高考数学专项夺标

GAOKAO SHUXUE
ZHANWANG YU DUICE

# 高考数学
# 展望与对策

高考数学研究组 组编

ZHEJIANG UNIVERSITY PRESS
浙江大學出版社

# 高考数学展望与对策

高考数学研究组　组编

编　委　（按姓氏笔画为序）

马茂年　王小海　王　新　王旭斌　方夏婴
李惟峰　许静香　朱进初　张金良　陈　伟
陈红艳　徐国君　徐小明　倪志香　俞　昕
俞建光　韩国梁　蒋瑞龙　谢春计　蔡小雄

浙江大學出版社

**图书在版编目(CIP)数据**

高考数学展望与对策 / 高考数学研究组组编. —杭州:
浙江大学出版社,2006.3
ISBN 7-308-04660-5

Ⅰ.高… Ⅱ.高… Ⅲ.数学课—高中—升学参考
资料 Ⅳ.G634.603

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2006)第 018466 号

**出版发行** 浙江大学出版社
(杭州天目山路 148 号 邮政编码 310028)
(E-mail:zupress@mail.hz.zj.cn)
(网址:http://www.zjupress.com)
**责任编辑** 邹小宁
**排　　版** 浙江大学出版社电脑排版中心
**印　　刷** 浙江大学印刷厂
**开　　本** 787mm×960mm 1/16
**印　　张** 11.25
**字　　数** 247 千字
**版 印 次** 2006 年 3 月第 1 版 **2006 年 4 月第 2 次印刷**
**书　　号** ISBN 7-308-04660-5/G・1038
**定　　价** 13.00 元

颖的体例，独特的风格呈现给读者。丛书包括《高考数学新颖题解读》、《高考数学解题法揭秘》、《高考数学选择题突破》、《高考数学填空题巧解》、《高考数学中档题攻略》、《高考数学综合题透析》、《高考数学展望与对策》共七个分册。丛书内容全面细致，容量大，既抓住主干知识的重点、难点、热点，又不留知识死角。题型全面，题量充分，体例设计科学，构思奇巧。丛书可以带领你进入数学的殿堂，领略殿堂的美丽和奥妙，掌握更熟练的方法和技巧。

丛书由高考数学研究组组织编写。尽管在成书过程中，我们本着近乎苛刻的态度，题题推敲，层层把关，力求能够帮助读者更好地把握丛书的脉络和精华，但书中也难免有疏忽和纰漏之处，诚挚地希望广大师生批评指正。

# 目　　录

# 第一部分　命题展望与应试对策

## 1. 集合与简易逻辑命题展望与应试对策

### 一、命题展望

从近几年的高考题看，集合考题通常是用列举法或描述法给出集合后，考查空集与全集的概念；元素与集合、集合与集合之间的关系；集合的交、并、补集运算；集合的有关术语和符号，如$\in$，$\subseteq$，$\cap$，$\cup$等；将集合广泛用于函数、不等式、三角、解析几何和立体几何的内容中，考查同学们对数学语言的理解和转化能力. 以上内容又是以集合的运算为重点考查的. 逻辑联结词与充要条件这部分，充要条件是高考的一个热点，考题大都为比较容易的选择题，难度系数在 0.7 左右.

在今后的命题中，将一如既往，以客观题（选择填空）为主，并主要考查集合与简易逻辑的基础知识与基本运算，考查集合与简易逻辑知识和其他知识的有机渗透，进而体现在知识的交汇点处命题的指导思想. 而偶有涉及的主观题中，将以集合与充要条件的知识为背景，联合方程、函数、不等式、数列、解析几何和立体几何等知识，形成综合性较强的试题. 另外，还会涉及绝对值不等式与二次不等式等问题，并形成主观题中的难题甚至是压轴题. 同时，试题中还会涉及与逻辑相关符号的正确使用问题.

### 二、应试对策

1. 准确掌握概念，运用概念解题. 本单元概念多，符号多，必须注意区分，如搞清“$\in$，$\notin$”（元素与集合关系）与“$\subseteq$，$\not\subseteq$，$\subsetneqq$”（集合与集合关系）的应用区别；注意空集与全集在解题中的作用，讨论问题时重点防止遗漏，注意逻辑联结词“或”、“且”、“非”与集合中的“交”、“并”、“补”的对照.

2. 注意数学思想方法. 解决集合知识的应用问题时要广泛应用数形结合、分类讨论、函数与方程思想、等价转化思想等，并辅之以配方法、图像法、判别式法达到灵活解题的目的.

3. 处理集合问题的常用方法有：

(1)代表元素分析法. 确定属于哪类集合（数集、点集），关键要搞清楚集合的元素是什么？是函数关系中自变量的取值范围，还是因变量的取值范围，还是曲线上的点等.

(2)集合语言转化法. 复杂的集合语言与简单的集合语言的转化，集合语言与方程、不等式语言的转化.

(3)先算后验法. 通常不满足条件的参数值主要有两种：①所求参数值使已知的某集合中出现相同的元素，与集合中元素的互异性相矛盾；②由求出的参数值推出与已知条件相矛盾的结论. 在检验时，可着重从这两方面入手，数值回代，决定取舍.

(4)图形辅助法. 树立数形结合意识，充分利用韦恩图、数轴、函数图像帮助解题，提高数学解题中的形象思维能力.

4. 当一个命题的真假不易判断时，往往可以转化为判断与其等价的逆否命题的真假. 反证法常用来证明含一些特殊词语如“非”、“至多”、“至少”等命题. 证明的一般步骤是：(1)否定命题(即反设)；(2)推出矛盾；(3)得出结论. 其关键是第(2)步.

5. 处理充分、必要条件问题时，要分清条件与结论，可以用集合显示其关系，或用等价题推理和判断. 当充要条件的判断以选择题的形式出现时，可用特值法进行筛选.

## 三、范例解析

**例 1**　已知集合 $M=\{y\mid y=x^2+1,x\in\mathbf{R}\}$，$N=\{y\mid y=x+1,x\in\mathbf{R}\}$，则 $M\cap N=$ （　　）

A. $(0,1),(1,2)$　　B. $\{(0,1),(1,2)\}$

C. $\{y\mid y=1$，或 $y=2\}$　　D. $\{y\mid y\geqslant 1\}$

**分析**　集合 $M,N$ 是用描述法表示的，元素是实数 $y$ 而不是有序实数对 $(x,y)$，因此 $M,N$ 分别表示函数 $y=x^2+1(x\in\mathbf{R})$ 和函数 $y=x+1(x\in\mathbf{R})$ 的值域，求 $M\cap N$，即求两函数值域的交集.

**解析**　$M=\{y\mid y=x^2+1,x\in\mathbf{R}\}=\{y\mid y\geqslant 1\}$，$N=\{y\mid y=x+1,x\in\mathbf{R}\}=\{y\mid y\in\mathbf{R}\}$.

所以 $M\cap N=\{y\mid y\geqslant 1\}\cap\{y\mid (y\in\mathbf{R})\}=\{y\mid y\geqslant 1\}$. 故应选 D.

**说明**　① 本题求 $M\cap N$，经常有同学先解方程组 $\begin{cases}y=x^2+1,\\y=x+1,\end{cases}$ 得 $\begin{cases}x=0,\\y=1\end{cases}$ 或 $\begin{cases}x=1,\\y=2,\end{cases}$ 从而错选 B. ② 集合是由元素构成的，认识集合要从认识元素开始，要注意区分 $\{x\mid y=x^2+1\}$，$\{y\mid y=x^2+1,x\in\mathbf{R}\}$，$\{(x,y)\mid y=x^2+1,x\in\mathbf{R}\}$ 这三个不同的集合.

**例 2**　设集合 $M=\left\{x\,\middle|\,x=\dfrac{k}{2}+\dfrac{1}{4},k\in\mathbf{Z}\right\}$，$N=\left\{x\,\middle|\,x=\dfrac{k}{4}+\dfrac{1}{2},k\in\mathbf{Z}\right\}$，则集合 $M$ 与集合 $N$ 的关系为______.

**解析**　集合 $M,N$ 是用描述法表示的，判断两集合的关系实际是判断集合中元素的关系，因而 $M,N$ 中元素的特点分别为 $x=\dfrac{2k+1}{4}(k\in\mathbf{Z})$，$x=\dfrac{k+2}{4}(k\in\mathbf{Z})$，可以很容易地看出集合 $M$ 与 $N$ 的关系：$M$ 是 $N$ 的真子集，即 $M\subsetneqq N$.

**例 3**　已知集合 $M=\{(x,y)\mid x+ay=2\}$，$N=\{(x,y)\mid ax+y=3\}$，其中 $a$ 为实数，若 $M\cap N=\varnothing$，求实数 $a$ 的值.

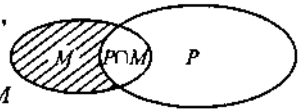
**解析**　由于可以看出集合 $M$ 与集合 $N$ 表示的是两条直线，所以把 $M\cap N=\varnothing$ 转化为两直线：$x+ay=2$ 与 $ax+y=3$ 的平行关系，解得 $a=1$ 或 $-1$.

**说明**　由于点的集合构成直线，点的集合也能构成平面，所以在分析研究元素与集合、集合与集合之间的关系，经常转化为点、线、面的位置关系来分析.

**例 4**　设 $M,P$ 是两个非空集合，定义 $M$ 与 $P$ 的差集为：$M-P=\{x\mid x\in M$，且 $x\notin P\}$，则 $M-(M-P)$ 等于 （　　）

A. $P$　　B. $M\cap P$　　C. $M\cup P$　　D. $M$

**解析**　当 $M \cap P \neq \varnothing$ 时，由图知，$M-P$ 为右图中的阴影部分，则 $M-(M-P)$ 显然是 $M \cap P$.




当 $M \cap P = \varnothing$ 时，$M-P=M$，此时有 $M-(M-P)=M-M=\{x \mid x \in M，且 x \notin M\}=\varnothing=M \cap P$.

综上，应选 B.

**说明**　*这是一道信息迁移题，属于应用性开放问题，"$M-P$"是同学们在中学教材不曾学过的一种集合运算关系，根据它的元素的属性，可以用数形结合的方法把它解决.*

**例 5**　已知向量集合 $M=\{\boldsymbol{a} \mid \boldsymbol{a}=(1,2)+\mu(3,4),\mu \in \mathbf{R}\}$，$N\{\boldsymbol{a} \mid \boldsymbol{a}=(-2,-2)+n(4,5),n \in \mathbf{R}\}$，则 $M \cap N$ 等于　（　　）

A. $\{(1,1)\}$　　B. $\{(1,-1),(-2,-2)\}$

C. $\{-2,-2\}$　　D. $\varnothing$

**解析**　$M$ 中元素的特点为 $\boldsymbol{a}=(1+3\mu,2+4\mu)$，集合 $N$ 中元素特点为 $\boldsymbol{a}=(-2+4n,-2+5n)$，所以求两个集合的交集，即求两个向量的坐标相等.

所以 $1+3\mu=-2+4n,2+4\mu=-2+5n$.

解得 $\mu=-1,n=0$.

所以相等向量坐标为 $(-2,-2)$.

故 $M \cap N=\{(-2,-2)\}$，选 C.

**说明**　*本题以向量作为集合的元素给出两个集合，是以向量为载体考查向量相等的条件，有一定的灵活性.*

**例 6**　已知 $p$ 是 $r$ 的充分不必要条件，$s$ 是 $r$ 的必要条件，$q$ 是 $s$ 的必要条件，那么 $p$ 是 $q$ 成立的　（　　）

A. 充分不必要条件　　B. 必要不充分条件

C. 充要条件　　D. 既不充分也不必要条件

**分析**　*本题直接考查简易逻辑的基本概念及其逻辑推理能力.*

**解析**　由题意易画出命题 $p,q,r$ 间的如下关系：$p \Rightarrow r \Rightarrow s \Rightarrow q$，且 $r \nRightarrow p$，于是 $p \Rightarrow q$，但 $q \nRightarrow p$. 故答案选 A.

**例 7**　命题 $p$：若 $a,b \in \mathbf{R}$，则 $|a|+|b|>1$ 是 $|a+b|>1$ 的充分而不必要条件. 命题 $q$：函数 $y=\sqrt{|x-1|-2}$ 的定义域是 $(-\infty,-1] \cup [3,+\infty)$，则　（　　）

A. "$p$ 或 $q$" 为假　　B. "$p$ 且 $q$" 为真

C. $p$ 真 $q$ 假　　D. $p$ 假 $q$ 真

**分析**　*本题通过命题与逻辑联结词等知识的运用考查绝对值不等式的性质、函数的定义域等基础内容.*

**解析**　由绝对值不等式性质，知 $|a|+|b| \geqslant |a+b|$，所以 $|a+b|>1 \Rightarrow |a|+|b|>1$，反之不成立. 故 $|a|+|b|>1$ 是 $|a+b|>1$ 的必要而不充分条件，即 $p$ 为假命题.

又由 $|x-1|-2 \geqslant 0$，得 $x \leqslant -1$ 或 $x \geqslant 3$，故 $q$ 为真命题，答案选 D.

**例 8**　已知数列 $\{a_n\}$，那么"对任意的 $n \in \mathbf{N}^*$，点 $P_n(n,a_n)$ 都在直线 $y=2x+1$ 上"是"$\{a_n\}$

为等差数列"的　　(　　)

A. 必要而不充分条件　　B. 充分而不必要条件

C. 充要条件　　D. 既不充分也不必要条件

**分析**　本题借助充要条件的有关知识较深入地考查等差数列的概念与性质.

**解析**　若 $P_n(n,a_n)$ 都在直线 $y=2x+1$ 上,则 $a_n=2n+1$,数列 $\{a_n\}$ 为等差数列. 反过来,显然未必成立. 故答案选 B.

**例 9**　函数 $f(x)=\begin{cases}x, x\in P,\\ -x, x\in M,\end{cases}$ 其中 $P,M$ 为实数集 $\mathbf{R}$ 的两个非空子集,又规定 $f(P)=\{y\mid y=f(x),x\in P\}$, $f(M)=\{y\mid y=f(x),x\in M\}$. 给出下列四个判断:

① 若 $P\cap M=\varnothing$,则 $f(P)\cap f(M)=\varnothing$;

② 若 $P\cap M\neq\varnothing$,则 $f(P)\cap f(M)\neq\varnothing$;

③ 若 $P\cup M=\mathbf{R}$,则 $f(P)\cup f(M)=\mathbf{R}$;

④ 若 $P\cup M\neq\mathbf{R}$,则 $f(P)\cup f(M)\neq\mathbf{R}$.

其中正确判断有　　(　　)

A. 1 个　　B. 2 个　　C. 3 个　　D. 4 个

**分析**　本题旨在通过集合语言的正确运用,深入挖掘函数的概念. 解决本题的关键是必须准确理解集合语言.

**解析**　首先,命题 ④ 显然成立. 其次,所谓函数,首先必须是映射,而作为映射,像必须惟一,于是若 $P\cap M\neq\varnothing$,不妨设 $x_0\in P\cap M$,则由 $x_0\in P$,得 $f(x_0)=x_0$;而由 $x_0\in M$,得 $f(x_0)=-x_0$,于是 $x_0=-x_0$,故 $x_0=0$,即当 $P\cap M\neq\varnothing$ 时,$P$ 与 $M$ 的公共元素只有一个且为 0,此时 $0\in f(P)\cap f(M)$,故判断 ② 为真命题. 又若 $P=\{x\mid x\geqslant 0\}$,$M=\{x\mid x<0\}$,则虽 $P\cap M=\varnothing$ 且 $P\cup M=\mathbf{R}$,但 $f(P)\cap f(M)=\{y\mid y>0\}\neq\varnothing$ 且 $f(P)\cup f(M)=P\neq\mathbf{R}$,故命题 ①、③ 均为假命题. 答案选 B.

**例 10**　设集合 $P=\{m\mid -1<m<0\}$,$Q=\{m\in\mathbf{R}\mid mx^2+4mx-4<0$ 对任意实数 $x$ 恒成立$\}$,则下列关系中成立的是　　(　　)

A. $P\subsetneqq Q$　　B. $Q\subsetneqq P$　　C. $P=Q$　　D. $P\cap Q=\varnothing$

**分析**　试题以二次三项式恒成立问题为背景,综合考查集合间的包含关系、分类讨论的意识和简单的推理与计算能力,体现数学的思辨性、缜密性,深层次地考查集合思想的运用.

**解析**　显然当 $m=0$ 时,$mx^2+4mx-4<0$ 恒成立,故 $0\in Q$,但 $0\notin P$,故排除 B,C. 另一方面,当 $m=-\dfrac{1}{2}$ 时,$mx^2+4mx-4=-\dfrac{1}{2}x^2-2x-4=-\dfrac{1}{2}(x+2)^2-2<0$ 恒成立,故 $-\dfrac{1}{2}\in Q$,又 $-\dfrac{1}{2}\in P$,有 $P\cap Q\neq\varnothing$,排除 D. 故只有 A 正确.

**例 11**　设集合 $A=\{x\mid x^2-3x+2=0\}$,集合 $B=\{x\mid 2x^2-2px+p^2-3p+4=0\}$,若 $B\subseteq A$,求实数 $p$ 的取值范围.

**解析**　$A=\{x\mid x^2-3x+2=0\}=\{1,2\}$,

因为 $B\subseteq A$,所以 $B$ 可能为 $\varnothing$,$\{1\}$,$\{2\}$ 或$\{1,2\}$.

在方程 $2x^2-2px+p^2-3p+4=0$ 中，$\Delta=4p^2-8(p^2-3p+4)=-4(p-2)(p-4)$，

①$p<2$ 或 $p>4$，则 $\Delta<0$，所以 $B=\varnothing\subseteq A$；

② 若 $p=2$，原方程为 $2x^2-4x+2=0$，所以 $B=\{1\}\subseteq A$；

③ 若 $p=4$，原方程为 $2x^2-8x+8=0$，所以 $B=\{2\}\subseteq A$；

④ 若 $2<p<4$，则 $\Delta>0$，原方程有两个相异实根，由 $B\subseteq A=\{1,2\}$，得 $B=\{1,2\}$，解得 $p=3$.

综上可知，$p\leqslant 2$ 或 $p=3$ 或 $p\geqslant 4$.

**说明**　本题主要考查子集的概念和运算，以及方程与不等式的思想、分类讨论的思想，对各个知识点的综合性要求很高.

**例 12**　设 $S$ 是满足下列两个条件数的组成集合.(1)$S$ 内不含 1；(2) 若 $a\in S$，则 $\frac{1}{1-a}\in S$. 问：

① 若 $2\in S$，则 $S$ 中必有其他两个数，求出这两个数；

② 若 $a\in S$，求证：$1-\frac{1}{a}\in S$；

③ 在集合 $S$ 中元素的个数能否只有一个？

**解析**　① 若 $2\in S$，则 $\frac{1}{1-2}=-1\in S$；同理，$\frac{1}{1-(-1)}=\frac{1}{2}\in S$，而 $\frac{1}{1-\frac{1}{2}}=2\in S$. 故 $2\in S$ 时，$S$ 中还有两个元素，即 $-1,\frac{1}{2}$.

② 若 $a\in S$，由已知 $\frac{1}{1-a}\in S$，所以 $\frac{1}{1-\frac{1}{1-a}}\in S\Rightarrow 1-\frac{1}{a}\in S$.

③ 如果 $S$ 中的元素只有一个，那么 $a=1-\frac{1}{a}$，即有 $a^2-a+1=0$，此方程显然没有解，故 $S$ 中的元素只有一个是不可能的.

**例 13**　已知集合 $A=\{1,3,-x^3\}$，$B=\{1,x+2\}$，是否存在实数 $x$，使得集合 $B$ 是 $A$ 的子集？若存在，求出集合 $A$、$B$；若不存在，请说明理由.

**解析**　假设 $B$ 是 $A$ 的子集，即 $B\subseteq A$，也就是集合 $B$ 的元素必是集合 $A$ 的元素.

① 若 $x+2=3$，解得 $x=1$，符合题设；

② 若 $x+2=-x^3$，解得 $x=-1$，此时 $x+2=1$，与集合元素互异性矛盾.

综上可知，当 $x=1$ 时，$A=\{1,3,-1\}$，$B=\{1,3\}$.

**例 14**　设集合 $A=\{(x,y)\mid y=2x-1,x\in\mathbf{N}^*\}$，$B=\{(x,y)\mid y=ax^2-ax+a,x\in\mathbf{N}^*\}$，问是否存在非零整数 $a$，使 $A\cap B\neq\varnothing$？若存在，请求出 $a$ 的值及 $A\cap B$，若不存在，说明理由.

**解析**　由 $A\cap B\neq\varnothing$ 知，$a$ 是否存在取决于方程组 $\begin{cases}y=2x-1,\\ y=ax^2-ax+a\end{cases}$ 是否有 $x$ 是正整数的解，消去 $y$，得

$ax^2-(a+2)x+a+1=0$.　　　①

高考数学展望与对策

由 $\Delta \geqslant 0$，即 $(a+2)^2-4a(a+1)\geqslant 0$，解得

$-\frac{2\sqrt{3}}{3}\leqslant a\leqslant\frac{2\sqrt{3}}{3}$.

因为 $a$ 为非零整数，所以 $a$ 的取值可能为 $-1$ 和 $1$.

当 $a=-1$ 时，代入 ① 解得 $x=0$ 或 $x=-1$，这与 $x\in \mathbf{N}^*$ 不符，故 $a\neq -1$.

当 $a=1$ 时，代入 ① 解得 $x=1$ 或 $x=2$，符合题意.

所以，存在 $a=1$，使得 $A\cap B\neq\varnothing$，此时 $A\cap B=\{(1,1),(2,3)\}$.

**例 15**　已知集合 $E=\{x\mid x^2-3x+2=0\}$，$F=\{x\mid x^2-ax+(a-1)=0\}$，$G=\{x\mid x^2-bx+2=0\}$，问：同时满足 $F\not\subseteq E$ 和 $G\subseteq E$ 的实数 $a$ 和 $b$ 是否存在？若存在，求出 $a,b$ 所有值的集合；若不存在，请说明理由.

**解析**　假设同时满足 $F\not\subseteq E$ 和 $G\subseteq E$ 的实数 $a$ 和 $b$ 存在.

由已知解得 $E=\{1,2\}$，$F=\{1,a-1\}$.

由 $F\not\subseteq E$，得 $a-1\neq 1$，且 $a-1\neq 2$.

$\therefore a\neq 2$，且 $a\neq 3$.

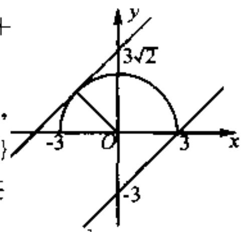
由 $G\subseteq E$，得 $b^2-8<0$，或 $\begin{cases}b^2-8\geqslant 0,\\ 1\in G,\end{cases}$ 或 $\begin{cases}b^2-8\geqslant 0,\\ 2\in G.\end{cases}$

解得 $-2\sqrt{2}<b<2\sqrt{2}$，或 $b=3$.

综上，$a,b$ 取值分别为 $\{a\in\mathbf{R}\mid a\neq 2,且\ a\neq 3\}$，$\{b\mid -2\sqrt{2}<b<2\sqrt{2},或\ b=3\}$.

**例 16**　已知集合 $M=\{(x,y)\mid y=\sqrt{9-x^2}\}$，$N=\{(x,y)\mid y=x+b\}$，且 $M\cap N=\varnothing$，求实数 $b$ 应满足的条件.

**解析**　设 $y_1=\sqrt{9-x^2}$，$y_2=x+b$，在直角坐标系中，因为 $y_2=x+b$ 的斜率为 1，由图可知，截距 $b$ 的范围为 $b<-3$，或 $b>3\sqrt{2}$.



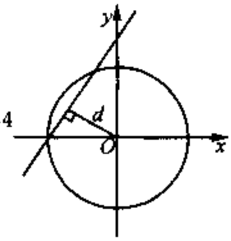

**例 17**　设 $a,b$ 是两个实数，$A=\{(x,y)\mid x=n,y=na+b,n\in\mathbf{Z}\}$，$B=\{(x,y)\mid x=m,y=3m^2+15,m\in\mathbf{Z}\}$，$C=\{(x,y)\mid x^2+y^2\leqslant 144\}$ 是平面 $xOy$ 内的点集合，问：是否存在 $a$ 和 $b$，使(1) $A\cap B\neq\varnothing$，(2) $(a,b)\in C$ 同时成立？

**解析**　设 $A\cap B=Z$，则 $Z$ 点坐标可表示为

$(n,na+b)$ 与 $(m,3m^2+15)$，于是有

$n=m$，且 $na+b=3m^2+15$，即 $na+b=3n^2+15$.

构造直线方程 $nx+y=3n^2+15$（其中 $n$ 是整数），它与圆 $x^2+y^2=144$ 相交（如图）.



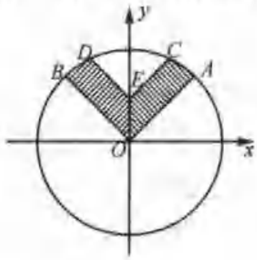

结合图形知原点到直线的距离

$$d=\frac{|-3n^2-15|}{\sqrt{n^2+1}}\leqslant 12，解得\ n=\sqrt{3}.$$ 此与 $n\in\mathbf{Z}$ 要求不符.

故本题无解.

**例 18**　作出点集 $M=\{(x,y)\mid |x|\leqslant y\leqslant |x|+\sqrt{3}-1,x^2+y^2\leqslant 4\}$，并求其面积.

**解析**　如图,点集 $M$ 为图中扇形 $AOB$ 中除去扇形 $COD$ 加上 $\triangle OEC$ 与 $\triangle OED$ 所构成的区域.




$\because \angle xOA=\frac{\pi}{4}$, $\angle xOB=\frac{3\pi}{4}$,

由 $\begin{cases} y=x+\sqrt{3}-1, \\ x^2+y^2=4, \end{cases}$ 解得 $x_C=1$, $y_C=\sqrt{3}$.

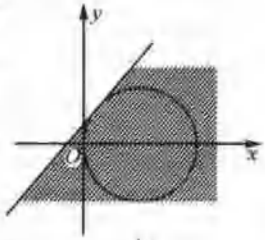
$\therefore \angle xOC=\frac{\pi}{3}$, $\angle COy=\frac{\pi}{6}$, $\angle yOD=\frac{\pi}{6}$,

$\therefore$ 点集面积 $S=\frac{\pi}{4}\times 2^2-\frac{\pi}{6}\times 2^2+2\times\frac{1}{2}(\sqrt{3}-1)\times 1$

$=\frac{\pi}{3}+\sqrt{3}-1$.

**例 19**　已知集合 $A=\{(x,y)\mid x^2-2x+y^2\leqslant 0\}$, $B=\{(x,y)\mid y\leqslant x+a\}$,欲使 $A\cap B=A$,求 $a$ 的取值范围.

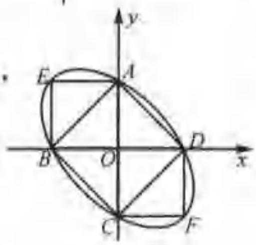
**解析**　$x^2-2x+y^2=0$ 是以 $(1,0)$ 为圆心、1 为半径的圆.欲使 $A\cap B=A$,即直线 $y=x+a$ 在圆上方,只须求直线 $y=x+a$ 与圆 $(x-1)^2+y^2=1$ 相切,且在圆的上方时 $a$ 的值,如图,即




$\frac{|1-0+a|}{\sqrt{2}}=1$,解得 $a=\pm\sqrt{2}-1$(负值舍去).

$\because y\leqslant x+a$, $\therefore a\geqslant\sqrt{2}-1$.

**例 20**　已知三个集合 $M,N$ 和 $P$, $M=\{(x,y)\mid |x|+|y|<1\}$, $N=\left\{(x,y)\left|\sqrt{\left(x-\frac{1}{2}\right)^2+\left(y+\frac{1}{2}\right)^2}+\sqrt{\left(x+\frac{1}{2}\right)^2+\left(y-\frac{1}{2}\right)^2}<2\sqrt{2}\right.\right\}$, $P=\{(x,y)\mid |x+y|<1, |x|<1, |y|<1\}$,求集合 $M,N,P$ 三者的关系.




**分析**　三个集合都是用描述法表示的,观察其特点,可以考虑用数形结合法解决问题.

**解析**　如右图所示,集合 $M$:四边形 $ABCD$ 内;集合 $N$:表示椭圆内区域;集合 $P$:表示六边形 $AEBCFD$ 区域.由此可得 $M\subsetneqq P\subsetneqq N$.

**说明**　在一些以集合为背景的代数题中,构造图形,结合集合与图形的性质,往往能简捷解题.

**例 21**　集合 $A=\{x\mid x^2-ax+a^2-19=0\}$, $B=\{x\mid x^2-5x+6=0\}$, $C=\{x\mid x^2+2x-8=0\}$, $a$ 取何实数时, $\varnothing\subsetneqq(A\cap B)$ 与 $A\cap C=\varnothing$ 同时成立?

**分析**　本题切入点是用好两个集合的关系条件,用对应算式表示出 $\varnothing\subsetneqq(A\cap B)$ 与 $A\cap B=\varnothing$ 同时成立的数学含义.

**解析**　$B=\{x\mid x^2-5x+6=0\}=\{2,3\}$, $C=\{x\mid x^2+2x-8=0\}=\{2,-4\}$.

由 $\varnothing\subsetneqq(A\cap B)$ 与 $A\cap C=\varnothing$ 同时成立,可知 3 是集合 $A$ 中的元素,故 3 是方程 $x^2-ax+a^2-19=0$ 的解,将 3 代入方程,得

$a^2-3a-10=0$,解得 $a=5$ 或 $a=-2$.

当 $a=5$ 时，$A=\{x \mid x^2-5x+6=0\}=\{2,3\}$，此时 $A\cap C=\{2\}$，与题设 $A\cap C=\varnothing$ 矛盾，故应舍去；

当 $a=-2$ 时，$A=\{x \mid x^2+2x-15=0\}=\{3,-5\}$，此时满足 $\varnothing \subsetneqq (A\cap B)$ 与 $A\cap C=\varnothing$，故 $a=-2$ 即为所求.

**说明** 本题需要把集合与其他知识有机结合起来求解参数，同时还要做好参数值的检验.

**例 22** 已知 $f(x)=4x+ax^2-\frac{2}{3}x^3(x\in\mathbf{R})$ 在区间 $[-1,1]$ 上是增函数.

(1) 求实数 $a$ 的值组成的集合 $A$；

(2) 设关于 $x$ 的方程 $f(x)=2x+\frac{1}{3}x^3$ 的两个非零实数根为 $x_1,x_2$. 试问：是否存在实数 $m$，使得不等式 $m^2+tm+1\geqslant|x_1-x_2|$ 对任意 $a\in A$ 及 $t\in[-1,1]$ 恒成立？若存在，求 $m$ 的取值范围；若不存在，请说明理由.

**分析** 这是一道综合了多个知识点的压轴题，它深入考查用等价变换的思想即充要条件的策略解决问题.

**解析** (1) $f'(x)\geqslant 0$ 对 $x\in[-1,1]$ 恒成立，即

$$x^2-ax-2\leqslant 0 \text{ 对 } x\in[-1,1] \text{ 恒成立.} \qquad ①$$

令 $g(x)=x^2-ax-2$，则 ① $\Leftrightarrow\begin{cases}g(1)\leqslant 0,\\ g(-1)\leqslant 0\end{cases}\Leftrightarrow -1\leqslant a\leqslant 1$.

因为当 $x\in[-1,1]$ 时 $f(x)$ 是连续函数，且只有当 $a=1$ 时，$f'(-1)=0$ 以及当 $a=-1$ 时，$f'(1)=0$，故 $A=\{a \mid -1\leqslant a\leqslant 1\}$.

(2) 由 $f(x)=2x+\frac{1}{3}x^3$，得 $x=0$ 或 $x^2-ax-2=0$. 方程 $x^2-ax-2=0$ 的两个非零实数根为 $x_1,x_2$，由根与系数的关系，得 $|x_1-x_2|=\sqrt{a^2+8}\leqslant 3$. 于是，问题等价于：$m^2+tm+1\geqslant 3$ 对任意 $t\in[-1,1]$ 恒成立，即

$$m^2+tm-2\geqslant 0 \text{ 对任意 } t\in[-1,1] \text{ 恒成立.} \qquad ②$$

令 $h(x)=m^2+tm-2$，则 ② $\Leftrightarrow\begin{cases}h(-1)\geqslant 0,\\ h(1)\geqslant 0\end{cases}\Leftrightarrow m\geqslant 2$ 或 $m\leqslant -2$，即存在实数 $m$，其取值范围为 $m\geqslant 2$ 或 $m\leqslant -2$.

# 2. 函数与导数命题展望与应试对策

## 一、命题展望

函数是高中数学中极为重要的内容，函数思想和函数方法贯穿整个高中代数的全过程，同时应用于数学其他分支. 综观历年高考试题，函数的概念及性质、函数的图像及变换，以基本函数出现的综合题和应用题一直是常考不衰的热点问题. 导数是新教材增加的内容，近几年的高考试题，与时俱进，逐步加深，有关导数的高考题主要考查导数的几何意义，函数的单调性、极值，应用问题中的最值. 由于导数的工具性，很多问题用导数处理显得简捷明了.

## 二、应试对策

第二轮复习时同学们要树立起用函数的思想看待问题、处理问题的观念，复习要解决好四个问题：一是准确深刻理解函数的有关概念；二是认识函数与其他知识的内在联系；三是把握好数形结合、导数方法；四是认识函数的实质，强化应用意识.

1. 函数的性质：包括函数的定义域、值域、奇偶性、单调性、周期性和反函数. 判断、论证函数的性质，注意导数的工具作用；分段函数注意分段性；抽象函数注意阅读理解，用好赋值法.

2. 函数的图像：由于函数解析式具有一定的性质特征，故在函数图像上必有直观体现，图像具有的直观形象的特点，函数的解析式必有数量反映，因此，在复习函数的图像时：① 应熟悉基本函数的图像；② 能在讨论函数的定义域、值域、奇偶性、单调性、对称轴、最值、特殊点、方程解的基础上作图像；③ 掌握函数的初等变换（平移、对称、伸缩），能知式选图、知图选式、图像变换、运用图像比较式的大小、判断根的个数、求单调区间等.

3. 导数的复习：一是注意导数的几何意义（切线的斜率）与解析几何交汇，物理意义（瞬时速度）与实际问题结合；二是注意导数的运算和性质，特别是三次函数求导后为二次函数；三是注意导数的实际运用，联系函数的最值、极值.

第二轮复习时一要加深对函数及其概念、性质的理解与应用；二要抓住含参变量的函数问题，掌握处理含参变量的分离、集中、代换、化归、分类等解题方法与技巧；三要沟通相关学科知识的内在联系，掌握综合题的解题通法与巧法，从而提高解综合题的能力，具体如下：

1. 关于函数性质问题的考查，在高考中，使用具体函数的约占$\frac{1}{3}$，而使用抽象函数符号的约占$\frac{2}{3}$，面对这种形势，在复习函数性质时，应注意将具体函数的有关知识进行延伸，以适应试题的要求.

2. 函数中的最值问题在高考中多次出现，是高考中的重要题型之一，应能掌握几种求最值的常用方法，如配方法、判别式法、均值定理法、导数法等，而对于二元函数，应化成一元函数求最值.

3. 由于近年加强了数形结合思想的考查，加强了图像的考查，对函数图像的复习显得更加重要，首先应掌握一、二次函数图像及反比例函数的指数、对数函数的图像和性质，在此基础上，理解掌握常见的平移、对称变换方法，以基本函数为基础，强化由式到图和由图到式的转化训练.

4. 含参数函数的讨论问题是高考的热点问题，应高度重视，复习时宜适当加强，进行多种类型的训练，但不宜过于繁杂.

5. 指数方程、对数方程问题一般难度都不大，只要能掌握一些常规解法即可，不必过深要求.

6. 应重点放在对学生的逻辑思维、推理的培养上，尽量减少繁杂的运算.

7. 应用题在高考中已形成规模，应注意提高分析问题及解决问题的能力.

8. 在函数与导数复习中应有意识地注意以下问题：

① 准确理解函数的概念与导数的几何意义；

② 熟练掌握函数的定义域、值域、解析式、反函数的基本求法以及函数的求导法则；

③ 深刻领悟数学思想并扎实训练数学方法；

④ 特别注重运用导数的思想方法研究解决函数中的有关问题.

## 三、范例解析

**例 1**　已知函数 $y=\sqrt{mx^2-6mx+m+8}$ 的定义域为 $\mathbf{R}$.

(1) 求实数 $m$ 的取值范围；

(2) 当 $m$ 变化时，若 $y$ 的最小值为 $f(m)$，求函数 $f(m)$ 的值域.

**分析**　(1) 定义域为 $\mathbf{R}$，即不等式 $mx^2-6mx+m+8\geqslant 0$ 的解集为 $\mathbf{R}$. (2) 求 $y$ 的最小值用一元二次函数求最值的方法.

**解析**　(1) 依题意，当 $x\in\mathbf{R}$ 时，$mx^2-6mx+m+8\geqslant 0$ 恒成立.

当 $m=0$ 时，$x\in\mathbf{R}$；

当 $m\neq 0$ 时，$\begin{cases} m>0, \\ \Delta\leqslant 0, \end{cases}$ 即 $\begin{cases} m>0, \\ (-6m)^2-4m(m+8)\leqslant 0. \end{cases}$ 解之得 $0<m\leqslant 1$.

故 $0\leqslant m\leqslant 1$.

(2) 当 $m=0$ 时，$y=2\sqrt{2}$；

当 $0<m\leqslant 1$ 时，$y=\sqrt{m(x-3)^2+8-8m}$.

$\therefore y_{\min}=\sqrt{8-8m}$.

因此，$f(m)=\sqrt{8-8m}\ (0\leqslant m\leqslant 1)$.

$\therefore f(m)$ 的值域为 $[0,2\sqrt{2}]$.

**说明**　本题要注意分类讨论，要分 $m=0$ 和 $m\neq 0$ 讨论，求 $f(m)$ 的值域用单调性求.

**例 2**　已知函数 $g(x)=\dfrac{ax^2+8x+b}{x^2+1}$ 的值域是 $\{y\mid 1\leqslant y\leqslant 9\}$，试求函数 $f(x)=\sqrt{ax^2+8x+b}$ 的定义域和值域.

**解析**　$\because g(x)$ 的定义域为 $\mathbf{R}$，令 $y=g(x)$，则有 $(y-a)x^2-8x+y-b=0$，

由 $\Delta \geqslant 0$，得 $64-4(y-a)(y-b) \geqslant 0$，

即 $y^2-(a+b)y+ab-16 \leqslant 0$，

$\therefore 1+9=a+b$，且 $1 \cdot 9=ab-16$.

$\therefore a=b=5$，即 $f(x)=\sqrt{5x^2+8x+5}$.

$\because \Delta'=64-100<0$，

$\therefore 5x^2+8x+5>0$ 恒成立.

又 $5x^2+8x+5=5\left(x^2+\frac{8}{5}x+\frac{16}{25}\right)+5-\frac{16}{5} \geqslant \frac{9}{5}$.

$\therefore$ 函数 $f(x)$ 的定义域为 $\mathbf{R}$，值域是 $\left[\frac{3}{5}\sqrt{5},+\infty\right)$.

**例 3**　用长为 14.8m 的钢条制作一个长方体容器的框架，如果所制作的容器底面的一边比另一边长 0.5m，则高为多少时容积最大?并求出它的最大容积.

**解析**　设容器底面一边长为 $x$m，则一边长为 $(x+0.5)$m，高为 $\frac{14.8-4x-4(x+0.5)}{4}=3.2-2x$(m). 又 $3.2-2x>0$，且 $x>0$，则 $0<x<1.6$.

设容积为 $y$m³，则 $y=x(x+0.5)(3.2-2x)$，即 $y=-2x^3+2.2x^2+1.6x$.

$y'=-6x^2+4.4x+1.6$. 令 $y'=0$，解得 $x_1=1$，$x_2=-\frac{4}{15}$(舍去).

在定义域 $(0,1.6)$ 内只有一个点 $x=1$ 满足 $y'=0$，当 $x=1$ 时，$y$ 取得最大值，$y_{max}=1.8$，此时高为 1.2m.

**说明**　解这类求最值的应用题的一般步骤是：① 建立函数关系式；② 求出定义域；③ 求导数，若 $f'(x)=0$ 在定义域内只有一解时，并且最值一定存在，则此点即为函数的最值点.

**例 4**　已知函数 $y=f(x)$ 是定义在 $\mathbf{R}$ 上的周期函数，周期 $T=5$，函数 $y=f(x)(-1 \leqslant x \leqslant 1)$ 是奇函数. 又知 $y=f(x)$ 在 $[0,1]$ 上是一次函数，在 $[1,4]$ 上是二次函数，且在 $x=2$ 时函数取得最小值，最小值为 $-5$.

(1) 求证 $f(1)+f(4)=0$；

(2) 试求 $y=f(x)$，$x \in [1,4]$ 的解析式；

(3) 试求 $y=f(x)$ 在 $[4,9]$ 上的解析式.

**解析**　(1) $\because y=f(x)$ 是以 5 为周期的周期函数，$\therefore f(4)=f(4-5)=f(-1)$.

又 $y=f(x)(-1 \leqslant x \leqslant 1)$ 是奇函数，$\therefore f(1)=-f(-1)=-f(4)$.

$\therefore f(1)+f(4)=0$.

(2) 当 $x \in [1,4]$ 时，由题意，可设 $f(x)=a(x-2)^2-5 \quad (a \neq 0)$.

由 $f(1)+f(4)=0$ 得

$a(1-2)^2-5+(4-2)^2-5=0$，解得 $a=2$.

$\therefore f(x)=2(x-2)^2-5 \quad (1 \leqslant x \leqslant 4)$.

(3) $\because y=f(x)(-1 \leqslant x \leqslant 1)$ 是奇函数，

$\therefore f(0)=-f(-0)$，即有 $f(0)=0$.

又 $y=f(x)\ (0\leqslant x\leqslant 1)$ 是一次函数，

$\therefore$ 可设 $f(x)=kx\quad(0\leqslant x\leqslant 1)$，

$\because f(1)=2(1-2)^2-5=-3$，

又 $f(1)=k\cdot 1=k$，$\therefore k=-3$.

$\therefore$ 当 $0\leqslant x\leqslant 1$ 时，$f(x)=-3x$；

当 $-1\leqslant x\leqslant 0$ 时，$0<-x\leqslant 1$.

$\therefore f(x)=-f(-x)=-3x$.

$\therefore$ 当 $-1\leqslant x\leqslant 1$ 时，$f(x)=-3x$；

当 $4\leqslant x\leqslant 6$ 时，$-1\leqslant x-5\leqslant 1$，

$\therefore f(x)=f(x-5)=-3(x-5)=-3x+15$；

当 $6<x\leqslant 9$ 时，$1<x-5\leqslant 4$，

$f(x)=f(x-5)=2[(x-5)-2]^2-5=2(x-7)^2-5$.

$$\therefore f(x)=\begin{cases}-3x+15,\ 4\leqslant x\leqslant 6,\\ 2(x-7)^2-5,\ 6<x\leqslant 9.\end{cases}$$

**例 5**　已知二次函数 $f(x)=ax^2+bx+c$ 和一次函数 $g(x)=-bx$，其中 $a,b,c$ 满足 $a>b>c$，$a+b+c=0(a,b,c\in\mathbf{R})$.

(1) 求证两函数的图像交于不同的两点 $A,B$；

(2) 求线段 $AB$ 在 $x$ 轴上的射影 $A_1B_1$ 的长的取值范围.

**解析**　(1) 由 $\begin{cases}y=ax^2+bx+c,\\ y=-bx,\end{cases}$ 消去 $y$，得

$ax^2+2bx+c=0$.

$$\Delta=4b^2-4ac=4(-a-c)^2-4ac=4\left[\left(a+\frac{c}{2}\right)^2+\frac{3}{4}c^2\right]$$

$\because a>b>c$，$a+b+c=0$，

$\therefore a>b$，$c<0$，$\therefore \frac{3}{4}c^2>0$，即 $\Delta>0$.

$\therefore$ 两函数的图像交于不同的两点 $A,B$.

(2) 由(1)知 $ax^2+2bx+c=0$ 在 $x$ 轴上的射影 $A_1B_1$ 的长为

$$\begin{aligned}|A_1B_1|^2=|x_1-x_2|^2&=(x_1+x_2)^2-4x_1x_2\\&=\left(-\frac{2b}{a}\right)^2-4\cdot\frac{c}{a}\\&=\frac{4(-a-c)^2-4ac}{a^2}\\&=4\left[\left(\frac{c}{a}+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}\right].\end{aligned}$$

又 $a>b>c$，$a+b+c=0$，则 $a>0$，$c<0$，

$\therefore a>-a-c>c$，解得 $\frac{c}{a}\in\left(-2,-\frac{1}{2}\right)$.