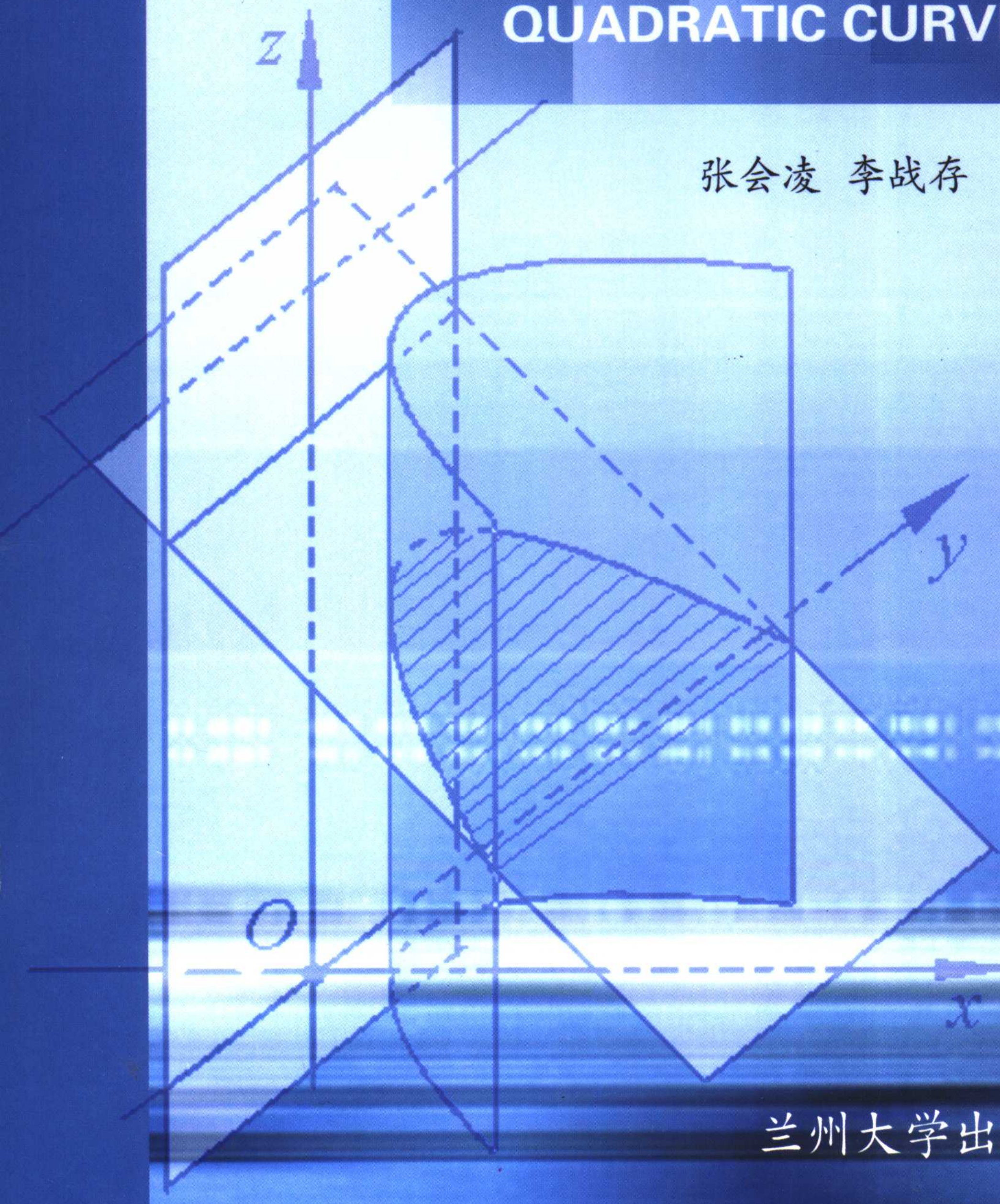
二次曲线

QUADRATIC CURVES

张会凌 李战存 著

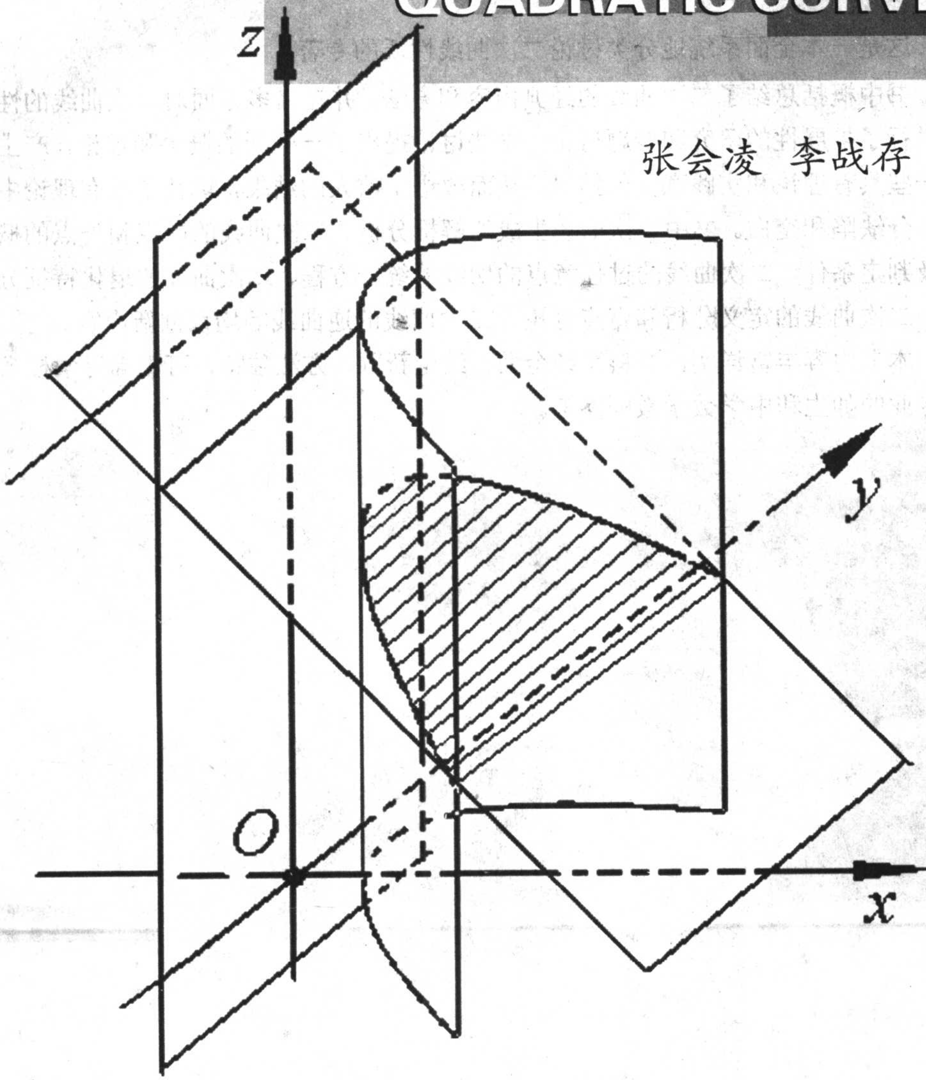


兰州大学出版社

二次曲线

QUADRATIC CURVES

张会凌 李战存 著



兰州大学出版社

图书在版编目(CIP)数据

二次曲线/张会凌,李战存著.—兰州:兰州大学出版社,2006.3

ISBN 7-311-02781-0

Ⅰ.二... Ⅱ.①张...②李... Ⅲ.二次曲线—研究 Ⅳ.O186.11

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2006)第 033322 号

二 次 曲 线

张会凌 李战存 著

兰州大学出版社出版发行

兰州市天水南路 222 号 电话:8912613 邮编:730000

E-mail:press@onbook.com.cn

http://www.onbook.com.cn

兰州大学出版社激光照排中心排版

兰州奥林印刷有限责任公司印刷

开本:787×1092 1/16 印张:17.75

2006 年 3 月第 1 版 2006 年 3 月第 1 次印刷

字数:310 千字 印数:1~1000 册

ISBN7-311-02781-0/O·190 定价:29.00 元

内 容 提 要

这是一本全面系统地分类讨论二次曲线性质的专著。

书中概括总结了二次曲线的经典内容和方法，并在诸多方面对二次曲线的性质进行了扩展性的研究和专题讨论。这些讨论提出了一些新的概念和理论，产生了一些具有理论和实践意义的结果，从而改进了前人的结果，填补了现有理论中的部分缺陷和空白。书中二次曲线生成的解析分析、二次曲线的内点和外点的概念及判定条件、二次曲线的过任意点的切线的统一方程、二次曲线的退化特征分析、二次曲线的定义分析和奇点理论、二次曲线的逆曲线等均系创新内容。

本书内容丰富详实，资料系统全面，结论新颖，方法独特，可供高等学校数学专业的师生和中学数学教师参考。

序

二次曲线是一种重要的平面曲线，它不仅是解析几何中重点研究的对象之一，在许多数学分支中也具有重要的作用，对二次曲线的研究不断启发着一些数学分支的发展。二次曲线在工程技术、天体力学、物理学以及其他科学研究领域也有广泛的应用。

张会凌、李战存两位教师在高校从事解析几何学、微分几何学和其他数学课程的教学多年，有完善的教学理论、扎实的数学功底和科学的探索精神。他们把科研与教学结合，在二次曲线这一经典数学的领域里作出了一系列有意义的结果。以此为主要内容，他们的专著对二次曲线二十余年来的有关成果做了全面深入的讨论和总结，在很大程度上扩充和完善了二次曲线的理论。书中在多个方面提出了一些新的概念、理论和方法，具有较强的创新性。

本书内容丰富，体例新颖，既包含了各种文献中关于二次曲线已有的结果，又增加了许多新的材料，对从事解析几何研究与教学的工作者颇有帮助，是一本很好的教学参考书。

范先令

2006 年 3 月 16 日于兰州大学

前　言

二次曲线是一类非常重要的平面曲线，其一般性质属于解析几何的经典内容。从公元前4世纪到现在，二次曲线的理论已发展得相对很成熟。

但是，人们对事物的认识总是不断深化的，现有的高等院校的教科书和其他文献中对二次曲线各种性质的讨论也不够全面和深入。作为对理论的探讨和教学实践心得的总结，近几十年来包括本书作者在内的不少数学工作者在数学学术刊物上发表了多篇讨论二次曲线性质的论文，丰富了二次曲线的理论和成果。其中，作者以十余篇论文的形式，对已有的二次曲线的理论进行扩充和完善，提出了一些新的概念和理论，产生了一系列具有理论和实践意义的新结果。

我们撰写本书的目的是为了及时总结和反映数学界对二次曲线研究的最新成果，同时也给高等学校数学专业的师生和中学数学教师提供一本关于二次曲线理论的内容丰富详实、资料系统全面、结论新颖、方法独特的教学参考书。

为了理论的完整性和对问题的分析的透彻性，本书在较为深入和广泛的层面上，综合应用现代数学有关分支的工具和方法对二次曲线的各种性质进行了扩展性的研究和分类专题讨论。在书中，我们通过对二次曲线的诸多性质的讨论改进了前人的结果，填补了现有理论中的部分缺陷和空白，并提出了一些新的理论和方法，如二次曲线生成的解析分析、二次曲线的反演理论、二次曲线的内点和外点的概念及判定条件、二次曲线的过任意一点的切线的统一方程、二次曲线的退化特征、二次曲线的定义分析和奇点理论、二次曲线的逆曲线等。我们所力求体现的特点是全面性、系统性、深入性和创新性。

全书包括了二次曲线的经典内容概述、生成分析、极坐标方程和参数方程、退化特征与定义分析、切线和奇点理论、反演和相似变换、二次曲线的逆曲线理论以及二次曲线的作图等共14章。其中第1、2、3、6章及第11、12、14章的部分内容由李战存撰写，张会凌完成了本书其余部分的撰写和统稿，以及全书的录入排版和计算机绘图工作。

本书是甘肃省教育厅2005－2006年度科研资助项目。

衷心希望读者指出我们的不足和未检查出的错误。

作　者

2006－3－12

目　　录

第 1 章　圆锥曲线的标准方程和简单性质……1
1.1　圆……1
1.2　椭圆……2
1.3　抛物线……5
1.4　双曲线……6
1.5　椭圆和圆的关系……9
1.6　共焦的椭圆族和双曲线族……10
1.7　抛物线和双曲线的一支的区别……11
1.8　圆锥曲线的统一直角坐标方程……11
第 2 章　一般二次曲线及其重要的相关元素……13
2.1　虚元素、无穷远元素及若干重要记号的引进……13
2.2　二次曲线与直线的相关位置……15
2.3　二次曲线的渐进方向、中心和渐近线……16
2.4　二次曲线的切线……21
2.5　二次曲线的直径……24
2.6　二次曲线的主直径与主方向……30
第 3 章　二次曲线方程的化简与分类……35
3.1　平面直角坐标变换……35
3.2　二次曲线方程的化简与分类……40
3.3　应用不变量化简二次曲线的方程……54
3.4　应用表征方程化简二次曲线的方程……62
第 4 章　二次曲线的生成分析……71
4.1　圆锥曲线生成的综合分析……71
4.2　二次曲线生成的解析分析……75
第 5 章　利用极坐标研究二次曲线……80
5.1　广义极坐标系与曲线的极坐标方程……80
5.2　圆锥曲线的统一极坐标方程……83
5.3　三类圆锥曲线之间的区别和内在联系……84
5.4　圆和椭圆的极坐标方程……85
5.5　双曲线及其渐近线的极坐标方程……89
5.6　抛物型曲线的极坐标方程……97
5.7　关于极坐标系的若干问题……100
第 6 章　二次曲线的参数方程……114
6.1　曲线的参数方程……114
6.2　参数方程和普通方程的关系……116
6.3　圆锥曲线的参数方程……119
6.4　二次曲线的参数方程的应用……126
6.5　双曲线与双曲函数……139

第7章 圆锥曲线定义中的常数与轨迹类型……143
7.1 椭圆定义中的常数对轨迹类型的影响……143
7.2 双曲型定义中的常数对轨迹类型的影响……146
第8章 二次曲线的退化特征分析……150
8.1 椭圆型曲线的退化特征……150
8.2 双曲型曲线的退化特征……152
8.3 抛物型曲线的退化特征……159
第9章 论二次曲线的切线与奇点……162
9.1 二次曲线切线的两种定义的等价性……162
9.2 非退化二次曲线过其内点和外点的切线……164
9.3 论二次曲线的奇点……170
9.4 退化二次曲线过其外一点的切线……173
9.5 退化二次曲线过其上一点的切线……177
9.6 用极线法求二次曲线的切线……180
9.7 圆锥曲线的切线和法线的几何性质……182
第10章 二次曲线的反演变换与相似变换……183
10.1 反演公式及若干重要性质……183
10.2 圆锥曲线的反演变换……185
10.3 关于曲线的反演变换的两点注记……195
10.4 二次曲线的相似变换……196
第11章 二次曲线系及有关的轨迹问题……198
11.1 二次曲线的自由度……198
11.2 过定曲线交点的二次曲线系……199
11.3 二次曲线的若干轨迹问题举例……203
第12章 点变换与二次曲线的仿射性质……207
12.1 点变换……207
12.2 仿射对应与仿射变换……214
12.3 平面仿射变换的性质……222
12.4 几种特殊的仿射变换……225
12.5 二次曲线的仿射性质……233
12.6 二次曲线的仿射分类……237
12.7 利用仿射变换研究圆锥曲线举例……240
第13章 二次曲线的逆曲线……251
13.1 非退化二次曲线的逆曲线……251
13.2 退化二次曲线的逆曲线……254
第14章 二次曲线的作图……257
14.1 用折纸法和三角板画圆锥曲线……257
14.2 根据圆锥曲线的参数方程作图……261
14.3 根据圆锥曲线的定义和性质作图……262
14.4 用线束法作圆锥曲线……265
14.5 圆锥曲线有关元素的作图……267
参考文献……273

第1章　圆锥曲线的标准方程和简单性质

二次曲线是一种重要的平面曲线．在平面直角坐标系或仿射坐标系下，这种曲线的方程总是一个关于 x 和 y 的二元二次方程，故统称其为二次曲线．二次曲线分为退化的和非退化的两大类，其中非退化的实曲线有椭圆（包括圆）、双曲线和抛物线3种．由于这3种曲线都可以看成一个平面与一个圆锥面的交线，人们也称其为圆锥曲线或圆锥截线．

本书的重点是详尽地讨论一般二次曲线的各种性质．为了后面各章引用和讨论的方便，本章对圆锥曲线的标准方程和一些简单的性质进行概述．

在许多情况下，我们以向量代数为工具对问题进行讨论，并假定在平面上总已经建立了平面笛卡儿右旋直角坐标系．有时为了讨论问题的需要，也会利用极坐标系、空间直角坐标系和仿射坐标系．

1.1　圆

定义 1.1.1　平面上到定点的距离等于定长的动点的轨迹叫圆．其中，定点叫圆的**中心**，定长叫圆的**半径**．

在直角坐标系下，设定点为 $C(a,b)$，定长为非负常数 R，设 $M(x,y)$ 为轨迹上任意一点，约定用向量 $\overrightarrow{AB}$ 的模 $|\overrightarrow{AB}|$ 或 $|AB|$ 来表示平面上或空间两点 A、B 间的距离，则有

$$|\overrightarrow{MC}|=R$$

此即

$$\sqrt{(x-a)^2+(y-b)^2}=R$$

两边平方，得中心在 C、半径为 R 的圆的标准方程为

$$(x-a)^2+(y-b)^2=R^2 \tag{1.1-1}$$

若取圆的中心为坐标原点，即 $a=b=0$，则（1.1－1）变为

$$x^2+y^2=R^2 \tag{1.1-2}$$

将（1.1－1）展开，有

$$x^2+y^2-2ax-2by+a^2+b^2-R^2=0$$

这是一个不含交叉项且平方项系数相等（皆为1）的二元二次方程．

反过来，任给一个不含交叉项且平方项系数相等的二元二次方程

$$Ax^2+Cy^2+2Dx+2Ey+F=0$$

其中 $A=C\neq 0$. 给方程两边同除以 A，就得如下形式的方程

$$x^2+y^2+2mx+2ny+p=0 \tag{1.1—3}$$

配方得

$$(x+m)^2+(y+n)^2=m^2+n^2-p \tag{1.1—4}$$

若 $m^2+n^2-p>0$，则（1.1—4）表示一个以（$-m$，$-n$）为中心、$\sqrt{m^2+n^2-p}$ 为半径的圆，称为**实圆**；

若 $m^2+n^2-p=0$，则（1.1—4）表示一点（$-m$，$-n$），它可看作以（$-m$，$-n$）为中心，0 为半径的圆，称为**点圆**；

若 $m^2+n^2-p<0$，则方程（1.1—4）没有实图形，一般称其为**虚圆**.

综上，在平面直角坐标系下，方程（1.1—3）总表示一个圆，称其为圆的一般方程.

圆（1.1—1）关于过中心 C（a，b）的任意一条直线对称，是一种中心对称和轴对称图形.

1.2 椭圆

定义 1.2.1 平面上到两个定点的距离之和等于定长的动点的轨迹叫**椭圆**. 其中，定长应大于两定点间的距离.

设 $M(x, y)$为动点，$F_1(c,0)$ 和 $F_2(-c,0)$ 为两个定点（$c>0$），且有常数 $a>c$ 使

$$|\overrightarrow{MF_1}|+|\overrightarrow{MF_2}|=2a$$

则 $\sqrt{(x-c)^2+y^2}+\sqrt{(x+c)^2+y^2}=2a$

整理得 $(a^2-c^2)x^2+a^2y^2=a^2(a^2-c^2)$

由于 $a>c$，有 $a^2-c^2>0$，令

$$a^2-c^2=b^2$$

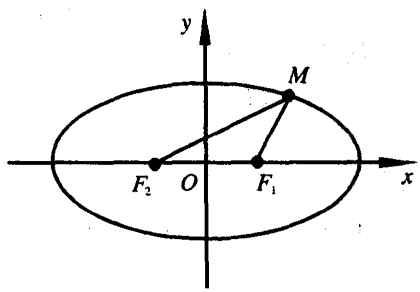


图 1—1

代入上式，就得

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1 \tag{1.2—1}$$

这就是椭圆上任一点 M 的坐标 x 和 y 满足的关系式.

反之，设 $M_1(x_1, y_1)$ 的坐标满足（1.2－1），即有 $\dfrac{x_1^{\ 2}}{a^2}+\dfrac{y_1^{\ 2}}{b^2}=1$，则 $y_1^2=b^2\left(1-\dfrac{x_1^2}{a^2}\right)$．代入 $|\overrightarrow{M_1F_1}|^2=(x_1-c)^2+y_1^{\ 2}$，并利用 $a^2-c^2=b^2$ 化简，就得 $|\overrightarrow{M_1F_1}|^2=\left(a-\dfrac{c}{a}x_1\right)^2$．

同理有 $|\overrightarrow{M_1F_2}|^2=\left(a+\dfrac{c}{a}x_1\right)^2$．

显然，$\dfrac{x_1^{\ 2}}{a^2}\leqslant 1$，即 $\left|\dfrac{x_1}{a}\right|\leqslant 1$，因而 $\left|\dfrac{c}{a}x_1\right|\leqslant c<a$，于是

$$|\overrightarrow{M_1F_1}|=a-\frac{c}{a}x_1,\ |\overrightarrow{M_1F_2}|=a+\frac{c}{a}x_1$$

从而 $|\overrightarrow{M_1F_1}|+|\overrightarrow{M_1F_2}|=2a$．由定义 1.2.1 知点 M_1 在椭圆上．

于是在所选取的直角坐标系下，椭圆的方程就是（1.2－1）．

我们在这里证明（1.2－1）是椭圆的方程，或着说方程（1.2－1）的图形是椭圆，强调了两个方面：

1° 椭圆上的点的坐标都满足方程（1.2－1）——纯粹性；

2° 坐标满足方程（1.2－1）的点都在椭圆上——完备性．

严格地说，在确定某一轨迹的方程时，纯粹性和完备性都是需要证明的．但在保证推导可逆时，我们常常省去完备性的证明．

方程（1.2－1）称为**椭圆的标准方程**，所用的坐标系称为**标准坐标系**．假定 $a>b>0$，分别称 a 和 b 为椭圆的**半长轴**和**半短轴**（若 $b>a$，则称 b 和 a 分别为椭圆的半长轴和半短轴），$2a$ 和 $2b$ 称为椭圆的**长轴**和**短轴**．两个定点 F_1 和 F_2 称为椭圆的**焦点**．两焦点间的距离 $|\overrightarrow{F_1F_2}|=2c$ 称为椭圆的**焦距**，c 叫**半焦距**．椭圆上的点到焦点的线段长称为**焦半径**．c 可依据 a 和 b 利用公式 $c^2=a^2-b^2$ 求得．

在（1.2－1）中，以 $-x$ 代 x 方程不变，以 $-y$ 代 y 方程也不变，故椭圆（1.2－1）关于 x 轴和 y 轴都对称．同时以 $-x$ 和 $-y$ 代替方程中的 x 和 y，方程也不变，故椭圆是中心对称的．两对称轴的交点是椭圆的对称中心，称为椭圆的**中心**．对称轴和椭圆的 4 个交点 $(\pm a,\ 0)$ 和 $(0,\ \pm b)$ 称为椭圆的**顶点**．

椭圆（1.2－1）的图形位于矩形 $\{(x,\ y)|-a\leqslant x\leqslant a,\ -b\leqslant y\leqslant b\}$ 之内，因而是有界曲线．

椭圆的长轴和短轴之比 a/b 反映了椭圆的扁平程度．当这个值愈接近 1 时，

椭圆就愈接近圆．而当这个值愈接近 0 时，椭圆就愈扁平，愈接近于直线段（比值 b/a 接近 0 时，椭圆的形状也接近于直线段）．由于

$$a^2-b^2=c^2$$

有
$$\frac{b}{a}=\frac{\sqrt{a^2-c^2}}{a}=\sqrt{1-\left(\frac{c}{a}\right)^2}$$

故 a/b 的值与 c/a 的值有关．称 $e=c/a$ 为椭圆的**离心率**，易见 $0\leqslant e<1$.

设 $M(x, y)$ 是椭圆上任意一点，可得到相应的焦半径为

$$|\overrightarrow{MF_1}|=a-\frac{c}{a}x,\quad |\overrightarrow{MF_2}|=a+\frac{c}{a}x$$

因 $e=c/a$，有

$$a-\frac{c}{a}x=a-ex=e\left(\frac{a}{e}-x\right),\quad a+\frac{c}{a}x=a+ex=e\left(\frac{a}{e}+x\right)$$

于是有

$$\frac{|\overrightarrow{MF_1}|}{-x+\frac{a}{e}}=\frac{|\overrightarrow{MF_2}|}{x+\frac{a}{e}}=e \tag{1}$$

（1）中两个分母分别是点 M 到直线

$$l_1:\ x-\frac{a}{e}=0 \quad 和 \quad l_2:\ x+\frac{a}{e}=0$$

的距离．称这两条直线为椭圆的两条**准线**．因 $e=c/a$，准线的方程也可写为

$$x-\frac{a^2}{c}=0 \quad 和 \quad x+\frac{a^2}{c}=0$$

当把椭圆的焦点取在 y 轴上时，如果还假定参数满足 $a>b>0$，则椭圆的方程应写为

$$\frac{x^2}{b^2}+\frac{y^2}{a^2}=1$$

不论坐标系如何选取，椭圆的焦点总在长轴上．

一个椭圆由其半长轴 a 和半短轴 b 惟一确定．当椭圆的半长轴为 a，半短轴为 b，中心为 (m, n)，对称轴为 $x=m$ 和 $y=n$ 时，椭圆的方程可写为

$$\frac{(x-m)^2}{a^2}+\frac{(y-n)^2}{b^2}=1 \quad 或 \quad \frac{(x-m)^2}{b^2}+\frac{(y-n)^2}{a^2}=1$$

在一般情况下，我们并不作 $a>b>0$ 的假定．

1.3　抛物线

定义 1.3.1　若平面上的动点到一定点的距离等于它到不过该定点的定直线的距离，则称该动点的轨迹为**抛物线**.

设定点为 F，定直线为 l，过 F 作 l 的垂线，记垂足为 A. 设 $|\overrightarrow{AF}|=p$，取 $\overrightarrow{AF}$ 所在的直线为 x 轴，正向与 $\overrightarrow{AF}$ 相同. 取线段 AF 的垂直平分线为 y 轴，y 轴的正向取法应使 xOy 成右手系. 此时，AF 的中点 O 即为坐标原点，焦点 F 的坐标为 $(p/2,\ 0)$，l 的方程是 $x=-p/2$.

若 $M\ (x,\ y)$ 是抛物线 Γ 上任一点，则 $|\overrightarrow{MF}|=|\overrightarrow{MN}|$，$N$ 是过 M 向 l 所作垂线的垂足. 此即

$$\sqrt{(x-p/2)^2+y^2}=\left|x+p/2\right|$$

整理并化简得

$$y^2=2px \tag{1.3—1}$$

反之，任取坐标满足方程（1.3—1）的一点 M_1，则必可证明 M_1 到 F 和 l 的距离相等，因而 M_1 必在抛物线上，于是，（1.3—1）就是抛物线的方程.

称（1.3—1）为抛物线的标准方程. 定点 F 和定直线 l 分别称为抛物线的**焦点**和**准线**，p 叫抛物线的**焦参数**. 在标准坐标系下，抛物线（1.3—1）的焦点坐标是 $(p/2,\ 0)$，准线方程为

$$x+p/2=0$$

准线和抛物线不相交.

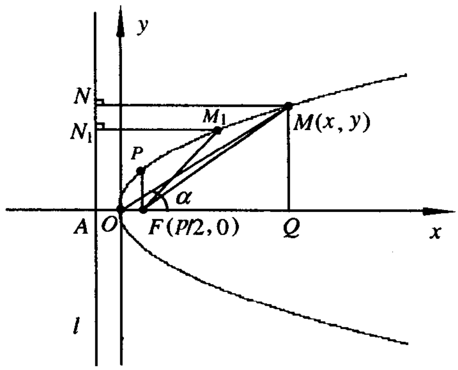


图 1—2

抛物线的焦参数是从焦点到准线的距离. 从抛物线的焦点 F 引对称轴的垂线交抛物线于 P，焦参数也是线段 PF 的长度，此线段叫抛物线的**半正交弦**.

在（1.3—1）中以 $-y$ 代 y 而方程不变，故抛物线（1.3—1）关于 x 轴对称. x 轴与抛物线的交点 O 称为抛物线的**顶点**.

由于 $p>0$，不论 y 为何值，总有 $y^2\geqslant 0$，因而总有 $x\geqslant 0$. 这表明抛物线（1.3—1）的图形都在 x 轴正向的一侧，即右半平面上. 当 x 无限增大时，$|y|$ 也无限增大，故抛物线是无界曲线.

在图（1—2）中，对于抛物线上任一点M，直线OM的斜率为

$$\tan\alpha=\frac{y}{x}=\frac{y^2}{xy}=\frac{2px}{xy}=\frac{2p}{y} \tag{2}$$

当点M沿抛物线无限远离顶点时，M与x轴的距离$|y|$无限增大，而从（2）式可见，这时$\tan\alpha$趋近于零．因此点M到x轴的距离虽然无限增大，但直线OM的方向却逐渐和x轴的方向平行，这就是抛物线的图形的特点．

在抛物线上任取一点M，因M到焦点F的距离和M到准线l的距离之比总等于1，我们说抛物线的离心率$e=1$．

由于坐标系选取的不同，同一抛物线的方程也可以是$y^2=-2px$，$x^2=\pm 2py$的形式．它们都称为抛物线的标准方程．

以p为焦参数，(m,n)为顶点的抛物线，若对称轴是直线$y=n$，则方程为$(y-n)^2=\pm 2px(x-m)$；若对称轴是直线$x=m$，则方程为$(x-m)^2=\pm 2p(y-n)$．方程中正负号的选取与抛物线的开口方向有关．若抛物线的开口方向与坐标轴的正向一致，则方程中取正号，反之取负号．

1.4　双曲线

定义 1.4.1　平面上到两个定点的距离之差等于常数的动点的轨迹叫**双曲线**．

为了保证轨迹是实图形，一般要求这个常数的绝对值小于两定点间的距离．

设$M(x,y)$为动点，$F_1(c,0)$和$F_2(-c,0)$为两个定点．假定有常数a满足$0<a<c$，使

$$|\overrightarrow{MF_1}|-|\overrightarrow{MF_2}|=\pm 2a$$

即有

$$\sqrt{(x-c)^2+y^2}-\sqrt{(x+c)^2+y^2}=\pm 2a,$$

整理得

$$(c^2-a^2)x^2-a^2y^2=a^2(c^2-a^2)$$

由于$c^2-a^2>0$，设$b^2=c^2-a^2$，则上式就变成

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1 \tag{1.4—1}$$

这就是双曲线上任一点M的坐标x和y所满足的关系式．

反之可证，坐标满足方程（1.4—1）的任一点必在双曲线上．因而（1.4—1）就是双曲线的方程．

称（1.4—1）为双曲线的**标准方程**．两定点F_1和F_2称为双曲线的两个**焦点**．$2c$称为双曲线的**焦距**，而c叫**半焦距**．

从双曲线的标准方程出发，可得到如下结论．

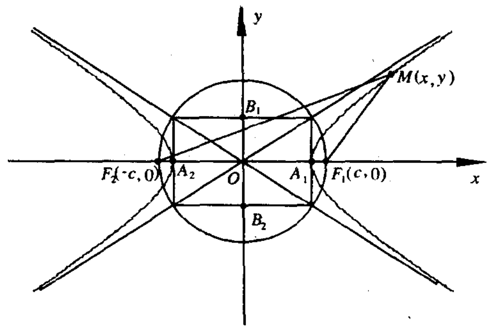


图 1—3

双曲线（1.4—1）关于 x 轴、y 轴和原点都对称．原点是双曲线的**中心**．

在(1.4—1)中令 $y=0$，得 $x=\pm a$，即 x 轴与双曲线（1.4—1）的交点是 $A_1(a,\ 0)$ 和 $A_2(-a,\ 0)$．在（1.4—1）中令 $x=0$，则得 $y=\pm b\mathrm{i}$，这表示双曲线（1.4—1）与 y 轴没有实交点．我们称 $A_1(a,\ 0)$ 和 $A_2(-a,\ 0)$ 为双曲线的两个**实顶点**，称线段 A_1A_2（或 $|A_1A_2|=2a$）或其所在的直线为双曲线的**实轴**；而称 $B_1(0,\ b)$ 和 $B_2(0,\ -b)$ 为双曲线的两个**虚顶点**，称线段 B_1B_2（或 $|B_1B_2|=2b$）或其所在的直线为双曲线的**虚轴**．称 a 为**半实轴**，b **为半虚轴**．当 $a=b$ 时称双曲线为**等轴双曲线**，也叫**等边双曲线**．

由（1.4—1)，双曲线上任一点的横坐标 x 满足 $\dfrac{x^2}{a^2}\geqslant 1$，即满足 $|x|\geqslant a$．这表明双曲线分为两支，一支在直线 $x=-a$ 的左侧，另一支在直线 $x=a$ 的右侧．而这两条直线 $x=\pm a$ 之间没有双曲线上的点（图 1—3）．

由于（1.4—1）可改写成

$$y=\pm\frac{b}{a}\sqrt{x^2-a^2} \tag{3}$$

当 $x\to\infty$ 时，$|y|\to\infty$，这表示双曲线是一种无界曲线．

将（3）改写成 $y=\pm\dfrac{b}{a}x\sqrt{1-\dfrac{a^2}{x^2}}$，易见当 $x\to\infty$ 时 $\dfrac{a^2}{x^2}\to 0$，从而 $y\to\pm\dfrac{b}{a}x$，这反映了双曲线在远离顶点处无限伸展的趋势．

直线 $y=\pm\dfrac{b}{a}x$ 叫做双曲线（1.4—1）的两条**渐近线**．

在第 I 象限，任取双曲线上一点 M_0，过 M_0 作 y 轴的平行线交直线 $y=\dfrac{b}{a}x$ 于 Q_0，则可证明永远有 $|\overrightarrow{M_0Q_0}|>0$，且当 M_0 沿双曲线远离双曲线的顶点时，$|\overrightarrow{M_0Q_0}|\to 0$．所以，双曲线上的点虽然永远不会落在直线 $y=\dfrac{b}{a}x$ 上，却从下方无限地接近这条直线．这就是称其为渐近线的原因．由双曲线的对称性知，在其余 3 个象限情况也是类似的，因而双曲线有两条渐近线．

双曲线的渐近线是矩形 $\{(x, y) \mid x=\pm a, y=\pm b\}$ 的两条对角线（看成直线），这个矩形称为双曲线的**相伴矩形**.

对任一双曲线，其相伴矩形的 4 个顶点到中心的距离都等于 $\sqrt{a^2+b^2}=c$，因而双曲线的两个焦点与相伴矩形的 4 个顶点共圆.

由于参数 a 和 b 的不同，双曲线的开口大小各不相同. 这个开口大小与渐近线的斜率 k 有关. $|k|$ 愈大，开口愈大. 因 $k=\pm b/a$，双曲线的开口大小与半虚轴和半实轴的比值有关.

因 $b^2=c^2-a^2$，$\dfrac{b}{a}=\sqrt{\left(\dfrac{c}{a}\right)^2-1}$，比值 $\dfrac{b}{a}$ 与比值 $\dfrac{c}{a}$ 有关. 称比值 $e=\dfrac{c}{a}$ 为双曲线的**离心率**. 因 $c>a$，故有 $e>1$. e 越大，双曲线的开口越大；当 e 趋于 1 时，渐近线的斜率趋于 0，双曲线的开口也“趋于 0”.

称直线 $x+\dfrac{a^2}{c}=0$ 和 $x-\dfrac{a^2}{c}=0$ 为双曲线（1.4—1）的两条**准线**，其方程也可写为 $x-\dfrac{a}{e}=0$ 和 $x+\dfrac{a}{e}=0$.

类似于椭圆的情形，可以证明对于双曲线（1.4—1）上的点 $M(x, y)$，必定有

$$\frac{|\overrightarrow{MF_1}|}{|x-a/e|}=\frac{|\overrightarrow{MF_2}|}{|x+a/e|}=e$$

式中的两个分子是点 M 对应的焦半径，而两个分母则分别是 M 到两条准线的距离.

根据定义 1.4.1，方程

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=-1 \tag{1.4—2}$$

表示的曲线也是双曲线. 此双曲线的实轴与 y 轴重合，半实轴是 b；虚轴与 x 轴重合，半虚轴是 a.

称方程（1.4—1）和（1.4—2）表示的两条双曲线为一对**共轭双曲线**. 两条共轭的双曲线有相同的对称轴和中心，有相同的渐近线和相同的半焦距，但其中一条的实轴是另一条的虚轴，焦点总在实轴上，准线总和实轴垂直.

当双曲线的对称轴平行于坐标轴，中心为 $C(x_0, y_0)$ 时，双曲线的方程可写为

$$\frac{(x-x_0)^2}{a^2}-\frac{(y-y_0)^2}{b^2}=\pm 1$$

1.5 椭圆和圆的关系

在椭圆的方程（1.2－1）中令 $b=a$，则方程变成

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{a^2}=1 \quad 即 \quad x^2+y^2=a^2$$

这是以原点为中心，以 a 为半径的圆．所以，圆是长轴与短轴相等的椭圆，是椭圆的特殊情形．当 $a=b$ 时，椭圆的半焦距 $c=0$，两焦点重合，离心率 $e=0$．准线方程 $x=\pm a/e$ 变成"$x=\pm\infty$"，这相当于把椭圆的准线移到了无穷远处．

于是，圆可以看成长短轴相等的椭圆，两焦点重合的椭圆，离心率等于零的椭圆，或准线在无穷远处的椭圆．这些表述从不同的角度阐明了椭圆和圆的内在关系．

我们进一步给出关于椭圆和圆的关系的两个结论．

命题 1.5.1 把圆在某一直径的方向均匀压缩就变成椭圆．

证 任给一圆，其方程是

$$\bar{x}^2+\bar{y}^2=a^2 \qquad (4)$$

其中 $\overline{M}(\bar{x},\ \bar{y})$ 是该圆上任一点．

不妨设对圆均匀压缩的方向平行于 y 轴，而在平行于 x 轴的方向不受压缩．如图 1－4，若圆上的点 $\overline{M}(\bar{x},\ \bar{y})$ 经压缩后变为 $M(x,\ y)$，则由假设有 $x=\bar{x}$．而圆与 y 轴的交点 $\overline{B}(0,\ a)$ 受压缩后的点仍在 y 轴上．设其为 $B(0,\ b)$，则由于压缩是均匀的，有 $y/\bar{y}=b/a$．于是圆上任一点受均匀压缩后的位置变化规律是

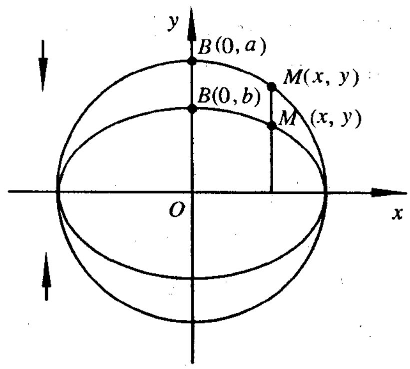


图 1－4

$$\begin{cases} x=\bar{x} \\ y=\dfrac{b}{a}\bar{y} \end{cases} \quad 即 \quad \begin{cases} \bar{x}=x \\ \bar{y}=\dfrac{a}{b}y \end{cases}$$

代入（4）就得

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$$

于是命题得证．