大学数学学习辅导丛书

# 概率论与数理统计
# 习题全解

浙大·二、三版

主编　陶伟

- 全解浙大·三版习题
- 涵盖浙大·二版习题
- 精选历年考研试题

国家行政学院出版社

大学数学学习辅导丛书

# 概率论与数理统计习题全解

（浙大·二、三版）

主编　陶　伟

国家行政学院出版社

**图书在版编目（CIP）数据**

概率论与数理统计习题全解/陶伟主编. －北京：国家行政学院出版社，2004
ISBN 7-80140-336-3

Ⅰ. 概… Ⅱ. 陶… Ⅲ. ①概率论-高等学校-解题 ②数理统计-高等学校-解题
Ⅳ. 021-44

中国版本图书馆 CIP 数据核字（2004）第 046619 号

**概率论与数理统计习题全解**
陶 伟 主编
*
国家行政学院出版社出版发行
北京市海淀区长春桥路 6 号
邮政编码：100089
发行部电话：88517082，68729778
新华书店经销
北京市朝阳印刷厂印刷
*
787 × 960 1/16 开本 16.25 印张 400 千字
2005 年 3 月第 2 版 2005 年 3 月第 1 次印刷
ISBN 7-80140-336-3/O · 34 定价：15.00 元

# 前　　言

本书是与浙江大学盛骤等编的《概率论与数理统计》（第二、三版）相配套的学习辅导教材。

本书旨在帮助读者掌握概率论与数理统计课程的基本内容和解题方法，帮助读者提高学习效率。

本书按《概率论与数理统计》（第三版）的章节顺序编排，以便读者与教材同步学习。本书每章包括以下几部分内容：

**一、浙大·三版习题全解**　本部分对教材《概率论与数理统计》（浙大·三版）中的全部习题给出了详尽的解答，方便读者在学习过程中进行对照分析，起到释疑解难的作用。

**二、浙大·二版习题全解**　本部分对教材《概率论与数理统计》（浙大·二版）中的未被列入第三版教材的习题给出了详尽的解答，方便使用第二版教材的读者在学习过程中进行对照分析。

**三、考研试题精选**　本部分将涉及本章内容的历年考研试题归纳在一起，并给出了详尽的解答，方便读者了解本课程各章内容在考研试题中的命题方向。

值得提醒的是：解题需亲自动手，通过自己解题的实践，总结各类题型的解题方法。

本书使用了高等教育出版社出版的《概率论与数理统计》（浙

大·第三版）中的全部习题，在此表示衷心的感谢！本书由**清华大学、北京大学、中国人民大学、北京航天航空大学、北京理工大学、北京交通大学**等院校一批具有丰富教学经验的一线青年教师编写。

由于编者水平所限，疏漏错误难免，恳请同行和读者批评指正。

编者

2005 年 3 月

# 目　　录

# 第一章　概率论的基本概念

## 一、习题一(浙大·三版)

**1** 写出下列随机试验的样本空间 $S$:

(1) 记录一个小班一次数学考试的平均分数(设以百分制记分).

(2) 生产产品直到有 10 件正品为止,记录生产产品的总件数.

(3) 对某工厂出厂的产品进行检查,合格的记上"正品",不合格的记上"次品",如连续查出了 2 个次品就停止检查,或检查了 4 个产品就停止检查,记录检查的结果.

(4) 在单位圆内任意取一点,记录它的坐标.

【解】 (1) 以 $n$ 表示该小班的学生数,总成绩的可能取值为 $0,1,2,3,\cdots,100n$,所以试验的样本空间为

$$S=\left\{\frac{i}{n}\mid i=0,1,2,\cdots,100n\right\}.$$

(2) 设在生产第 10 件正品前共生产了 $k$ 件不合格品,样本空间为 $S=\{10+k\mid k=0,1,2,\cdots\}$ 或写成 $S=\{10,11,12,\cdots\}$.

(3) 采用 0 表示检查到一个次品,以 1 表示检查到一个正品,例如 0110 表示第一次与第四次检查到次品,而第二次与第三次检查到的是正品,样本空间可表示为

$$S=\{00,100,0100,0101,0110,1100,1010,1011,0111,1101,1110,1111\}.$$

(4) 取一直角坐标系,则有 $S=\{(x,y)\mid x^2+y^2<1\}$,若取极坐标系,则有 $S=\{(\rho,\theta)\mid \rho<1,0\leqslant\theta<2\pi\}$.

**2** 设 $A,B,C$ 为三事件,用 $A,B,C$ 的运算关系表示下列各事件:

(1) $A$ 发生,$B$ 与 $C$ 不发生.

(2) $A$ 与 $B$ 都发生,而 $C$ 不发生.

(3) $A,B,C$ 中至少有一个发生.

(4) $A,B,C$ 都发生.

(5) $A,B,C$ 都不发生.

(6) $A,B,C$ 中不多于一个发生.

(7) $A,B,C$ 中不多于两个发生.

(8) $A,B,C$ 中至少有两个发生.

【解】 以下分别用 $D_i(i=1,2,\cdots,8)$ 表示(1),(2),$\cdots$,(8) 中所给出的事件. 注意到一个事件不发生即为它的对立事件发生,例如事件 $A$ 不发生即为 $\overline{A}$ 发生.

(1) $A$ 发生,$B$ 与 $C$ 不发生,表示 $A,\overline{B},\overline{C}$ 同时发生,故 $D_1=A\overline{B}\,\overline{C}$ 或写成 $D_1=A-B-C$.

(2) $A$ 与 $B$ 都发生而 $C$ 不发生,表示 $A,B,\overline{C}$ 同时发生,故 $D_2=AB\overline{C}$ 或写成 $D_2=AB-C$.

(3) 由和事件的含义知,事件 $A\cup B\cup C$ 即表示 $A,B,C$ 中至少有一个发生,故 $D_3=A\cup B\cup C$.

(4) $D_4=ABC$.

(5) $D_5=\overline{A}\,\overline{B}\,\overline{C}$.

(6) "$A,B,C$ 中不多于一个发生" 表示 $A,B,C$ 都不发生或 $A,B,C$ 中恰有一个发生,因此 $D_6=\overline{A}\,\overline{B}\,\overline{C}\cup A\overline{B}\,\overline{C}\cup\overline{A}B\overline{C}\cup\overline{A}\,\overline{B}C$.

或"$A,B,C$ 中不多于一个发生"是事件 $G$ = "$A,B,C$ 中至少有二个发生"的对立事件．而事件 $G$ 可写成 $G = AB \cup BC \cup CA$，因此又可将 $D_6$ 写成

$$D_6 = \overline{AB \cup BC \cup CA} = \overline{AB} \cap \overline{BC} \cap \overline{CA}.$$

(7)"$A,B,C$ 中不多于二个发生"表示 $A,B,C$ 都不发生或 $A,B,C$ 中恰有一个发生或 $A,B,C$ 中恰有二个发生．因此，$D_7 = \overline{A}\,\overline{B}\,\overline{C} \cup A\overline{B}\,\overline{C} \cup \overline{A}B\overline{C} \cup \overline{A}\,\overline{B}C \cup AB\overline{C} \cup A\overline{B}C \cup \overline{A}BC$．或"$A,B,C$ 中不多于二个发生"表示 $A,B,C$ 中至少有一个不发生，亦即 $\overline{A},\overline{B},\overline{C}$ 中至少有一个发生，即有 $D_7 = \overline{A} \cup \overline{B} \cup \overline{C}$．

或"$A,B,C$ 中不多于二个发生"是事件"$A,B,C$ 三个都发生"的对立事件，因此又有 $D_7 = \overline{ABC}$．

(8)$D_8 = AB \cup BC \cup CA$，也可写成 $D_8 = ABC \cup \overline{A}BC \cup A\overline{B}C \cup AB\overline{C}$．

**【注】** ①两事件的差可用对立事件来表示，例如 $A - B = A\overline{B}, A - BC = A\,\overline{BC}$．②易犯的错误是，误将 $\overline{AB}$ 与 $\overline{A}\,\overline{B}$ 等同起来，事实上，$\overline{AB} = \overline{A} \cup \overline{B} \neq \overline{A}\,\overline{B}$，又如 $\overline{ABC} = \overline{A} \cup \overline{B} \cup \overline{C} \neq \overline{A}\,\overline{B}\,\overline{C}$．③误以为 $S = A \cup B \cup C$，事实上，$S - A \cup B \cup C$ 可能不等于 $\varnothing$，一般 $S \supset A \cup B \cup C$．

**3** 设 $A,B$ 是两事件，且 $P(A) = 0.6, P(B) = 0.7$．问：(1) 在什么条件下 $P(AB)$ 取到最大值，最大值是多少？(2) 在什么条件下 $P(AB)$ 取到最小值，最小值是多少？

**【解】** 由加法公式

$$P(AB) = P(A) + P(B) - P(A \cup B) = 1.3 - P(A \cup B).$$

(1) 因 $A \cup B \supset B$，故若 $P(A \cup B) = P(B) = 0.7$，则 $P(AB)$ 取到最大值，最大值为 0.6．

(2) 因 $A \cup B \subset S$，故若 $P(A \cup B) = P(S) = 1$，则 $P(AB)$ 取到最小值，最小值为 0.3．

**4** 设 $A,B,C$ 是三事件，且 $P(A) = P(B) = P(C) = 1/4, P(AB) = P(BC) = 0, P(AC) = 1/8$．求 $A,B,C$ 至少有一个发生的概率．

**【解】** 
$$\begin{aligned} P(A \cup B \cup C) &= P(A) + P(B) + P(C) - P(AB) - P(BC) - P(AC) + P(ABC) \\ &= 5/8 + P(ABC). \end{aligned}$$

由 $ABC \subset AB$，且已知 $P(AB) = 0$，得

$$0 \leqslant P(ABC) \leqslant P(AB) = 0,$$

故 $P(ABC) = 0$，因此所求概率为 $P(A \cup B \cup C) = 5/8$．

**5** 在一标准英语字典中有55个由两个不相同的字母所组成的单词，若从26个英文字母中任取两个字母予以排列，求能排成上述单词的概率．

**【解】** 从26个字母中任取2个进行排列共有 $A_{26}^2$ 种结果，即 $N(S) = A_{26}^2$．以 $A$ 表示事件："所取2个字母排列成标准英语字典中由两个不同字母组成的一个单词"，则有

$$P(A) = \frac{N(A)}{N(S)} = \frac{55}{A_{26}^2} = \frac{55}{26 \times 25} = \frac{11}{130}.$$

**6** 在房间里有10个人，分别佩戴从1号到10号的纪念章，任选3人记录其纪念章的号码．(1) 求最小号码为5的概率．(2) 求最大号码为5的概率．

**【解】** 10人中任选3人共有 $\binom{10}{3} = 120$ 种选法，此即为样本点的总数．以 $A$ 记事件"最小的号码为5"，以 $B$ 记事件"最大的号码为5"．

(1) 因选到的最小号码为5，则其中一个号码为5且其余两个号码都大于5，它们可从6 ~ 10这5个数中选取，故 $N(A) = \binom{5}{2}$，从而

$$P(A) = N(A)/N(S) = \binom{5}{2}\Big/\binom{10}{3} = 1/12.$$

(2) 同理，$N(B) = \binom{4}{2}$，故 $P(B) = N(B)/N(S) = \binom{4}{2}\Big/\binom{10}{3} = 1/20$.

**7** 某油漆公司发出17桶油漆，其中白漆10桶、黑漆4桶、红漆3桶，在搬运中所有标签脱落，交货人随意将这些油漆发给顾客．问一个订货为4桶白漆、3桶黑漆和2桶红漆的顾客，能按所订颜色如数得到订货的概率是多少？

**【解】** 以 $A$ 表示事件"顾客取到4桶白漆，3桶黑漆与2桶红漆"，则有 $N(S) = \binom{17}{9}$，$N(A) = \binom{10}{4}\binom{4}{3}\binom{3}{2}$，故

$$P(A) = N(A)/N(S) = \binom{10}{4}\binom{4}{3}\binom{3}{2}\Big/\binom{17}{9} = 252/2431.$$

**8** 在1500个产品中有400个次品、1100个正品．任取200个．(1) 求恰有90个次品的概率；(2) 求至少有2个次品的概率．

**【解】** 以 $A$ 表示事件"恰有90个次品"，以 $B_i$ 表示事件"恰有 $i$ 个次品"，$i = 0,1$，以 $C$ 表示事件"至少有2个次品"．

(1) $N(S) = \binom{1500}{200}$，　$N(A) = \binom{400}{90}\binom{1100}{200-90} = \binom{400}{90}\binom{1100}{110}$，

故　$P(A) = N(A)/N(S) = \binom{400}{90}\binom{1100}{110}\Big/\binom{1500}{200}$

(2) $C = S - B_0 - B_1$，其中 $B_0, B_1$ 互不相容，所以

$$P(C) = P(S - B_0 - B_1) = P[S - (B_0 \cup B_1)]$$
$$= 1 - P(B_0 \cup B_1) = 1 - P(B_0) - P(B_1).$$

因　$N(B_0) = \binom{1100}{200}$，　$N(B_1) = \binom{400}{1}\binom{1100}{199}$，

故　$P(B_0) = \binom{1100}{200}\Big/\binom{1500}{200}$，　$P(B_1) = \binom{400}{1}\binom{1100}{199}\Big/\binom{1500}{200}$.

因此有　$P(C) = 1 - \binom{1100}{200}\Big/\binom{1500}{200} - \binom{400}{1}\binom{1100}{199}\Big/\binom{1500}{200}$

$$= 1 - \left[\binom{1100}{200} + \binom{400}{1}\binom{1100}{199}\right]\Big/\binom{1500}{200}.$$

**9** 从5双不同的鞋子中任取4只，问这4只鞋子中至少有两只配成一双的概率是多少？

**【分析】** 以 $A$ 表示事件"所取4只鞋子中至少有两只配成一双鞋子"，则 $\overline{A}$ 表示事件"所取4只鞋子无配对的"．先计算 $P(\overline{A})$ 较为简便．也可直接求 $P(A)$．

【解法一】 考虑4只鞋子是有次序一只一只取出的. 自5双(10只)鞋子中任取4只共有$10\times9\times8\times7$种取法,$N(S)=10\times9\times8\times7$. 现在来求$N(\bar{A})$. 第一只可以任意取,共有10种取法,第二只只能在剩下的9只中且除去与已取的第一只配对的8只鞋子中任取一只,共8种取法. 同理第三只、第四只各有6种、4种取法,从而$N(\bar{A})=10\times8\times6\times4$. 故

$$P(A)=1-P(\bar{A})=1-N(\bar{A})/N(S)=1-\frac{10\times8\times6\times4}{10\times9\times8\times7}=\frac{13}{21}.$$

【解法二】 以$A_i$表示事件"所取4只鞋子中恰能配成$i$双"($i=1,2$),则$A=A_1\cup A_2$,$A_1A_2=\varnothing$. 故$P(A)=P(A_1)+P(A_2)$. 因$A_2$为4只恰能配成2双,它可直接从5双鞋子中成双地取得,故$N(A_2)=\binom{5}{2}$. $N(A_1)$的算法是:先从5双中取1双,共有$\binom{5}{1}$种取法,另外两只能从其他8只中取,共有$\binom{8}{2}$种取法,不过这种取法中将成双的也算在内了,应去掉. 从而$N(A_1)=\binom{5}{1}\left[\binom{8}{2}-\binom{4}{1}\right]=120$. $N(S)=210$种,故

$$P(A)=P(A_1)+P(A_2)=\frac{N(A_1)}{N(S)}+\frac{N(A_2)}{N(S)}=\frac{120+10}{210}=\frac{13}{21}.$$

**10** 在11张卡片上分别写上probability这11个字母,从中任意连抽7张,求其排列结果为ability的概率.

【解法一】 将11个字母中的两个b看成是可分辨的,两个i也看成是可分辨的,$N(S)=A_{11}^7$. 以$A$记事件"排列结果为ability",则N(A) = 4(因b有两种取法,i也有两种取法),因而

$$P(A)=N(A)/N(S)=4/A_{11}^7=2.4\times10^{-6}.$$

【解法二】 利用乘法定理来计算. 以$A_1,B_2,I_3,L_4,I_5,T_6,Y_7$依次表示取得字母a,b,i,l,i,t,y各事件,则所求概率为

$$\begin{aligned}&P(A_1B_2I_3L_4I_5T_6Y_7)=P(A_1)P(B_2\mid A_1)P(I_3\mid A_1B_2)\\&\times P(L_4\mid A_1B_2I_3)P(I_5\mid A_1B_2I_3L_4)\times P(T_6\mid A_1B_2I_3L_4I_5)P(Y_7\mid A_1B_2I_3L_4I_5T_6)\\&=\frac{1}{11}\cdot\frac{2}{10}\cdot\frac{2}{9}\cdot\frac{1}{8}\cdot\frac{1}{7}\cdot\frac{1}{6}\cdot\frac{1}{5}=4/A_{11}^7.\end{aligned}$$

【注】 在【解法一】中仅当将两个i看成是可以区分的,两个b看成是可以区分的,才属于古典概型问题.

**11** 将3个球随机地放入4个杯子中去,求杯子中球的最大个数分别为1,2,3的概率.

【解】 将3个球随机地放入4个杯子中去共有$4^3$种放置法. 以$A_i$表示事件"杯子中球的最大个数为$i$",$i=1,2,3$.

$A_3$只有当3个球放在同一杯子中时才能发生,有4个杯子可以任意选择,于是$N(A_3)=\binom{4}{1}$,

故 $$P(A_3)=N(A_3)/N(S)=\binom{4}{1}\Big/4^3=1/16.$$

$A_1$只有当每个杯子最多放一个球时才能发生. 因而$N(A_1)=4\cdot3\cdot2=A_4^3$,故

$$P(A_1)=N(A_1)/N(S)=A_4^3/4^3=6/16.$$

又，$A_1 \cup A_2 \cup A_3 = S$，且 $A_iA_j = \varnothing, i \neq j$，故 $P(A_1) + P(A_2) + P(A_3) = 1$，从而

$$P(A_2) = 1 - 1/16 - 6/16 = 9/16.$$

**12** 50只铆钉随机地取来用在10个部件上，其中有3只铆钉强度太弱．每个部件用3只铆钉．若将3只强度太弱的铆钉都装在一个部件上，则这个部件强度就太弱．问发生一个部件强度太弱的概率是多少？

**【解】** 将部件自1到10编号．以 $A_i$ 表示事件"第 $i$ 号部件强度太弱"．由题设，仅当3只强度太弱的铆钉同时装在第 $i$ 号部件上，$A_i$ 才能发生．由于从50只铆钉中任取3只装在第 $i$ 号部件上共有 $\binom{50}{3}$ 种取法，强度太弱的铆钉仅有3只，它们都装在第 $i$ 号部件上，只有 $\binom{3}{3} = 1$ 种取法，故

$$P(A_i) = 1\Big/\binom{50}{3} = 1/19\,600, i = 1,2,\cdots,10,$$

且知 $A_1, A_2, \cdots, A_{10}$ 两两互不相容，因此，10个部件中有一个强度太弱的概率为

$$\begin{aligned} p &= P\{A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_{10}\} = P(A_1) + P(A_2) + \cdots + P(A_{10}) \\ &= 10/19\,600 = 1/1960. \end{aligned}$$

**13** 已知 $P(\overline{A}) = 0.3, P(B) = 0.4, P(A\overline{B}) = 0.5$，求条件概率 $P(B \mid A \cup \overline{B})$．

**【解】** $P(B \mid A \cup \overline{B}) = \dfrac{P(B(A \cup \overline{B}))}{P(A \cup \overline{B})} = \dfrac{P(AB)}{P(A) + P(\overline{B}) - P(A\overline{B})}$．

由题设得 $P(A) = 1 - P(\overline{A}) = 0.7, P(\overline{B}) = 1 - P(B) = 0.6, P(AB) = P(A(S - \overline{B})) = P(A) - P(A\overline{B}) = 0.2$，故

$$P(B \mid A \cup \overline{B}) = \frac{0.2}{0.7 + 0.6 - 0.5} = \frac{1}{4}.$$

**14** 已知 $P(A) = \dfrac{1}{4}, P(B \mid A) = \dfrac{1}{3}, P(A \mid B) = \dfrac{1}{2}$，试求 $P(A \cup B)$．

**【解】**

$$P(AB) = P(B \mid A)P(A) = 1/12,$$

$$P(B) = P(AB)/P(A \mid B) = \frac{1}{12}\Big/\frac{1}{2} = 1/6,$$

故

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(AB) = \frac{1}{4} + \frac{1}{6} - \frac{1}{12} = \frac{1}{3}.$$

**15** 掷两颗骰子，已知两颗骰子点数之和为7，求其中有一颗为1点的概率（用两种方法）．

**【解】** 以 $A$ 记事件"两骰子点数之和为7"，以 $B$ 记事件"两颗骰子中有一颗出现1点"．

**方法1°** 按条件概率的定义式：$P(B \mid A) = \dfrac{P(AB)}{P(A)}$ 来求条件概率．设想两颗骰子是可分辨的，样本空间为

$$S = \{(1,1),(1,2),\cdots,(1,6),(2,1),(2,2),\cdots,(2,6),\cdots,(6,6)\},$$

$$A = \{(1,6),(2,5),(3,4),(4,3),(5,2),(6,1)\},$$

$AB = \{(1,6),(6,1)\}$．现在 $N(S) = 36, N(A) = 6, N(AB) = 2$，因此

$$P(B \mid A) = \frac{2/36}{6/36} = \frac{1}{3}.$$

**方法2°** 按条件概率的含义来求 $P(B|A)$. 样本空间原有36个样本点，现在知道了"A已经发生"，不在 $A$ 中的样本点就不可能出现了，因而试验所有可能结果所成的集合就是 $A$，而 $A$ 中共有6个可能结果，其中只有两个结果 $(1,6)$ 和 $(6,1)$ 有一颗骰子出现1点，因此

$$P(B|A)=2/6=1/3.$$

**16** 据以往资料表明，某一3口之家，患某种传染病的概率有以下规律：

$$P\{孩子得病\}=0.6,\quad P\{母亲得病|孩子得病\}=0.5,$$
$$P\{父亲得病|母亲及孩子得病\}=0.4,$$

求母亲及孩子得病但父亲未得病的概率.

**【解】** 以 $A$ 记事件"孩子得病"，以 $B$ 记事件"母亲得病"，以 $C$ 记事件"父亲得病"，按题意需要求 $P(AB\overline{C})$. 已知 $P(A)=0.6, P(B|A)=0.5, P(C|BA)=0.4$，由乘法定理得

$$P(AB\overline{C})=P(\overline{C}BA)=P(\overline{C}|BA)P(BA)=P(\overline{C}|BA)P(B|A)P(A)$$
$$=(1-P(C|BA))P(B|A)P(A)=0.6\times0.5\times0.6=0.18.$$

**17** 已知在10只产品中有2只次品，在其中取两次，每次任取一只，作不放回抽样. 求下列事件的概率：

(1) 两只都是正品；　　(2) 两只都是次品；

(3) 一只是正品，一只是次品；　　(4) 第二次取出的是次品.

**【解】** 以 $A_i(i=1,2)$ 表示事件"第 $i$ 次抽出的是正品". 因为是不放回抽样，所以

(1) $P(A_1A_2)=P(A_2|A_1)P(A_1)=\dfrac{7}{9}\times\dfrac{8}{10}=\dfrac{28}{45}$.

(2) $P(\overline{A}_1\overline{A}_2)=P(\overline{A}_2|\overline{A}_1)P(\overline{A}_1)=\dfrac{1}{9}\times\dfrac{2}{10}=\dfrac{1}{45}$.

(3) $P(A_1\overline{A}_2\cup\overline{A}_1A_2)=P(A_1\overline{A}_2)+P(\overline{A}_1A_2)$（因 $(A_1\overline{A}_2)(\overline{A}_1A_2)=\varnothing$）

$$=P(\overline{A}_2|A_1)P(A_1)+P(A_2|\overline{A}_1)P(\overline{A}_1)=\frac{2}{9}\times\frac{8}{10}+\frac{8}{9}\times\frac{2}{10}=\frac{16}{45}.$$

(4) $P(\overline{A}_2)=P[(A_1\cup\overline{A}_1)\overline{A}_2]=P(A_1\overline{A}_2\cup\overline{A}_1\overline{A}_2)=P(A_1\overline{A}_2)+P(\overline{A}_1\overline{A}_2)$

$$=P(\overline{A}_2|A_1)P(A_1)+P(\overline{A}_2|\overline{A}_1)P(\overline{A}_1)=\frac{2}{9}\times\frac{8}{10}+\frac{1}{9}\times\frac{2}{10}=\frac{1}{5}.$$

**18** 某人忘记了电话号码的最后一个数字，因而他随意地拨号. 求他拨号不超过三次而接通所需电话的概率. 若已知最后一个数学是奇数，那么此概率是多少？

**【解法一】** 以 $A_i$ 表示事件"第 $i$ 次拨号拨通电话"，$i=1,2,3$. 以 $A$ 表示事件"拨号不超过3次拨通电话"，则有

$$A=A_1\cup\overline{A}_1A_2\cup\overline{A}_1\overline{A}_2A_3.$$

因 $A_1,\overline{A}_1A_2,\overline{A}_1\overline{A}_2A_3$ 两两互不相容，且 $P(A_1)=1/10$，

$$P(\overline{A}_1A_2)=P(A_2|\overline{A}_1)P(\overline{A}_1)=\frac{1}{9}\times\frac{9}{10}=\frac{1}{10},$$

$$P(\overline{A}_1\overline{A}_2A_3)=P(A_3|\overline{A}_1\overline{A}_2)P(\overline{A}_2|\overline{A}_1)P(\overline{A}_1)=\frac{1}{8}\times\frac{8}{9}\times\frac{9}{10}=\frac{1}{10},$$

即有 $$P(A)=P(A_1)+P(\overline{A}_1A_2)+P(\overline{A}_1\overline{A}_2A_3)=\frac{1}{10}+\frac{1}{10}+\frac{1}{10}=\frac{3}{10}.$$

当已知最后一位数是奇数时，所求概率为

$$p = \frac{1}{5} + \frac{1}{5} + \frac{1}{5} = \frac{3}{5}.$$

**【解法二】** $P(A) = 1 - P(\text{拨号 3 次都接不通}) = 1 - P(\overline{A}_1\overline{A}_2\overline{A}_3)$

$$= 1 - P(\overline{A}_3 \mid \overline{A}_1\overline{A}_2)P(\overline{A}_2 \mid \overline{A}_1)P(\overline{A}_1) = 1 - \frac{7}{8} \times \frac{8}{9} \times \frac{9}{10} = \frac{3}{10}.$$

当已知最后一位是奇数时，所求概率为 $p = 1 - \frac{2}{3} \times \frac{3}{4} \times \frac{4}{5} = \frac{3}{5}$.

**19** (1) 设甲袋中装有 $n$ 只白球、$m$ 只红球；乙袋中装有 $N$ 只白球、$M$ 只红球. 今从甲袋中任意取一只球放入乙袋中，再从乙袋中任意取一只球. 问取到白球的概率是多少?

(2) 第一只盒子装有 5 只红球，4 只白球；第二只盒子装有 4 只红球，5 只白球. 先从第一盒子中任取 2 只球放入第二盒中去，然后从第二盒子中任取一只球. 求取到白球的概率.

**【解】** (1) 以 $R$ 表示事件"从甲袋取得的是红球"，以 $W$ 表示事件"从乙袋取得的是白球"，即有

$$W = SW = (R \cup \overline{R})W = RW \cup \overline{R}W, (RW)(\overline{R}W) = \varnothing.$$

于是 $P(W) = P(RW) + P(\overline{R}W) = P(W \mid R)P(R) + P(W \mid \overline{R})P(\overline{R})$.

而 $P(R) = \dfrac{m}{n+m}$, $P(\overline{R}) = \dfrac{n}{n+m}$.

在计算 $P(W \mid R)$, $P(W \mid \overline{R})$ 时，注意再从乙袋任取一球，此时乙袋球数为 $N+M+1$ 只；在求 $P(W \mid R)$ 时，乙袋白球数为 $N$，但在求 $P(W \mid \overline{R})$ 时，乙袋白球数为 $N+1$，故

$$P(W) = \frac{N}{N+M+1}\frac{m}{n+m} + \frac{N+1}{N+M+1}\frac{n}{n+m} = \frac{n+N(n+m)}{(n+m)(N+M+1)}.$$

(2) 以 $R_i (i = 0,1,2)$ 表示事件"从第一盒中取得的球中有 $i$ 只是红球"，以 $W$ 表示事件"从第二盒取得一球是白球". 由于 $R_0, R_1, R_2$ 两两互不相容，且 $R_0 \cup R_1 \cup R_2 = S$，

故 $W = SW = (R_0 \cup R_1 \cup R_2)W = R_0W + R_1W + R_2W$.

从而

$$\begin{aligned} P(W) &= P(R_0W) + P(R_1W) + P(R_2W) \\ &= P(W \mid R_0)P(R_0) + P(W \mid R_1)P(R_1) + P(W \mid R_2)P(R_2). \end{aligned}$$

而 $P(R_0) = \binom{4}{2}\Big/\binom{9}{2} = 1/6$, $P(R_2) = \binom{5}{2}\Big/\binom{9}{2} = 5/18$,

$$P(R_1) = 1 - P(R_0) - P(R_2) = 1 - 1/6 - 5/18 = 10/18.$$

并注意到，再从第二盒任取一球，此时第二盒球的个数为 11，故

$$P(W \mid R_0) = 7/11, \quad P(W \mid R_1) = 6/11, \quad P(W \mid R_2) = 5/11,$$

所以 $P(W) = \frac{7}{11} \times \frac{1}{6} + \frac{6}{11} \times \frac{10}{18} + \frac{5}{11} \times \frac{5}{18} = \frac{53}{99}$.

**20** 某种产品的商标为"MAXAM"，其中有 2 个字母脱落，有人捡起随意放回，求放回后仍为"MAXAM"的概率.

**【解】** 以 $H_1, H_2, H_3, H_4, H_5$ 依次表示事件"脱落 $M$、$M$"，"脱落 $A$、$A$"，"脱落 $M$、$A$"，"脱落 $X$、$A$"，"脱落 $X$、$M$"，以 $G$ 表示事件"放回后仍为 MAXAM"，所需求的是 $P(G)$. 可知 $H_1, H_2, H_3, H_4, H_5$ 两两不相容，且 $H_1 \cup H_2 \cup H_3 \cup H_4 \cup H_5 = S$. 已知

$$P(H_1)=\binom{2}{2}\Big/\binom{5}{2}=1/10,\qquad P(H_2)=\binom{2}{2}\Big/\binom{5}{2}=1/10,$$

$$P(H_3)=\binom{2}{1}\binom{2}{1}\Big/\binom{5}{2}=4/10,\quad P(H_4)=\binom{1}{1}\binom{2}{1}\Big/\binom{5}{2}=2/10,$$

$$P(H_5)=\binom{1}{1}\binom{2}{1}\Big/\binom{5}{2}=2/10,$$

而

$$P(G\mid H_1)=P(G\mid H_2)=1,$$

$$P(G\mid H_3)=P(G\mid H_4)=P(G\mid H_5)=1/2.$$

由全概率公式得

$$P(G)=\sum_{i=1}^{5}P(G\mid H_i)P(H_i)=\frac{1}{10}+\frac{1}{10}+\frac{2}{10}+\frac{1}{10}+\frac{1}{10}=\frac{3}{5}.$$

**21** 已知男子有5% 是色盲患者,女子有0.25% 是色盲患者. 今从男女人数相等的人群中随机地挑选一人,恰好是色盲者,问此人是男性的概率是多少?

**【解】** 以$A$表示事件"选出的是男性",则$\bar{A}$表示事件"选出的是女性",以$H$表示事件"选出的人患色盲",则$\bar{H}$表示"选出的人不患色盲". 由题设$P(A)=P(\bar{A})=1/2$,$P(H\mid A)=0.05$,$P(H\mid \bar{A})=0.0025$,所需求的概率是$P(A\mid H)$. 由贝叶斯公式得

$$P(A\mid H)=\frac{P(AH)}{P(H)}=\frac{P(H\mid A)P(A)}{P(H\mid A)P(A)+P(H\mid \bar{A})P(\bar{A})}$$

$$=\frac{0.05\times\frac{1}{2}}{0.05\times\frac{1}{2}+0.0025\times\frac{1}{2}}=\frac{500}{525}=\frac{20}{21}.$$

**22** 一学生接连参加同一课程的两次考试. 第一次及格的概率为$p$,若第一次及格则第二次及格的概率也为$p$;若第一次不及格则第二次及格的概率为$p/2$. (1) 若至少有一次及格则他能取得某种资格,求他取得该资格的概率. (2) 若已知他第二次已经及格,求他一次及格的概率.

**【解】** 以$A_i$表示事件"第$i$次考试及格",$i=1,2$;以$A$表示"他能取得某种资格".

(1) 按题意$A=A_1\cup\bar{A}_1A_2$. 因$A_1\cap(\bar{A}_1A_2)=\varnothing$,且由已知条件:

$$P(A_1)=p,\qquad P(\bar{A}_1)=1-p,$$

$$P(A_2\mid A_1)=p,\quad P(A_2\mid \bar{A}_1)=p/2,$$

故

$$P(A)=P(A_1\cup\bar{A}_1A_2)=P(A_1)+P(\bar{A}_1A_2)=p+P(A_2\mid\bar{A}_1)P(\bar{A}_1)$$

$$=p+(p/2)(1-p)=(3/2)p-(1/2)p^2.$$

$$(2)\ P(A_1\mid A_2)=\frac{P(A_1A_2)}{P(A_2)}=\frac{P(A_2\mid A_1)P(A_1)}{P(A_2\mid A_1)P(A_1)+P(A_2\mid\bar{A}_1)P(\bar{A}_1)}$$

$$=\frac{p\times p}{p\times p+(p/2)(1-p)}=\frac{2p}{p+1}.$$

**23** 将两信息分别编码为$A$和$B$传送出去,接收站收到时,$A$被误收作$B$的概率为0.02,而$B$被误收作$A$的概率为0.01. 信息$A$与信息$B$传送的频繁程度为2:1. 若接收站收到的信息是$A$,问原发信息是$A$的概率是多少?

**【解】** 以$D$表示事件"将信息$A$传递出去",则$\bar{D}$表示事件"将信息$B$传递出去",以$R$表示

"接收到信息 $A$",则 $\bar{R}$ 表示事件"接收到信息 $B$",按题意需求概率 $P(D|R)$. 已知 $P(\bar{R}|D)=0.02$, $P(R|\bar{D})=0.01$, 且有 $P(D)/P(\bar{D})=2/1$, 由于 $P(D)+P(\bar{D})=1$, 得知 $P(D)=2/3$, $P(\bar{D})=1/3$. 由贝叶斯公式得到

$$P(D|R)=\frac{P(DR)}{P(R)}=\frac{P(R|D)P(D)}{P(R|D)P(D)+P(R|\bar{D})P(\bar{D})}$$

$$=\frac{(1-0.02)\times(2/3)}{(1-0.02)\times(2/3)+0.01\times(1/3)}=\frac{196}{197}.$$

**24** 有两箱同种类的零件,第一箱装50只,其中10只一等品;第二箱装30只,其中18只一等品. 今天两箱中任挑出一箱,然后从该箱中取零件两次,每次任取一只,作不放回抽样. 求(1)第一次取到的零件是一等品的概率. (2)第一次取到的零件是一等品的条件下,第二次取到的也是一等品的概率.

【解】 以 $H$ 表示事件"从第一箱中取零件",则 $\bar{H}$ 表示事件"从第二箱中取零件". 由已知条件 $P(H)=P(\bar{H})=1/2$. 又以 $A_i$ 表示事件"第 $i$ 次从箱中(不放回抽样)取得的是一等品", $i=1,2$.

(1) 由条件 $P(A_1|H)=1/5$, $P(A_1|\bar{H})=3/5$, 故

$$P(A_1)=P(A_1|H)P(H)+P(A_1|\bar{H})P(\bar{H})=1/10+3/10=2/5.$$

(2) 需要求的是 $P(A_2|A_1)$. 因 $P(A_2|A_1)=\dfrac{P(A_1A_2)}{P(A_1)}$, 而

$$P(A_1A_2)=P(A_1A_2|H)P(H)+P(A_1A_2|\bar{H})P(\bar{H})$$

由条件概率的含义, $P(A_1A_2|H)$ 表示在第一箱中取两次,每次取一只产品,作不放回抽样,且两次都取得一等品的概率. 因第一箱共有50只产品,其中有10只一等品,故有 $P(A_1A_2|H)=\dfrac{10}{50}\times\dfrac{9}{49}$. 同理, $P(A_1A_2|\bar{H})=\dfrac{18}{30}\times\dfrac{17}{29}$, 故有

$$P(A_2|A_1)=\frac{P(A_1A_2)}{P(A_1)}=\frac{1}{P(A_1)}[P(A_1A_2|H)P(H)+P(A_1A_2|\bar{H})P(\bar{H})]$$

$$=\frac{5}{2}\left(\frac{10}{50}\times\frac{9}{49}\times\frac{1}{2}+\frac{18}{30}\times\frac{17}{29}\times\frac{1}{2}\right)$$

$$=\frac{1}{4}\left(\frac{9}{49}+\frac{51}{29}\right)=0.4856.$$

**25** 某人下午5:00下班,他所积累的资料表明:

| 到家时间 | 5:35 ~ 5:39 | 5:40 ~ 5:44 | 5:45 ~ 5:49 | 5:50 ~ 5:54 | 迟于5:54 |
|---|---|---|---|---|---|
| 乘地铁的概率 | 0.10 | 0.25 | 0.45 | 0.15 | 0.05 |
| 乘汽车的概率 | 0.30 | 035 | 0.20 | 0.10 | 0.05 |

某日他抛一枚硬币决定乘地铁还是乘汽车,结果他是5:47到家的. 试求他是乘地铁回家的概率.

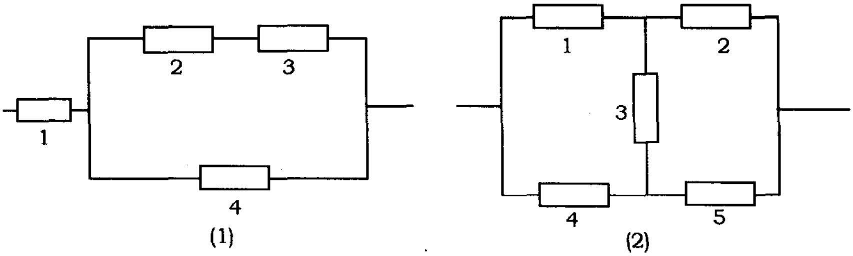
【解】 以 $H$ 表示事件"乘地铁回家",则 $\bar{H}$ 表示事件"乘汽车回家". 因到家时间为5:47,它属于区间5:45 ~ 5:49,以 $T$ 记"到家时间在5:45 ~ 5:49之间",则需要求的是概率 $P(H|T)$. 已知 $P(T|H)=0.45$, $P(T|\bar{H})=0.20$, 又因他是由掷硬币决定乘地铁还是乘汽车,因此, $P(H)=P(\bar{H})=0.5$. 由贝叶斯公式得

$$P(H|T)=\frac{P(HT)}{P(T)}=\frac{P(T|H)P(H)}{P(T|H)P(H)+P(T|\bar{H})P(\bar{H})}$$

$$= \frac{0.45 \times 0.5}{0.45 \times 0.5 + 0.20 \times 0.5} = \frac{9}{13}.$$

**26** (1) 设有 4 个独立工作的元件 1,2,3,4．它们的可靠性分别为 $p_1, p_2, p_3, p_4$,将它们按图(1) 的方式联接(称为并串联系统);

(2) 设有 5 个独立工作的元件 1,2,3,4,5．它们的可靠性均为 $p$,将它们按图(2) 的方式联接(称为桥式系统)．试分别求这两个系统的可靠性．




第 26 题图

**【解】** (1) 以 $A_i$ 表示事件"第 $i$ 只元件正常工作",$i = 1,2,3,4$,以 $A$ 表示"系统正常工作",已知各元件是否正常工作相互独立,且有 $P(A_i) = p_i(i = 1,2,3,4)$．由图知

$$A = A_1[(A_2A_3) \cup A_4] = A_1A_2A_3 \cup A_1A_4.$$

由加法公式及各元件工作的独立性得到

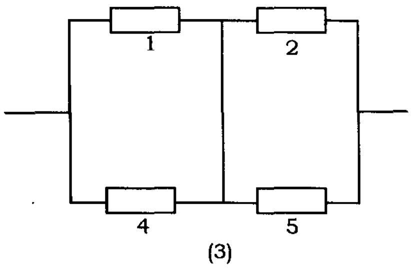
$$\begin{aligned} P(A) &= P(A_1A_2A_3) + P(A_1A_4) - P\{(A_1A_2A_3) \cap (A_1A_4)\} \\ &= P(A_1)P(A_2)P(A_3) + P(A_1)P(A_4) - P(A_1A_2A_3A_4) \\ &= p_1p_2p_3 + p_1p_4 - P(A_1)P(A_2)P(A_3)P(A_4) \\ &= p_1(p_4 + p_2p_3 - p_2p_3p_4). \end{aligned}$$

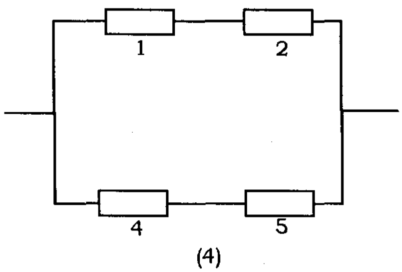
(2) 以 $A_i$ 表示事件"第 $i$ 只元件正常工作",$i = 1,2,3,4,5$,以 $A$ 表示"系统正常工作",已知各元件是否正常工作相互独立,且有 $P(A_i) = p(i = 1,2,3,4,5)$．

全概率公式法．按元件 3 处于正常工作与失效两种状态,将原系统简化为典型的并串联和串并联系统,再用全概率公式:

$$P(A) = P(A \mid A_3)P(A_3) + P(A \mid \overline{A}_3)P(\overline{A}_3)$$

来计算原系统的可靠性．




当元件 3 正常工作时,系统简化成如图(3) 所示,当元件 3 失效时,系统简化成如图(4) 所示．因此