与2001年最新教材同步

初三代数

主编 周祥昌

创新联想

同步导学

丛书主编 周仲钺 孙彪

龍門書局

创新联想同步导学

初三代数

主　编：周祥昌
编　者：周祥昌　谈竞华

龍門書局
2001

创新联想同步导学

初三代数

周祥昌 主编

责任编辑 王 巍 车 驰

龙门书局出版

北京东黄城根北街16号

邮政编码：100717

中国人民解放军第1201工厂印刷

科学出版社总发行 各地书店经销

*

2001年6月第一版 开本：890×1240 A5

2001年6月第一次印刷 印张：8 7/8

印数：1－40 000 字数：299 000

ISBN 7-80160-256-0/G·253

定价：10.00元

(如有印装质量问题，我社负责调换)

创新联想同步导学

丛书编委会

开拓联想思维　培育创新英才

——《创新联想同步导学》丛书序

教育是一门艺术，艺术的生命在于创新。

教育是一门科学，科学的力量在于联想。

创新是民族进步的灵魂。具有创新意识、善于学习的莘莘学子是国家持续发展的不竭动力，是中华民族屹立于世界先进民族之林的重要基础。

为了满足广大中学生的需要，我们组织了一大批优秀的特、高级教师编写了这套《创新联想同步导学》丛书，以崭新的教学理念，紧扣各科教学大纲，充分发挥教材的作用，精确把握中、高考的立意方向，准确指点教材重点、难点和误点，培养探索精神，优化学习心态，激发学生的学习热情，充分发掘广大中学生自身的学习潜能，以使他们在学习过程中主动参与，积极思考，得到真正发展。

本丛书具有四大特点：

同步性　初中与2001年最新三年制初中教材配套，高一、高二与最新试验修订本教材配套，导学内容与所有各科各单元、章节全程同步。

实用性　精编平时练习及备考练习，重点难点有透视，误点有点拨，课本难题有解答。

综合性　各科练习内容与相关学科的知识渗透相容、贯通综合，适应中、高考命题意向。

创新性　选题新颖，解题方法灵活，重在指导开拓思路，培养知识迁移、多向联想的能力。

“一切为了学生素质的提高”是我们的宗旨。相信《创新联想同步导学》丛书一定会导出广大中学生成功的信心，导出21世纪具有联想思维的的创新人才！

启　明

2001年5月

开 卷 明 义

数学是一门思维的科学，数学活动是一项思维的运动。本书的编写，紧扣最新的教学大纲，和现行教材同步，立足注重基础与锐意创新，旨在帮助学生运用实践与认识，对立与统一，联系与发展等辩证法思想来探究数学问题。使学习数学的过程成为再发现、再创造的过程，激发学生学习数学的积极性，树立学好数学的信心，形成敢于克服困难，勇于追求新知的良好思维品质，促进全面发展。帮助学生在有形与无形的考试中脱颖而出，为同学们以后的终身学习和发展打下扎实的基础。

本书在体例上有下列特点：

1. 每章设有**“要点精析与知识迁移”“范例剖析与思维发散”“新题展示与创新拓展”“自我检测与进阶演练”**四个栏目。力求把握每章的总体、精析重点，化解难点，矫正误点。既注意知识的全面性，更注意突出重点。保证支撑数学学科知识体系的主干知识占有较高的比例，并保持必要的深度，从而形成一个有序的网络化的知识体系。力求以数学教材为蓝本，为展现创新意识开拓空间。重视数学定理、公式的推导过程和例题的求解过程，创设新的问题情景，转换题目的设问角度。让学生逐步学会用已有的数学知识去探索新的数学问题；学会将实际问题抽象为数学问题，并加以解决。在这个学习过程中，基本数学思想和数学方法得到形成和发展，数学能力得到培养和锻炼。

2. 书后附有期末测试卷一至二份，供期末复习时参考。

3. 书末还附有常用公式及定理，本书自我检测与进阶演练的答案与提示。

2001 年 3 月

目　录

第十二章　一元二次方程

第十三章　函数及其图象

第十四章　统计初步

第十二章 一元二次方程

重点精析与知识迁移

重点难点透视

1. 整式方程、一元二次方程的含义及一元二次方程的一般形式.

2. 一元二次方程的四种解法:直接开平方法、配方法、公式法、因式分解法.

3. 一元二次方程的根的判别式;用判别式判别方程根的情况.

4. 一元二次方程的根与系数之间的关系.

5. 利用一元二次方程来解决实际问题,并能正确地用语言表述问题及其解题过程.

6. 可化为一元二次方程的分式方程的解法.

7. 简单的二元二次方程组的解法.

知识点精析

1. 方程的两边都是关于未知数的整式,这样的方程叫整式方程;

2. 只含有一个未知数,且未知数的最高次数是 2 的整式方程叫做一元二次方程;

3. 任何一个关于 x 的一元二次方程,经过整理,都可以化成一般形式:$ax^2+bx+c=0(a\neq0)$.其中 ax^2 叫做二次项,a 叫做二次项系数;bx 叫做一次项,b 叫做一次项系数;c 叫做常数项.一次项系数 b 和常数项 c 可以是任何实数,二次项系数 a 是不等于 0 的实数;

4. 形如 $(x-a)^2=b(b\geqslant0)$ 的方程常用直接开平方法来解;把方程的常数项移到方程的右边,把左边配成一个完全平方式,如果右边是一个非负数,就可进一步用直接开平方法来解,这种方法叫做配方法;把一元二次方程 $ax^2+bx+c=0(a\neq0)$ 运用配方法,得 $\left(x+\dfrac{b}{2a}\right)^2=\dfrac{b^2-4ac}{4a^2}$,在 $b^2-4ac\geqslant0$ 的前提下,得求根公式 $x=\dfrac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$,这种方法叫做公式法;在一元二次方程的一边是 0,而另一边易于分解成两个一次因式时,就可用因式分解法来解;

5. $\Delta=b^2-4ac$ 叫做一元二次方程 $ax^2+bx+c=0(a\neq0)$ 的根的判别式. 当 $\Delta>0$ 时,方程有两个不相等的实数根;当 $\Delta=0$ 时,方程有两个相等的实数根;当 $\Delta<0$ 时,方程没有实数根. 反过来也对;

6. 如果一元二次方程 $ax^2+bx+c=0(a\neq0)$ 的两个根是 x_1、x_2,那么 $x_1+x_2=-\frac{b}{a}$,$x_1x_2=\frac{c}{a}$,这个一元二次方程的根与系数之间的关系叫做韦达定理,运用它由已知一元二次方程的一个根可求出另一个根与未知系数,运用它可求出方程的两个根的倒数和与平方和,运用它可作出新的方程;

7. 用公式求出方程 $ax^2+bx+c=0(a\neq0)$ 的两个根 x_1、x_2 后,可将二次三项式 $ax^2+bx+c(a\neq0)$ 分解为 $a(x-x_1)(x-x_2)$;

8. 会列出一元二次方程来解决实际问题,特别要注意正确地用数学语言来表述问题,进一步提高逻辑思维能力和分析问题、解决问题的能力;

9. 会用去分母或换元法将分式方程化为一元二次方程来解,并会验根;把解得的整式方程的根代入所乘的整式,如果不使整式的值为 0,就是原方程的根;如果使整式的值为 0,则就是原方程的增根,必须舍去;

10. 会用代入法解由一个一元一次方程和一个二元二次方程组成的方程组."消元"、"降次"是解方程中常用的方法,也是数学中很重要的方法之一.

知识点迁移

1. 学习一元二次方程时,一方面要通过一元二次方程的学习,巩固、加深对已学过的数和式及其运算的认识和对已学过的一元一次方程及其解法的认识,同时也要注意把这部分知识学好,为今后学习二次函数、一元二次不等式、二次曲线等数学知识打好基础,发挥好它的承前启后的作用;

2. 配方法是推导公式的工具,除了用于推导一元二次方程的求根公式以外,在学习其他数学内容时也有广泛的应用;

3. 通过"消元"、"降次",可将二元二次方程组化归为一元二次方程来解,通过"去分母"可将分式方程化归为一元一次方程或一元二次方程来解,这种化归的思想方法在初中数学学习中将逐步渗透,并在以后的数学学习中不断深化;

4. 在解题时,应具体分析方程的特点,选择适当的方法,要在掌握一元二次方程各种解法的前提下,牢固掌握公式及其推导过程.

误点点拨

1. 不要一看到方程 $ax^2+bx+c=0$ 就以为这是一个一元二次方程. 当 $a=0$,$b\neq0$ 时,这个方程就是关于 x 的一元一次方程. 因而遇到问题"若方程

$(m-1)x^2+mx+m=0$有实根，求实数 m 的取值范围"时，不能只想到 $m\neq1$ 且 $\Delta\geqslant0$ 来解，还要想到 $m=1$ 时，方程也有实根.

2. 不要一看到解二次方程就把方程化为一般形式后再来解，这时未必简单，例如解$(2x+3)^2=(x-1)^2+4x$，即化成$(2x+3)^2=(x+1)^2$，然后用开平方法来解就较为简便. 一定要选择适当的方法，如解二次方程 $ax^2+bx+c=0(a\neq0)$时，如果能用十字相乘法把 ax^2+bx+c 分解成两个一次因式的积，当然用因式分解法较好；如果不能一下子看出可以分解，再用公式法去解一定能成功；

3. 在解分式方程时，需要将方程的两边都乘以各分式的最简公分母，使它变形为整式方程，这种变形有可能有产生增根，因此，必须检验变形后方程的根是否为原方程的根；

4. 以两个数 x_1、x_2 为根的一元二次方程为 $x^2-(x_1+x_2)x+x_1x_2=0$，也可以为 $a(x-x_1)(x-x_2)=0(a\neq0)$；

5. 方程 $x^2=0$ 有两个相等的实根 $x_1=x_2=0$，不要误成一个根 $x=0$；

6. 当 $\Delta=b^2-4ac<0$ 时，方程 $ax^2+bx+c=0(a\neq0)$没有实数根，不能说没有根.

◆ 一元二次方程及其解法

范例剖析与思维发散

典型例题

把一元二次方程化成一般形式

例1 将方程$(4x+5)(6-x)=4x^2-1$ 化成一般形式__________，并指出二次项系数是________，一次项系数是________，常数项是________.

解 去括号，得 $-4x^2+19x+30=4x^2-1$

移项，合并同类项，得方程的一般形式：

$8x^2-19x-31=0$

二次项系数是 8，一次项系数是 -19，常数项是 -31.

说明 如果去括号、移项、合并同类项，得方程的一般形式：$-8x^2+19x+31=0$，则二次项系数是 -8，一次项系数是 19，常数项是 31.

因为在一元二次方程的一般形式 $ax^2+bx+c=0(a\neq0)$中,并没有对 a、b、c 作正和负的限制.因此上述结果均是正确的.即将一元二次方程化为一般形式的结果可能有两种情况,并导致"各项"、"各项系数"的不同.如果规定 $a>0$,这样的答案就唯一了.因此习惯上,一元二次方程的一般形式 $ax^2+bx+c=0(a\neq0)$中,$a>0$.

例2 请判定下列方程是否是一元二次方程:

(1)$x^2+1=0$;

(2)$3x^2+2x+1=\frac{1}{2}(6x^2+5x+4)$;

(3)$7y^2-8+4y=2(3y-4)$;

(4)$mx^2+5x-6=0$;

(5)$3x^2-2y+1=0$;

(6)$x^2-\frac{1}{x}-4=0$.

解 方程(1)、(3)是一元二次方程,方程(1)中一次项系数为0,方程(3)中常数项为0;方程(2)可变形为$\frac{1}{2}x+1=0$,不是一元二次方程,而是一元一次方程;当 $m=0$ 时,方程(4)不是一元二次方程,当 $m\neq0$ 时,方程(4)是一元二次方程;方程(5)不是一元二次方程,而是二元方程;方程(6)不是整式方程,也不是一元二次方程.

例3 当 a 满足条件________时,关于 x 的方程$(a^2-4)x^2+(a+2)x=8$是一元二次方程;当 a 满足条件________时,关于 x 的方程$(a^2-4)x^2+(a+2)x=8$ 是一元一次方程.

解 当 $a\neq\pm2$ 时,关于 x 的方程$(a^2-4)x^2+(a+2)x=8$ 是一元二次方程;当 $a=2$ 时,关于 x 的方程$(a^2-4)x^2+(a+2)x=8$ 是一元一次方程.

说明 当 $a=-2$ 时,$(a^2-4)x^2+(a+2)x=8$ 变为 $0=8$,显然不是等式,也不是一元一次方程了.

运用直接开平方法解方程

例4 解方程$(4x-1)^2=9$

解 因为 $4x-1$ 是9的平方根,所以

$4x-1=\pm3$,

即 $4x-1=3$,或 $4x-1=-3$.

所以 $x_1=1,x_2=-\frac{1}{2}$.

说明 如果一元二次方程的一边是含有未知数的一次式的平方,另一边是一个非负数.可以用直接开平方法来解.其根据为正数 a 的平方根有两个:$\sqrt{a}$ 和 $-\sqrt{a}$.所以解方程$(x+t)^2=a(a>0)$,得 $x+t=\sqrt{a}$ 或 $x+t=-\sqrt{a}$,即 $x_1=$

$-t+\sqrt{a}, x_2=-t-\sqrt{a}$.

又因为负数没有平方根,所以如果一元二次方程的一边是一个完全平方式,而另一边为负数,则该方程无实数根.如方程 $x^2+1=0$ 无实数根.

运用配方法解方程

例 5 解方程 $2x^2+1=5x$

解 移项,得 $2x^2-5x+1=0$,

把方程的两边都除以 2,得 $x^2-\frac{5}{2}x+\frac{1}{2}=0$,

把常数项移到等号的右边,得 $x^2-\frac{5}{2}x=-\frac{1}{2}$.

方程的两边同时加上一次项系数一半的平方,得

$$x^2-\frac{5}{2}x+\left(\frac{5}{4}\right)^2=-\frac{1}{2}+\left(\frac{5}{4}\right)^2,$$

即 $$\left(x-\frac{5}{4}\right)^2=\frac{17}{16}.$$

用直接开平方法求出方程的解,得

$$x-\frac{5}{4}=\pm\frac{\sqrt{17}}{4},$$

即 $x_1=\frac{5+\sqrt{17}}{4}, x_2=\frac{5-\sqrt{17}}{4}$.

说明 配方法的实质是先把方程的常数项移到方程的右边,再把左边配成一个完全平方式,然后用直接开平方法来解方程.

特别注意,由公式 $a^2+2ab+b^2=(a+b)^2$,把式子 x^2+mx 加上 $\left(\frac{m}{2}\right)^2$ 才能得到一个完全平方式 $\left(x+\frac{m}{2}\right)^2$.

运用公式法解方程

例 6 解方程 $x^2-2mx=x-m^2-m$.

解 整理,得

$$x^2-(2m+1)x+m^2+m=0,$$

因为 $a=1, b=-(2m+1), c=m^2+m$.

$$b^2-4ac=[-(2m+1)]^2-4\times1\times(m^2+m)=4m^2+4m+1-4m^2-4m$$
$$=1>0,$$

所以 $x=\frac{2m+1\pm\sqrt{1}}{2}=\frac{2m+1\pm1}{2}$,

所以 $x_1=m+1, x_2=m$.

说明 用公式法解方程的一般步骤为:(1)把方程化为一般形式 ax^2+bx+

$c=0(a\neq0)$;(2)写出 a、b、c 的值;(3)求出 b^2-4ac 的值;(4)若 $b^2-4ac\geqslant0$ 时,利用公式 $x=\dfrac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$ 求出方程的根;当 $b^2-4ac<0$,则方程没有实数根.

运用因式分解法解方程

例 7　解下列方程

(1)$(x-3)^2=4(x+1)^2$;

(2)$x^2-2(\sqrt{3}+1)x+4\sqrt{3}=0$.

解　(1)$(x-3)^2-4(x+1)^2=0$.

把方程左边分解因式,得

$[(x-3)+2(x+1)][(x-3)-2(x+1)]=0$.

$x-3+2x+2=0$,或 $x-3-2x-2=0$.

$3x-1=0$,或 $-x-5=0$.

$x_1=\dfrac{1}{3}$,$x_2=-5$.

(2)$(x-2\sqrt{3})(x-2)=0$

$x-2\sqrt{3}=0$,或 $x-2=0$,

$x_1=2\sqrt{3}$,$x_2=2$.

说明　如果一元二次方程的一边是 0,而另一边易于分解成两个一次因式时,就可以用因式分解法来解.其实质是将一元二次方程转化成两个一元一次方程求解,其数学基本思想是"降次".

对于解一般的一元二次方程 $ax^2+bx+c=0(a\neq0)$.应先考虑用因式分解法来解,因为这种方法简便、直接,如果不易分解因式时,可用公式法解,也可以用配方法解或直接开平方法解.一般地,公式法对于解任何一元二次方程都适用,是解一元二次方程的基本方法.所以在解题时,应具体分析方程的特点,选择适当的方法.

例 8　分别用因式分解法、配方法、公式法解方程 $3x^2-5x=2$.

解　(1)因式分解法

$3x^2-5x-2=0$,

$(3x+1)(x-2)=0$,

所以　$3x+1=0$ 或 $x-2=0$,

$x_1=-\dfrac{1}{3}$,$x_2=2$.

(2)配方法

将方程变形为 $x^2-\frac{5}{3}x=\frac{2}{3}$，

$$x^2-\frac{5}{3}x+\left(\frac{5}{6}\right)^2=\frac{2}{3}+\left(\frac{5}{6}\right)^2,$$

$$\left(x-\frac{5}{6}\right)^2=\frac{49}{36},$$

$$x-\frac{5}{6}=\pm\frac{7}{6},$$

即 $x_1=2, x_2=-\frac{1}{3}$.

(3)公式法

将方程变形为 $3x^2-5x-2=0$，

因为 $a=3, b=-5, c=-2$.

$$\Delta=b^2-4ac=(-5)^2-4\times3\times(-2)=49>0.$$

所以 $x=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}=\frac{5\pm\sqrt{49}}{6}=\frac{5\pm7}{6}$

$$x_1=2, x_2=-\frac{1}{3}.$$

例 9 用适当方程解下列方程

(1) $(3x-1)(x+1)=4$；

(2) $(5x-4)^2-(4x-3)^2=0$；

(3) $x^2+2=2\sqrt{2}x$；

(4) $(a^2-b^2)x^2-4abx=a^2-b^2$. $(a^2-b^2\neq0)$

解 (1)原方程可变形为

$$3x^2+2x-5=0,$$

$$(3x+5)(x-1)=0,$$

$3x+5=0$，或 $x-1=0$，

$$x_1=-\frac{5}{3}, x_2=1.$$

(2)原方程可变形为

$$[(5x-4)+(4x-3)][(5x-4)-(4x-3)]=0,$$

即 $(9x-7)(x-1)=0$，

$9x-7=0$，或 $x-1=0$，

$$x_1=\frac{7}{9}, x_2=1.$$

又解 原方程可变形为

$$(5x-4)^2=(4x-3)^2$$

因为 $5x-4$ 是 $(4x-3)^2$ 的平方根，

$5x-4=4x-3$，或 $5x-4=-(4x-3)$，

$x_1=1, x_2=\frac{7}{9}$.

(3)原方程可变形为

$x^2-2\sqrt{2}x+2=0$,

$(x-\sqrt{2})^2=0$,

$x_1=x_2=\sqrt{2}$.

又解 原方程可变形为

$x^2-2\sqrt{2}x+2=0$,

因为 $a=1, b=-2\sqrt{2}, c=2$

$\Delta=b^2-4ac=(-2\sqrt{2})^2-4\times1\times2=8-8=0$,

所以 $x_{1,2}=\frac{2\sqrt{2}\pm\sqrt{0}}{2\times1}=\frac{2\sqrt{2}\pm0}{2}=\sqrt{2}$,

$x_1=\sqrt{2}, x_2=\sqrt{2}$.

(4)原方程可变形为

$(a^2-b^2)x^2-4abx-(a^2-b^2)=0$,

$[(a+b)x+(a-b)][(a-b)x-(a+b)]=0$,

$(a+b)x+a-b=0$，或 $(a-b)x-(a+b)=0$.

因为 $a^2-b^2\neq0$. 所以 $a+b\neq0$ 且 $a-b\neq0$

所以 $x_1=-\frac{a-b}{a+b}, x_2=\frac{a+b}{a-b}$.

说明 对于一次项系数为 0 的一元二次方程 $ax^2+c=0(a\neq0)$，当 $ac\leqslant0$ 时，可以用直接开平方法解得 $x=\pm\sqrt{-\frac{c}{a}}$；当 $ac>0$ 时，方程无实数根.

对于常数项为 0 的一元二次方程 $ax^2+bx=0(a\neq0)$，可用因式分解法解，先变形为 $x(ax+b)=0$，得 $x_1=0, x_2=-\frac{b}{a}$. 要避免发生两边同时除以 x，得 $x=-\frac{b}{a}$ 的错误.

对于 $m\neq0$ 的一元二次方程 $(mx-n)^2=0$，要避免发生两边开平方，得 $mx-n=0$，即 $x=\frac{n}{m}$ 的错误，该方程的根为 $x_1=\frac{n}{m}, x_2=\frac{n}{m}$.

课本难题

例 10 用直接开平方法解方程 $x-x^2=5x^2+x$.

解 原方程可变形为

$6x^2=0.$

$x_1=0, x_2=0.$

例 11 用配方法解关于 x 的方程 $x^2+px+q=0$.

解 $x^2+px=-q,$

$x^2+px+\left(\frac{p}{2}\right)^2=-q+\left(\frac{p}{2}\right)^2,$

$\left(x+\frac{p}{2}\right)^2=\frac{p^2-4q}{4},$

当 $p^2\geqslant 4q$ 时, $x+\frac{p}{2}=\pm\frac{\sqrt{p^2-4q}}{2}$;

$x_1=-\frac{p}{2}+\frac{\sqrt{p^2-4q}}{2},\quad x_2=-\frac{p}{2}-\frac{\sqrt{p^2-4q}}{2}$;

当 $p^2<4q$ 时,方程没有实数根.

例 12 解下列关于 x 的方程:

(1) $(x+a)(x-b)+(x-a)(x+b)=2a(ax-b)$;

(2) $abx^2-(a^4+b^4)x+a^3b^3=0(ab\neq 0)$.

解 (1)原方程可变形为

$$x^2+ax-bx-ab+x^2-ax+bx-ab=2a^2x-2ab.$$

即 $2x^2-2a^2x=0, x^2-a^2x=0, x(x-a^2)=0.$

$x_1=0, x_2=a^2.$

(2) $(ax-b^3)(bx-a^3)=0$

$ax-b^3=0$, 或 $bx-a^3=0$.

因为 $ab\neq 0$ 所以 $a\neq 0$ 且 $b\neq 0$.

$$x_1=\frac{b^3}{a}, x_2=\frac{a^3}{b}.$$

说明 书上这两道 B 组的题安排在公式法后,因式分解法前,显然是要大家采用公式法来解的,解法如下:

(1)原方程可变形为 $x^2-a^2x=0$.

$x=\frac{a^2\pm\sqrt{a^4}}{2}=\frac{a^2\pm a^2}{2},$

$x_1=0, x_2=a^2.$

(2)因为 $a'=ab, b'=-(a^4+b^4), c'=a^3b^3$.

$\Delta=b'^2-4a'c'=[-(a^4+b^4)]^2-4(ab)(a^3b^3)=(a^4+b^4)^2-4a^4b^4=(a^4-b^4)^2\geqslant 0.$