 的值域.

分析与解

思路 1 注意到函数为奇函数,所以只需考虑 $x\geqslant 0$ 的情形,分三种情况讨论:

(1) 当 $0\leqslant x<1$ 时,$y\geqslant 0$,$y=\dfrac{1-x}{\sqrt{2}(1+x^2)}\cdot\dfrac{x+x^2}{\sqrt{2}(1+x^2)}\leqslant\dfrac{1}{8}\left(\dfrac{1-x}{1+x^2}+\dfrac{x+x^2}{1+x^2}\right)^2=\dfrac{1}{8}$;

(2) 当 $x=1$ 时,$y=0$;

(3) 当 $x>1$ 时，$|y|=\frac{1}{2}\cdot\frac{1+x}{1+x^2}\cdot\frac{x^2-x}{1+x^2}\leqslant\frac{1}{8}\left(\frac{x^2-x}{1+x^2}+\frac{1+x}{1+x^2}\right)^2=\frac{1}{8}$；

当 $x=1+\sqrt{2}$时，可取等号，因此，原函数的值域为$\left[-\frac{1}{8},\frac{1}{8}\right]$.

思路 2 将原函数变形为 $y=\frac{1}{4}\cdot\frac{2x}{1+x^2}\cdot\frac{1-x^2}{1+x^2}$，从形式上联想三角公式，借助三角换元，可令 $x=\tan\alpha$，$\alpha\in\left[0,\frac{\pi}{2}\right)$，则 $y=\frac{1}{8}\sin4\alpha$，由此容易得到函数的值域为$\left[-\frac{1}{8},\frac{1}{8}\right]$.

评注 思路 1 是利用奇偶性将变量 x 转化为非负数研究，思路 2 则是通过三角换元达到简单化的目的.

【例 2】 已知定义在 $\mathbf{R}$ 上的函数 $F(x)$ 与 $G(x)$满足：

$F(x)+G(x)+F(y)-G(y)=\sin x+\cos y$，求 $F(x)$与 $G(x)$的解析式.

分析与解 用 x 取代 y 可得 $F(x)=\frac{1}{2}(\sin x+\cos x)$，代入方程得

$$G(x)+\frac{1}{2}(\cos x-\sin x)=G(y)+\frac{1}{2}(\cos y-\sin y),$$

设 $H(x)=G(x)+\frac{1}{2}(\cos x-\sin x)$，则 $H(x)=H(y)$对一切 $x,y\in\mathbf{R}$ 恒成立.

所以 $H(x)=C$(常数)，即 $G(x)=\frac{1}{2}(\sin x-\cos x)+C$，

令 $x=0$，得 $G(0)=C-\frac{1}{2}$，$C=G(0)+\frac{1}{2}$，

由此得，$G(x)=\frac{1}{2}(\sin x-\cos x)+G(0)+\frac{1}{2}$.

评注 满足函数方程的 $G(x)$不惟一.

【例 3】 函数 f 定义在有序正整数对的集合上，且满足下列性质：

(1) $f(x,x)=x$；

(2) $f(x,y)=f(y,x)$；

(3) $(x+y)f(x,y)=yf(x,x+y)$，

求 $f(14,52)$.

分析与解 令 $y=z-x$，代入条件(3)中，得 $f(x,z)=\frac{z}{z-x}f(x,z-x)$.

所以 $f(14,52)=\frac{52}{38}f(14,38)=\frac{52}{24}f(14,24)=\frac{52}{10}f(14,10)$

$=\frac{52}{10}f(10,14)=\frac{52\times14}{10\times4}f(10,4)=\frac{52\times14}{10\times4}f(4,10)=\frac{52\times14}{4\times6}f(4,6)$

$=\frac{52\times14}{4\times2}f(4,2)=\frac{52\times14}{4\times2}f(2,4)=\frac{52\times14}{2\times2}f(2,2)=\frac{52\times14}{2}=364$.

评注 根据条件(1)提供的信息促使我们将 52 降为 14，为此，借助代换使复杂问题简单化.

【例 4】 已知二次函数 $f(x)=ax^2+bx+c$，$a,b,c\in\mathbf{R}$，满足 $f(-1)=0$，对于任意的

$x\in\mathbf{R}$,都有 $f(x)-x\geqslant0$,并且当 $x\in(0,2)$时,有 $f(x)\leqslant\left(\frac{x+1}{2}\right)^2$.

(1) 求 $f(x)$的表达式;

(2) 当 $x\in[-1,1]$时,函数 $g(x)=f(x)-mx(x\in\mathbf{R})$是单调的,求证:$m\leqslant0$ 或 $m\geqslant1$.

分析与解 (1)由 $f(1)=1,f(-1)=0$ 解得 $b=\frac{1}{2}$,对于任意的 $x\in\mathbf{R}$,都有 $f(x)-x\geqslant0$,所以 $a>0,\Delta=(b-1)^2-4ac\leqslant0$,所以 $a>0,ac\geqslant\frac{1}{16},\frac{1}{2}=a+c\geqslant2\sqrt{ac},ac\leqslant\frac{1}{16}$.

故 $ac=\frac{1}{16},a=\frac{1}{4},b=\frac{1}{2},c=\frac{1}{4}$,

所以 $f(x)=\frac{1}{4}x^2+\frac{1}{2}x+\frac{1}{4}$.

(2) $g(x)=\frac{1}{4}x^2+\left(\frac{1}{2}-m\right)x+\frac{1}{4}=\frac{1}{4}\left[x+2\left(\frac{1}{2}-m\right)\right]^2+\frac{1}{4}-\left(\frac{1}{2}-m\right)^2$.

因为 $x\in[-1,1]$时,$g(x)$单调,

所以 $\left|2\left(\frac{1}{2}-m\right)\right|\geqslant1$,解得 $m\leqslant0$ 或 $m\geqslant1$.

变式 (2002 年全国联赛试题) 已知二次函数 $f(x)=ax^2+bx+c(a,b,c\in\mathbf{R},a\neq0)$,满足:

(1) 当 $x\in\mathbf{R}$ 时,$f(x-4)=f(2-x)$,且 $f(x)\geqslant x$;

(2) 当 $x\in(0,2)$时,$f(x)\leqslant\left(\frac{x+1}{2}\right)^2$;

(3) $f(x)$在 $\mathbf{R}$ 上的最小值为 0.

求最大的 $m(m>1)$,使得存在 $t\in\mathbf{R}$,只要 $x\in[1,m]$,就有 $f(x+t)\leqslant x$.

分析与解 同上题可得 $f(x)=\frac{1}{4}x^2+\frac{1}{2}x+\frac{1}{4}$,假设存在 $t\in\mathbf{R}$,只要 $x\in[1,m]$,就有 $f(x+t)\leqslant x$,取 $x=1$,有 $f(t+1)\leqslant1$,即$\frac{1}{4}(t+1)^2+\frac{1}{2}(t+1)+\frac{1}{4}\leqslant1\Rightarrow-4\leqslant t\leqslant0$.

对固定的 $t\in[-4,0]$,取 $x=m$,有 $f(t+m)\leqslant m\Rightarrow\frac{1}{4}(t+m)^2+\frac{1}{2}(t+m)+\frac{1}{4}\leqslant m$

化简得 $m^2-2(1-t)m+(t^2+2t+1)\leqslant0\Rightarrow1-t-\sqrt{-4t}\leqslant m\leqslant1-t+\sqrt{-4t}$,

$m\leqslant1-t+\sqrt{-4t}\leqslant1-(-4)+\sqrt{-4\cdot(-4)}=9$,

当 $t=-4$ 时,对任意的 $x\in[1,9]$,恒有

$f(x-4)-x=\frac{1}{4}(x^2-10x+9)=\frac{1}{4}(x-1)(x-9)\leqslant0$,

所以 m 的最大值为 9.

【例 5】 已知 $a_1=1,a_2=\frac{5}{2},a_{n+1}=\frac{a_n+b_n}{2},b_{n+1}=\frac{2a_nb_n}{a_n+b_n}$,求证:$\lim\limits_{n\to\infty}a_n=\lim\limits_{n\to\infty}b_n$.

分析与解 构造数列 $c_n=a_nb_n$,则有 $c_{n+1}=a_{n+1}b_{n+1}=\frac{a_n+b_n}{2}\cdot\frac{2a_nb_n}{a_n+b_n}=a_nb_n=c_n$.

又由 $a_2=\dfrac{a_1+b_1}{2}$，解得 $b_1=4$，

因此，$c_n=c_1=a_1b_1=4$，由此可得 $a_{n+1}=\dfrac{a_n^2+4}{2a_n}$，

设 $f(x)=\dfrac{x^2+4}{2x}$，由 $f(x)=x$ 解得 $f(x)$ 的两个不动点 ± 2.

由 $a_{n+1}+2=\dfrac{a_n^2+4}{2a_n}+2=\dfrac{(a_n+2)^2}{2a_n}$，$a_{n+1}-2=\dfrac{a_n^2+4}{2a_n}-2=\dfrac{(a_n-2)^2}{2a_n}$，

以上两式相除，得 $\dfrac{a_{n+1}+2}{a_{n+1}-2}=\left(\dfrac{a_n+2}{a_n-2}\right)^2$，

从而有 $a_n=2\cdot\dfrac{3^{2^{n-1}}+1}{3^{2^{n-1}}-1}$，$b_n=\dfrac{4}{a_n}=2\cdot\dfrac{3^{2^{n-1}}-1}{3^{2^{n-1}}+1}$，所以 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=\lim\limits_{n\to\infty}b_n=2$.

评注 直接在式子 $a_{n+1}=\dfrac{a_n+b_n}{2}$ 两边取极限是不行的，因为 a_n，b_n 本身极限不一定存在.

【例 6】 在 $\triangle ABC$ 中，h_a，h_b，h_c 表示对应边的高，r，R 分别为内切圆与外接圆半径，p 为半周长，求证：$\dfrac{abc}{(h_b+h_c)(h_c+h_a)(h_a+h_b)}\geqslant\left(\dfrac{3R}{2p}\right)^3$.

分析与解 不等式左边 $=\dfrac{abc}{\left(\dfrac{2S}{a}+\dfrac{2S}{b}\right)\left(\dfrac{2S}{b}+\dfrac{2S}{c}\right)\left(\dfrac{2S}{c}+\dfrac{2S}{a}\right)}$

$$=\frac{a^3b^3c^3}{8S^3(a+b)(b+c)(c+a)}\geqslant\frac{a^3b^3c^3}{8S^3\left(\frac{4p}{3}\right)^3}=\frac{27\times 4^3p^3R^3r^3}{8(pr)^3(4p)^3}=\frac{27R^3}{8p^3}.$$

评注 本题是 Milosevic 不等式 $\sum\dfrac{a}{h_b+h_c}\geqslant\dfrac{9\sqrt{3}R}{2(4R+r)}$ 的加强.通过面积公式变形，运用均值不等式使原问题简单化.

【例 7】 设 A_1，A_2，$\cdots$，A_n 是圆心在点 O，半径为 1 的圆内接正 n 边形的顶点，点 M 是射线 OA_1 上且在圆外的一点，求证：$\sum\limits_{k=1}^{n}\dfrac{1}{|MA_k|}\geqslant\dfrac{n}{|OM|}$.

分析与解 建立复平面，使得 O，A_1，A_2，$\cdots$，A_n，M 对应的复数分别为 $0,1,\omega,\omega^2,\cdots,\omega^{n-1},r$，此处 $\omega=\cos\dfrac{2\pi}{n}+\mathrm{i}\sin\dfrac{2\pi}{n}$，$r>1$.

由 $1,\omega,\omega^2,\cdots,\omega^{n-1}$ 是 n 次单位根，所以有恒等式

$z^n-1=(z-1)(z-\omega)\cdots(z-\omega^{n-1})$，

因此，$\dfrac{1}{n}\sum\limits_{k=1}^{n}\dfrac{1}{|MA_k|}=\dfrac{1}{n}\sum\limits_{k=0}^{n-1}\dfrac{1}{|r-\omega^k|}\geqslant\sqrt[n]{\prod\limits_{k=0}^{n-1}\dfrac{1}{|r-\omega^k|}}=\sqrt[n]{\dfrac{1}{|r^n-1|}}$

$$\geqslant\sqrt[n]{\frac{1}{r^n}}=\frac{1}{r}=\frac{1}{|OM|}.$$

评注 本题巧用复数的几何意义使原问题简单化.

【例 8】 若数列$\{a_n\}$的前 n 项和为 S_n，$a_1=a(a>0)$，且满足 $a_{n+1}=\sqrt{a^2+aS_n+S_n^2}$，求数列$\{a_n\}$的通项公式.

分析与解 由 $a_{n+1}^2=a^2+S_n^2-2aS_n\cos120^\circ$联想余弦定理，以 a_{n+1}，S_n，a 为三边构造三角形 A_0AA_n，如图 1-1 所示，易知$\angle AA_0A_n=120^\circ$，现在边 A_0A_n 上取 $n-1$ 个点，设为 $A_1,A_2,\cdots,A_i,\cdots$，且满足 $A_{i-1}A_i=a_i(1\leqslant i\leqslant n)$，于是对于 A_0A_n 上任一点 A_i，

在$\triangle AA_0A_i$ 中由余弦定理有

$$AA_i=\sqrt{AA_0^2-2AA_0\cdot A_0A_i\cos120^\circ+A_0A_i^2}$$

$$=\sqrt{AA_0^2+AA_0(A_0A_1+A_1A_2+\cdots+A_{i-1}A_i)+(A_0A_1+A_1A_2+\cdots+A_{i-1}A_i)^2}$$

$$=\sqrt{a^2+aS_i+S_i^2}=a_{i+1}=A_iA_{i+1}.$$

由 $AA_i=A_iA_{i+1}$，易知$\angle AA_iA_0=2\angle AA_{i+1}A_0$， 所以$\angle AA_nA_0=\angle AA_1A_0/2^{n-1}$.

在$\triangle AA_1A_0$ 中，$AA_0=A_0A_1=a$，$\angle A_1A_0A=120^\circ$， 所以$\angle AA_1A_0=30^\circ$.

所以$\angle AA_nA_0=30^\circ/2^{n-1}$. 在$\triangle AA_0A_n$ 中，由正弦定理有$\dfrac{a_{n+1}}{\sin120^\circ}=\dfrac{a}{\sin\dfrac{30^\circ}{2^{n-1}}}$，所以 $a_n=\dfrac{\sqrt{3}a}{2\sin\dfrac{30^\circ}{2^{n-2}}}$.

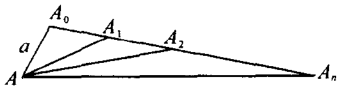

图 1-1

评注 沿此思路此题可进一步推广为：若数列$\{a_n\}$的前 n 项和为 S_n，$a_1=a(a>0)$，且满足 $a_{n+1}=\sqrt{a^2-taS_n+S_n^2}(-2<t<2)$，则数列$\{a_n\}$的通项公式为

$$a_n=\frac{a\sin\theta}{\sin\dfrac{180^\circ-\theta}{2^{n-1}}}\left(\theta=\arccos\frac{t}{2}\right).$$

【例 9】 设 a,b,c,d 是满足$ab+bc+cd+da=1$ 的正实数，求证：

$$\frac{a^3}{b+c+d}+\frac{b^3}{a+c+d}+\frac{c^3}{a+b+d}+\frac{d^3}{a+b+c}\geqslant\frac{1}{3}.$$

证法 1 由$\sqrt{\dfrac{a^4}{a(b+c+d)}}\cdot\sqrt{a(b+c+d)}=a^2$，

得$$\left(\sum a^2\right)^2=\left(\sum\sqrt{\frac{a^4}{a(b+c+d)}}\cdot\sqrt{a(b+c+d)}\right)^2$$

$$\leqslant\sum\frac{a^3}{b+c+d}\times\sum a(b+c+d).$$

因此，原不等式左边 $=\sum\dfrac{a^3}{b+c+d}\geqslant\dfrac{\left(\sum a^2\right)^2}{\sum a(b+c+d)}$.

又分母$\sum a(b+c+d)=2(ab+bc+cd+da+ac+bd)$

$\leqslant(a^2+b^2)+(b^2+c^2)+(c^2+d^2)+(d^2+a^2)+(a^2+c^2)+(b^2+d^2)$

$= 3(a^2 + b^2 + c^2 + d^2)$.

所以，$\sum \frac{a^3}{b+c+d} \geqslant \frac{1}{3}\sum a^2 \geqslant \frac{1}{3}$.

证法 2 设 $S = \sum \frac{a^3}{b+c+d}$，由柯西不等式，有 $\sum \frac{a^3}{b+c+d} \cdot \sum a(b+c+d) \geqslant (\sum a^2)^2$，又 $2(ab+ac+ad) \leqslant 3a^2+b^2+c^2+d^2$，

因此，$2\sum a(b+c+d) \leqslant \sum(3a^2+b^2+c^2+d^2) = 6\sum a^2$，

所以，$S \geqslant \frac{(\sum a^2)^2}{\sum a(b+c+d)} \geqslant \frac{(\sum a^2)^2}{3\sum a^2} = \frac{1}{3}\sum a^2 \geqslant \frac{1}{3}(ab+bc+cd+da) = \frac{1}{3}$.

证法 3 令 $e = a+b+c+d$，$E = a^2+b^2+c^2+d^2$，则不等式

左边 $= \frac{a}{e-a}\left(a - \frac{e-a}{3}\right)^2 + \frac{2}{3}a^2 - \frac{1}{9}a(e-a) + \frac{b}{e-b}\left(b - \frac{e-b}{3}\right)^2 + \frac{2}{3}b^2 - \frac{1}{9}b(e-b) + \frac{c}{e-c}\left(c - \frac{e-c}{3}\right)^2 + \frac{2}{3}c^2 - \frac{1}{9}c(e-c) + \frac{d}{e-d}\left(d - \frac{e-d}{3}\right)^2 + \frac{2}{3}d^2 - \frac{1}{9}d(e-d)$

$\geqslant \frac{2}{3}E - \frac{1}{9}[a(e-a)+b(e-b)+c(e-c)+d(e-d)]$

$= \frac{2}{3}E - \frac{1}{9}(e^2-E) = \frac{7}{9}E - \frac{1}{9}e^2 \geqslant \frac{1}{12}e^2 \geqslant \frac{1}{3}$.$(e \geqslant 2\sqrt{(a+c)(b+d)} = 2)$

评注 本题是第 31 届 IMO 预选题，泰国提供，本题结论可以推广为"当 $a_i \in \mathbf{R}^+$ $(i = 1,\cdots,n)$，且 $\sum_{i=1}^{n} a_i a_{i+1} = 1 (a_{n+1} = a_1)$，求证：$\sum_{i=1}^{n} \frac{a_i^3}{\sum_{i=1}^{n} a_i - a_i} \geqslant \frac{1}{n-1}$"。

【例 10】 (第 41 届 IMO 试题) 设 a, b, c 是正实数，且 $abc = 1$，证明：

$(a - 1 + \frac{1}{b})(b - 1 + \frac{1}{c})(c - 1 + \frac{1}{a}) \leqslant 1$.

证法 1 令 $a = \frac{x}{y}$，$b = \frac{y}{z}$，$c = \frac{z}{x}$，$x, y, z \in \mathbf{R}^+$，则原不等式等价于

$(x-y+z)(y-z+x)(z-x+y) \leqslant xyz$.

再令 $u = x-y+z$，$v = y-z+x$，$w = z-x+y$.

由于这三个数中的任意两个之和都是正数，所以它们中间最多只有一个是负数.

如果恰有一个是负数，则 $uvw \leqslant 0 < xyz$，不等式得证.

如果这三个数都大于 0，则由算术－几何平均不等式，可得

$\sqrt{uv} = \sqrt{(x-y+z)(y-z+x)} \leqslant \frac{1}{2}(x-y+z+y-z+x) = x$，

同理 $\sqrt{vw} \leqslant y$，$\sqrt{wu} \leqslant z$. 因此，$uvw \leqslant xyz$，不等式也得证.

证法 2 (1) 若 $a - 1 + \frac{1}{b}$，$b - 1 + \frac{1}{c}$，$c - 1 + \frac{1}{a}$ 不全为正数，不妨设 $a - 1 + \frac{1}{b} \leqslant 0$，则 $a \leqslant 1$，$b \geqslant 1$，则 $b - 1 + \frac{1}{c} \geqslant \frac{1}{c} > 0$，$c - 1 + \frac{1}{a} \geqslant c > 0$.

因此，$\left(a-1+\frac{1}{b}\right)\left(b-1+\frac{1}{c}\right)\left(c-1+\frac{1}{a}\right)\leqslant 0<1$.

(2) 若 $a-1+\frac{1}{b}, b-1+\frac{1}{c}, c-1+\frac{1}{a}$ 全为正数，则原不等式等价于

$\left(a-1+\frac{1}{b}\right)^2\left(b-1+\frac{1}{c}\right)^2\left(c-1+\frac{1}{a}\right)^2\leqslant 1$.

而 $0<\left(a-1+\frac{1}{b}\right)\left(b-1+\frac{1}{c}\right)=(a-abc+ac)(bc-c+1)\cdot\frac{1}{c}$

$$=\frac{a}{c}(1-bc+c)(1+bc-c)=\frac{a}{c}[1-(bc-c)^2]\leqslant\frac{a}{c},$$

同理 $0<\left(b-1+\frac{1}{c}\right)\left(c-1+\frac{1}{a}\right)\leqslant\frac{b}{a}$，$0<\left(c-1+\frac{1}{a}\right)\left(a-1+\frac{1}{b}\right)\leqslant\frac{c}{b}$.

以上三式相乘即可得所证.

评注 本题的两种证明方法都运用了分类讨论的思想使原问题简单化. 证法 2 实际上是证明了不等式左边的平方不大于右边的平方.

【例 11】 实数 a,b,c 和正数 λ 使得 $f(x)=x^3+ax^2+bx+c$ 有三个实根 x_1,x_2,x_3，且满足：(1) $x_2-x_1=\lambda$，(2) $x_3>\frac{1}{2}(x_1+x_2)$. 求 $\frac{2a^3+27c-9ab}{\lambda^3}$ 的最大值.

分析 1 记 $\lambda=2u$，设 $\frac{x_1+x_2}{2}=x$，$x_3=x+v$，$x_1=x-u$，$x_2=x+u$，则 $u,v>0$.

$$L=\frac{-2(x_1+x_2+x_3)^3-27x_1x_2x_3+9(x_1+x_2+x_3)(x_1x_2+x_2x_3+x_3x_1)}{8u^3}$$

$$=\frac{-2(2x+x+v)^3-27(x^2-u^2)(x+v)+9(2x+x+v)[x^2-u^2+(x+v)\cdot 2x]}{8u^3}$$

$=\frac{2v(9u^2-v^2)}{8u^3}$，令 $t=\frac{v}{u}>0$，考察 $0<t<3$ 时，

$L=\frac{1}{4}t(9-t^2)=\frac{1}{4}A$，$A^2=t^2(9-t^2)^2\leqslant\frac{1}{2}\cdot 6^3=108$.

因此，$L\leqslant\frac{1}{4}\sqrt{108}=\frac{3}{2}\sqrt{3}$，等号当且仅当 $t=\sqrt{3}$ 时取得.

由此，不难得到 $\frac{2a^3+27c-9ab}{\lambda^3}$ 的最大值.

分析 2 $2a^3+27c-9ab=27\left[\left(-\frac{a}{3}\right)^3+a\left(-\frac{a}{3}\right)^2+b\left(-\frac{a}{3}\right)+c\right]=27f\left(-\frac{a}{3}\right)$

$=(-a-3x_1)(-a-3x_2)(-a-3x_3)=(x_2+x_3-2x_1)(x_3+x_1-2x_2)(x_1+x_2-2x_3)$.

令 $x_2=x_1+2m$，$x_3=x_1+m+n$，$(m>0, n>0, \lambda=2m)$

代入可得 $2a^3+27c-9ab=2n(9m^2-n^2)$.

原式 $=\frac{1}{4}\left[9\left(\frac{n}{m}\right)-\left(\frac{n}{m}\right)^3\right]$，令 $t=\frac{n}{m}$，则原式 $=\frac{1}{4}(9t-t^3)(t>0)$，

由基本不等式可得 $\frac{2a^3+27c-9ab}{\lambda^3}$ 的最大值为 $\frac{3\sqrt{3}}{2}$.

评注 本题是2002年全国联赛二试第二题，也是当年联赛最难的一道题，命题者给出的解答如下，读者可以相比较，并从几种解法的比较中体会如何从复杂的问题中提炼出可简单化的因素.

解 由 $f(x)=f(x)-f(x_3)=(x-x_3)[x^2+(a+x_3)x+x_3^2+ax_3+b]$

知 x_1,x_2 是方程 $x^2+(a+x_3)x+x_3^2+ax_3+b$ 的两个根，

因为 $x_2-x_1=\lambda$，

所以 $(a+x_3)^2-4(x_3^2+ax_3+b)=\lambda^2$，整理得 $3x_3^2+2ax_3+\lambda^2+4b-a^2=0$.

因为 $x_3>\frac{1}{2}(x_1+x_2)$，所以 $x_3=\frac{1}{3}\left[-a+\sqrt{4a^2-12b-3\lambda^2}\right]$， ①

且 $4a^2-12b-3\lambda^2\geqslant0$. ②

由 $f(x)=x^3+ax^2+bx+c$

$$=\left(x+\frac{a}{3}\right)^3-\left(\frac{a^2}{3}-b\right)\left(x+\frac{a}{3}\right)+\frac{2}{27}a^3+c-\frac{1}{3}ab.$$

又 $f(x_3)=0$，得 $\frac{1}{3}ab-\frac{2}{27}a^3-c=\left(x_3+\frac{a}{3}\right)^3-\left(\frac{a^2}{3}-b\right)\left(x_3+\frac{a}{3}\right)$. ③

由①得 $x_3+\frac{a}{3}=\frac{1}{3}\sqrt{4a^2-12b-3\lambda^2}=\frac{2\sqrt{3}}{3}\sqrt{\frac{a^2}{3}-b-\frac{\lambda^2}{4}}$.

记 $p=\frac{a^2}{3}-b$，由②和③可知 $p\geqslant\frac{\lambda^2}{4}$ 且 $\frac{1}{3}ab-\frac{2}{27}a^3-c=\frac{2\sqrt{3}}{9}\sqrt{p-\frac{\lambda^2}{4}}(p-\lambda^2)$.

令 $y=\sqrt{p-\frac{\lambda^2}{4}}$，则 $y\geqslant0$ 且 $\frac{1}{3}ab-\frac{2}{27}a^3-c=\frac{2\sqrt{3}}{9}y\left(y^2-\frac{3}{4}\lambda^2\right)$.

又因为 $y^3-\frac{3\lambda^2}{4}y+\frac{\lambda^3}{4}=y^3-\frac{3\lambda^2}{4}y-\left(\frac{\lambda}{2}\right)^3+\frac{3\lambda^2}{4}\cdot\frac{\lambda}{2}=\left(y-\frac{\lambda}{2}\right)^2(y+\lambda)\geqslant0$.

所以 $\frac{1}{3}ab-\frac{2}{27}a^3-c\geqslant-\frac{\sqrt{3}}{18}\lambda^3$，即有 $\frac{2a^3+27c-9ab}{\lambda^3}\leqslant\frac{3\sqrt{3}}{2}$.

取 $a=2\sqrt{3},b=2,c=0,\lambda=2$，则 $f(x)=x^3+ax^2+bx+c$ 有根 $-\sqrt{3}-1,-\sqrt{3}+1,0$.

显然假设条件成立，且 $\frac{2a^3+27c-9ab}{\lambda^3}=\frac{1}{8}(48\sqrt{3}-36\sqrt{3})=\frac{3\sqrt{3}}{2}$.

综上所述 $\frac{2a^3+27c-9ab}{\lambda^3}$ 的最大值是 $\frac{3\sqrt{3}}{2}$.

【例12】 设 $x_1,x_2,\cdots,x_{n+1}$ 是正实数，满足条件 $\frac{1}{1+x_1}+\frac{1}{1+x_2}+\cdots+\frac{1}{1+x_{n+1}}=1$，求证：$x_1x_2\cdots x_{n+1}\geqslant n^{n+1}$.

证明 令 $y_i=\frac{1}{1+x_i}$，$i=1,2,\cdots,n+1$，则 $\sum\limits_{i=1}^{n+1}y_i=1$，

令 $s_i=\sum\limits_{1\leqslant j\leqslant n+1,j\neq i}y_j$，$p_i=\prod\limits_{1\leqslant j\leqslant n+1,j\neq i}y_j$.

由算术－几何不等式，有 $\frac{1-y_i}{y_i}=\frac{s_i}{y_i}\geqslant\frac{n\sqrt[n]{p_i}}{y_i}$，因为在乘积 $\prod\limits_{i=1}^{n+1}\sqrt[n]{p_i}$ 中，每个 $\sqrt[n]{y_i}$ 恰出现

n 次,则有 $\prod_{i=1}^{n+1}\sqrt[n]{p_i}=\prod_{i=1}^{n+1}y_i$.

$$\text{所以 } x_1x_2\cdots x_{n+1}=\prod_{i=1}^{n+1}\left(\frac{1-y_i}{y_i}\right)\geqslant\prod_{i=1}^{n+1}\frac{n\sqrt[n]{p_i}}{y_i}=n^{n+1}\frac{\prod_{i=1}^{n+1}y_i}{\prod_{i=1}^{n+1}y_i}=n^{n+1}.$$

评注 以上命题表明:如果正数 $x_1,x_2,\cdots,x_{n+1}$ 满足条件:

$\frac{1}{1+x_1}+\frac{1}{1+x_2}+\cdots+\frac{1}{1+x_n}=1-\frac{1}{1+x_{n+1}}$,则有 $x_{n+1}\geqslant\frac{n^{n+1}}{\prod_{i=1}^{n}x_i}$.

因此,有 $\frac{1}{1+x_1}+\frac{1}{1+x_2}+\cdots+\frac{1}{1+x_n}\geqslant1-\frac{1}{1+\frac{n^{n+1}}{\prod_{i=1}^{n}x_i}}=\frac{n^{n+1}}{n^{n+1}+x_1x_2\cdots x_n}$.

由此可引出一新命题:

$\frac{1}{1+x_1}+\frac{1}{1+x_2}+\cdots+\frac{1}{1+x_n}<1$,有 $\frac{1}{1+x_1}+\frac{1}{1+x_2}+\cdots+\frac{1}{1+x_n}\geqslant\frac{n^{n+1}}{n^{n+1}+x_1x_2\cdots x_n}$.

如果 $\frac{1}{1+x_1}+\frac{1}{1+x_2}+\cdots+\frac{1}{1+x_n}\geqslant1$,上述不等式显然成立.

故可得以下命题:设 $x_1,x_2,\cdots,x_n$ 是正实数,则

$\frac{1}{1+x_1}+\frac{1}{1+x_2}+\cdots+\frac{1}{1+x_n}\geqslant\frac{n^{n+1}}{n^{n+1}+x_1x_2\cdots x_n}$.

由此命题可推出以下结果:

(1) 已知 $a,b\in\mathbf{R}^+$,则 $\frac{a}{a+2b}+\frac{b}{b+2a}\geqslant\frac{8}{8+4}=\frac{2}{3}$.

(2) 已知 $a,b\in\mathbf{R}^+$,则 $\frac{a}{2a+b}+\frac{b}{2b+a}\leqslant\frac{2}{3}$.

(3) 已知 $x_i\in\mathbf{R}^+,i=1,2,\cdots,n$,则 $\frac{x_1}{x_1+nx_2}+\frac{x_2}{x_2+nx_3}+\cdots+\frac{x_n}{x_n+nx_1}\geqslant\frac{n}{n+1}$,等号当且仅当 $x_1=x_2=\cdots=x_n$ 时取得.

(4) 已知 $x_i\in\mathbf{R}^+,i=1,2,\cdots,n$,则 $\frac{x_1}{nx_1+x_2}+\frac{x_2}{nx_2+x_3}+\cdots+\frac{x_n}{nx_n+x_1}\leqslant\frac{n}{n+1}$,等号当且仅当 $x_1=x_2=\cdots=x_n$ 时取得.

同步训练

一、选择题

1. 设 $a>b>c,a+b+c=1$,且 $a^2+b^2+c^2=1$,则 ( )

A. $a+b>1$ B. $a+b=1$ C. $a+b<1$ D. 不能确定,与 a,b 的值有关

2. 设四棱锥 $P\text{-}ABCD$ 的底面不是平行四边形,用平面 α 去截此四棱锥,使得截面四边

形是平行四边形，则这样的平面 α （　　）

A. 不存在　　B. 只有 1 个　　C. 恰有 4 个　　D. 有无数多个

3. 设 $a>b>0$，那么 $a^2+\frac{1}{b(a-b)}$ 的最小值是 （　　）

A. 2　　B. 3　　C. 4　　D. 5

4. 设椭圆 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ 的离心率为 $e=\frac{\sqrt{3}}{2}$，已知点 $P(0,\frac{3}{2})$ 到椭圆上的最远距离是 $\frac{7}{4}$，则短半轴之长 $b=$ （　　）

A. $\frac{1}{16}$　　B. $\frac{1}{8}$　　C. $\frac{1}{4}$　　D. $\frac{1}{2}$

5. $S=\{1,2,3,\cdots,2003\}$，A 是 S 的三元子集，满足：A 中的元素可以组成等差数列．那么，这样的三元子集 A 共有 （　　）

A. C_{2003}^3 个　　B. $C_{1001}^2+C_{1002}^2$ 个　　C. $A_{1001}^2+A_{1002}^2$ 个　　D. A_{2003}^2 个

6. 设等差数列的首项及公差均为非负整数，项数不小于 3，且各项和为 97^2，则这样的数列共有 （　　）

A. 2 个　　B. 3 个　　C. 4 个　　D. 5 个

二、填空题

7. 设向量 $\overrightarrow{OA}$ 绕点 O 逆时针旋转 $\frac{\pi}{2}$ 得向量 $\overrightarrow{OB}$，且 $2\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}=(7,9)$，则向量 $\overrightarrow{OB}=$ __________.

8. 设 $[x]$ 为不超过 x 的最大整数，则 $\left[\frac{10^{20000}}{10^{100}+3}\right]$ 的个位数字为__________.

9. 已知 $f(x)$ 是定义在自然数集上的函数，$f(1)=\frac{3}{2}$，且对于任意 $x,y\in\mathbf{N}$ 有 $f(x+y)=\left(1+\frac{y}{x+1}\right)f(x)+\left(1+\frac{x}{y+1}\right)f(y)+x^2y+xy+xy^2$，则 $f(x)=$______.

10. 等差数列 $\{a_n\}$ 满足条件 $a_1^2+a_{n+1}^2\leqslant M$，其中 n 和 M 均为正整数，则 $S=a_{n+1}+a_{n+2}+\cdots+a_{2n+1}$ 的最大值为________.

11. n 边形的边依次记为 $a_1,a_2,\cdots,a_n$，每条边都涂以红、黄、绿三种颜色中的一种，要使相邻两边的颜色互不相同，则有________种不同的涂色方法.

12. 一个网球选手是用他赢得的场数除以他参赛的场数来计算“取胜比”的，即赢球的概率．在某个周末开始时，他赢球的概率恰好是 0.500；而在这个周末他共赛了四场，胜三场和负一场；到周末结束时，他的赢球概率超过 0.503，则在这个周末开始前他所取胜的场数的最大值可能是________.