高中数学

龙门考题

高考中的数学思想方法

徐有标 刘治平 主编

$$\sqrt{3\log_a x-2}<2\log_a x-1 \quad (a>0, a\neq 1)$$

龍門書局

高考中的数学思想方法

龙门考题

主编 徐有标
刘治平

龍門書局

高考中的数学思想方法

徐有标　刘治平　主编

责任编辑　王　敏

龍門書局　出版

北京东黄城根北街16号

邮政编码：100717

化学工业出版社印刷厂印刷

科学出版社总发行　各地书店经销

2001年2月第一版	开本：880×1230
2001年3月第二次印刷	印张：6 3/4
印数：10 001—40 000	字数：249 000

ISBN 7-80160-141-6/G·177

定　价：7.00元

(如有印装质量问题，我社负责调换)

前　言

参考书几乎是每一位学生学习过程中必不可少的。如何发挥一本参考书的长效作用，使学生阅读后，能更透彻、迅速地明晰重点、难点，在掌握基本的解题思路和方法的基础上，举一反三、触类旁通，这是编者和读者共同关心的问题。这套《龙门专题》，就是龙门书局本着以上原则组织编写的。它包括数学、物理、化学三个学科共计 44 种，其中初中数学 11 种，高中数学 12 种，初中物理 4 种，高中物理 6 种，初中化学 3 种，高中化学 8 种。

本套书在栏目设置上，主要体现循序渐进的特点。每本书内容分为两篇——“基础篇”和“综合应用篇”（高中为“3 + X”综合应用篇）。“基础篇”又分为“知识点精析与应用”、“视野拓展”两个栏目。其中“**知识点精析与应用**”着眼于把基础知识讲透、讲细，帮助学生捋清知识脉络，牢固掌握知识点，为将成绩提高到一个新的层次奠定扎实的基础。“**视野拓展**”则是在牢固掌握基础知识的前提下，为使学生成绩“更上一层楼”而准备的。需要强调的是，这部分虽然名为“拓展”，但仍然立足于教材本身。主要针对教材中因受篇幅所限言之不详，但却是高（中）考必考内容的知识点（这类知识点，虽然不一定都很难，但却一直是学生在考试中最易丢分的内容）。“视野拓展”即针对这部分知识进行讲解，还包括了另外一些不易掌握、失分率较高的内容。纵观近年来高（中）考形势的变化，综合题与应用题越来越多，试行“3 + X”高考模式以后，这一趋势更加明显。“综合应用篇”正是顺应这种形势而设，旨在提高学生的综合能力与应用能力，使学生面对纷繁多样的试题，能够随机应变，胸有成竹。

古人云：授人以鱼，只供一饭之需；授人以渔，则一生受用无穷。这也是我们编写这套书的宗旨。作为龙门书局最新推出的《龙门专题》，有以下几个特点：

1. 以“专”为先　本套书共计 44 种，你尽可以根据自己的需要从

中选择最实用、最可获益的几种。因为每一种都是对某一个专题由浅入深、由表及里的诠释，读过一本后，可以说对这个专题的知识就能够完全把握了。

2.讲解细致完备　由于本书是就某一专题进行集中、全面的剖析，对知识点的讲解自然更细致。一些问题及例题、习题后的特殊点评标识，能使学生对本专题的知识掌握起来难度更小，易于理解和记忆。

3.省时增效　由于“专题”内容集中，每一本书字数相对较少，学生可以有针对性地选择，以满足在较短时间里完成对某一整块知识学透、练透的需求。

4.局限性小　与教材“同步”与“不同步”相结合。“同步”是指教材中涉及的知识点本套书都涉及，并分别自成一册；“不同步”是指本套书不一定完全按教材的章节顺序编排，而是把一个知识块作为一个体系来加以归纳。如归纳高中立体几何中的知识为四个方面、六个问题，即“点、线、面、体”和“平行、垂直、成角、距离、面积、体积”。让学生真正掌握各个知识点间的相互联系，从而自然地连点成线，从“专题”中体味“万变不离其宗”的含义，以减小其随教材变动的局限性。

5.主次分明　每种书的前面都列出了本部分内容近几年在高考中所占分数的比例，使学生能够根据自己的情况，权衡轻重，提高效率。

本书的另一特点是充分体现中央关于“减负”的精神。“减负”的根本目的在于培养新一代有知识又有能力的复合型人才，它是实施素质教育的重要环节。就各科教学而言，只有提高教学质量，提高效率，才能真正达到减轻学生负担的目的。而本套书中每本书重点突出，讲、练到位，对于提高学生对某一专题学习的相对效率而言，大有裨益。这也是本书刻意追求的重点。

鉴于本书立意的新颖，编写难度很大，又受作者水平所限，书中难免疏漏之处，敬请不吝指正。

编　者

2001年1月1日

编委会（高中数学）

目　录

数学思想方法总述

数学思想是人们认识、理解、掌握数学的意识,数学方法是人们解决数学问题的方略.

数学思想方法是数学意识和数学方略的总称.数学思想是在一定的数学知识、数学方法的基础上形成的,反之,数学思想对理解、掌握、运用数学知识和数学方法,解决数学问题能起到促进和深化的作用.随着教育改革的深入发展,人们把学习数学知识、渗透数学思想方法的教育,作为数学教育的出发点和落脚点.目前不少数学教育家将学生对数学思想方法的理解、掌握与运用的水平,作为评价学生数学成绩的重要指标之一.

近年来我国的高考大纲里已明确地提出除考查学生"数学知识和思维能力"外,还要考查学生"数学思想方法"的运用能力.这一指导思想在这几年的高考试题中,无论在客观题还是主观题中都有体现,而且越来越向深度和广度发展.如1996至2000年全国高考数学试题中(理科),考查运用数学思想方法解题的频数分布,列表如下.

1996~2000 年高考试题(理科)考查运用数学思想方法解题频数分布表

思想方法 / 考查频数 / 试题年份	方程的思想方法	函数的思想方法	数形结合的思想方法	转化的思想方法	分类讨论的思想方法	分析与综合的思想方法	归纳的思想方法	整体的思想方法	构造的思想方法	对称的思想方法	动态的思想方法
1996 年	5	3	8	13	5	14	2	1	2	1	2
1997 年	7	3	7	13	3	11	1	1	2	3	4
1998 年	10	3	8	18	3	8	1	1	3	3	3
1999 年	6	6	11	16	5	6	1	2	2	3	2
2000 年	9	5	10	13	6	5	3	1	2	3	2

说明:有的试题考查运用几种数学思想方法求解,这几种数学思想方法也统计在内.

然而笔者近几年的研究表明,不少考生对数学思想方法认识模糊,理解肤浅,运用不畅,方略呆板,解题盲目、随意,结果造成解题失误,从而严重影响了考生的成绩.

为了满足广大考生参加高考的实际需要，针对当前学生在解题实践中存在的问题，笔者特撰写了这本书．书中提出的十一种数学思想方法，基本上涵盖了中学数学的全部内容．对每一种数学思想方法怎样运用，我们结合我国十多年来的 267 道高考试题的实例，作了详细的分析和具体的解答，有的实例解答后还作了详尽的评述．每节后面我们还精选了一些贴近高考的达标跟踪训练题，并对它作了解答．这对帮助同学们更好地确立数学思想方法意识，学会运用数学思想方法去处理数学问题能起到很好的启迪作用．我们相信，读完这本书后，对提高数学的高考成绩，一定会起到积极的作用．

一、方程的思想方法

知识梳理

本节重点知识是：什么是方程？方程具有哪些性质？如何将一个形式上是非方程的问题转化为方程问题．难点是如何运用方程的思想方法进行解题．

知识点精析与应用

【方程思想方法的涵义】

在解决数学问题时，对于一些从形式上看是以非方程的问题出现的，但经过一定的数学变换或构造，使这一非方程的问题转化为方程的形式，并运用方程的有关性质来处理这一问题，进而使原数学问题得到很好地解决．这一思想方法，我们称之为"方程的思想方法"．

那么什么是方程？含有未知数的等式叫做方程．在中学里我们已经学过的方程有以下几类表达式：

一元方程一般的表达式：$f(x)=0$；二元方程一般的表达式：$f(x,y)=0$；多元方程一般的表达式：$f(x,y,\cdots z)=0$．

方程有以下一些性质：

使方程等号两边相等的未知数的值叫做方程的解．只含有一个未知数的方程的解，也叫做方程的根．如 $f(a)=0$，a 就是方程 $f(x)=0$ 的解．其几何意义就是曲线 $y=f(x)$ 与 x 轴交点的横坐标．

能使方程组中每一个方程都适合的未知数的值，叫做方程组的解．

求方程（或方程组）的解，或确定其无解的过程中叫做解方程（或解方程组）．

一元二次方程一般形式：$ax^2+bx+c=0(a\neq0)$，常用的解法有：

(1) 因式分解法；(2)配方法；(3)公式法（求根法）：$x=\dfrac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$．

根的判别式：$\Delta=b^2-4ac$，它的作用是：

当 $\Delta>0$ 时，方程有两个不相等的实数根．几何意义是抛物线 $y=ax^2+bx+c$ 与 x 轴有两个不同交点；

当 $\Delta=0$ 时，方程有两个相等的实数根．几何意义是抛物线 $y=ax^2+bx+c$ 与 x 轴相切；

当 $\Delta<0$ 时，方程没有实数根，而有一对共轭的虚数根．几何意义是抛物线 $y=ax^2+bx+c$ 与 x 轴没有公共点．

根与系数的关系.(韦达定理)

设 x_1、x_2 是一元二次方程 $ax^2+bx+c=0(a\neq0)$ 的两个根,则有

$$\begin{cases}x_1+x_2=-\dfrac{b}{a},\\ x_1\cdot x_2=\dfrac{c}{a}.\end{cases}$$

反之,如果有

$$\begin{cases}x_1+x_2=-p,\\ x_1\cdot x_2=q.\end{cases}$$

那么 x_1、x_2 是一元二次方程 $x^2+px+q=0$ 的两个根.

如果两数是某一已知方程的根,在求这两数的差、平方和(差)、立方和(差)等一类问题时,运用根与系数的关系来解较为方便.

【解题方法指导】

用方程的思想方法解题,就是要用对立统一的观点,分析和研究具体问题中的数量及其关系,把对立的已知与未知通过相等关系统一在方程中(或构造出一个方程),用求解方程或对方程性质的研究,使问题得以解决.即用方程的思想方法解决非方程的问题.

1.以方程的意识,求值问题

有些求值或化简题,如果纳入方程的思想方法体系,往往方法巧妙,过程简捷.

[例1] (2000年全国高考题)设集合 A 和 B 都是自然数集合 **N**,映射 $f:A\to B$ 把集合 A 中的元素 n 映射到集合 B 中的元素 2^n+n,则在映射 f 下,象20的原象是 ( )

A.2 B.3 C.4 D.5

解析 已知映射、象,求原象.此题从表面看与方程没有什么联系,实质上从已知象20,求原象 n 是何值?是一种方程的关系.运用方程的思想方法去解,是一种较佳的解法.列方程 $2^n+n=20$,尝试实验解得 $n=4$,应选C.

评述 象惟一,原象不一定惟一,但此题是惟一的.若已知映射、原象、求象,则可由函数的思想方法求函数值的问题.

你在平时解题时注意这些思想方法吗?

[例2] (2000年全国高考题)一个长方体共一顶点的三个面的面积分别是 $\sqrt{2}$,$\sqrt{3}$,$\sqrt{6}$.这个长方体对角线的长是 ( )

A.$2\sqrt{3}$ B.$3\sqrt{2}$ C.6 D.$\sqrt{6}$

解析 已知长方体三个(共顶点)面的面积,求对角线长.关键在于求得其共

巨蟹 6.22 7.22
处女 8.23-9.22
峰 12.22-1.19

顶点的三条棱 a,b,c 的长，而面积与棱长存在着内在关系，那么用方程的思想方法去处理问题较为自然. 列方程组

$$\begin{cases} ab=\sqrt{2} \\ bc=\sqrt{3} \\ ca=\sqrt{6} \end{cases} \Rightarrow (abc)^2=6, abc=\sqrt{6} \Rightarrow \begin{cases} c=\sqrt{3} \\ a=\sqrt{2} \\ b=1 \end{cases} \Rightarrow$$

$\Rightarrow$ 对角线 $l=\sqrt{a^2+b^2+c^2}=\sqrt{6}$，应选 D.

评述 此题亦可由方程式：$c\sqrt{2}=a\sqrt{3}=b\sqrt{6}=V$，$\Rightarrow 2c^2=3a^2=6b^2=V^2$，由 $l^2=a^2+b^2+c^2=\frac{1}{2}V^2+\frac{1}{3}V^2+\frac{1}{6}V^2=V^2=(abc)^2$ 及 $(abc)^2=6$，得 $l=\sqrt{6}$.

[例 3] (2000 年全国高考题) 如图 1-1，OA 是圆锥底面中心 O 到母线的垂线，OA 绕轴旋转一周所得曲面将圆锥分成体积相等的两部分，则母线与轴的夹角为 (　　)

A. $\arccos\frac{1}{\sqrt[3]{2}}$　　B. $\arccos\frac{1}{2}$

C. $\arccos\frac{1}{\sqrt{2}}$　　C. $\arccos\frac{1}{\sqrt[4]{2}}$

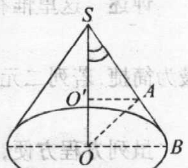

图 1-1

解析 条件是已知圆锥中两部分体积相等，求母线与轴的夹角. 从相等这一条件自然可从方程的思想方法考虑. 利用相等关系，列出含夹角 θ 或与夹角有关系的方程，通过解方程，求出 θ.

如图 1-1，过 A 点作 $AO'\perp$ 轴 SO 交于 O'，则 $\angle BOA=\angle OAO'=\angle OSB=\theta$. 由此可知

$$2V_{S-\odot O'-O}=V_{S-\odot O}$$

$$\therefore 2\times\frac{1}{3}SO\cdot\pi O'A^2=\frac{1}{3}SO\cdot\pi OB^2$$

即 $2O'A^2=OB^2$，在 $\triangle OAB$ 中，$OB=\frac{OA}{\cos\angle BOA}=\frac{OA}{\cos\theta}$

在 $\triangle O'AO$ 中，$O'A=OA\cos\angle OAO'=OA\cos\theta$

$\therefore 2\times OA^2\cos^2\theta=\frac{OA^2}{\cos^2\theta}$ 解之，得

$\theta=\arccos\frac{1}{\sqrt[4]{2}}$，应选 D.

评述 也可由 $2O'A^2=OB^2$，得 $\frac{O'A}{OB}=\frac{1}{\sqrt{2}}$，而 $\frac{O'A}{OB}=\frac{O'A}{OA}\cdot\frac{OA}{OB}$

$=\cos\angle OAO'\cdot\cos\angle BOA=\cos^2\theta=\dfrac{1}{\sqrt{2}}$,求得 θ.

[例 4] (1999 年全国高考题)若干毫升水倒入底面半径为 2cm 的圆柱形器皿中,量得水面的高度为 6cm.若将这些水倒入轴截面是正三角形的倒圆锥形器皿中,则水面的高度是 ( )

A. $6\sqrt{3}$cm　B. 6cm　C. $2\sqrt[3]{18}$cm　D. $3\sqrt[3]{12}$cm

解析 题中存在体积相等的关系.运用方程的思想方法,设水面高为 h,则倒圆锥形器皿中水面宽为 $\dfrac{2}{\sqrt{3}}h$,即底面半径为 $\dfrac{1}{\sqrt{3}}h$,列方程,$\dfrac{1}{3}h\pi\left(\dfrac{h}{\sqrt{3}}\right)^2=6\pi 2^2$.解之,得 $h=6$,应选 B.

评述 这里惟有运用方程的思想方法,依据等量关系列方程求水面的高度最为简捷.若列二元方程 $\begin{cases}\dfrac{1}{3}h\pi r^2=6\pi 2^2,\\ h=\sqrt{3}r.\end{cases}$ 虽列方程方便,但求解较烦.

简捷明了是我们所追求的

[例 5] (1999 年全国高考题)如果圆台的上底面半径为 5,下底面半径为 R,中截面把圆台分为上、下两个圆台,它们的侧面积的比为 1∶2,那么 $R=$ ( )

A. 10　B. 15　C. 20　D. 25

解析 从题设中知,有以下等式关系:

$$2S_{上侧}=S_{下侧}.$$

于是运用方程的思想方法,设上、下两圆台的母线长为 l,依据圆台的侧面公式,列方程

$2l\left(5+\dfrac{5+R}{2}\right)\pi=l\left(\dfrac{5+R}{2}+R\right)\pi$.解之,得 $R=25$,所以应选 D.

评述 这里运用方程的思想方法求 R,比其他方法简便、清晰.

[例 6] (1998 年全国高考题)一个直角三角形三内角的正弦值成等比数列,其最小角为 ( )

A. $\arccos\dfrac{\sqrt{5}-1}{2}$　B. $\arcsin\dfrac{\sqrt{5}-1}{2}$　C. $\arccos\dfrac{1-\sqrt{5}}{2}$　D. $\arcsin\dfrac{1-\sqrt{5}}{2}$

分析 显然不是 C、D,因为 C 角在第二象限,D 角在第四象限.但 A、B 不知哪一个对?须直接求.求角的问题,可归结为解三角方程.因此可用方程的思想方法来解.

解 设三个角依次为 $\alpha<\beta<\gamma=90^\circ$,依题意列方程:

$$\begin{cases}\sin^2\beta=\sin\alpha(\text{其中 }\sin\gamma=1) & ①\\ \sin\alpha=\cos\beta\quad(\alpha+\beta=90^\circ) & ②\end{cases}$$

消 β，由②得 $\cos^2\beta=\sin^2\alpha$ ③

①+③得 $1=\sin^2\alpha+\sin\alpha$.

解之，得 $\sin\alpha=\dfrac{-1\pm\sqrt{5}}{2}$由 $0<\alpha<90^\circ$，取正值 得 $\sin\alpha=\dfrac{\sqrt{5}-1}{2}$.

∴应选 B.

评述 这里也可以由正弦定理得 $b^2=ac$，由勾股定理得 $c^2=a^2+b^2$(其中 a 为最小直角边)，于是得方程

$a^2+ac=c^2$ 即 $\left(\dfrac{a}{c}\right)^2+\dfrac{a}{c}-1=0.$ $\left(\dfrac{a}{c}\text{为未知数}\right)$

解之，$\dfrac{a}{c}=\dfrac{-1\pm\sqrt{5}}{2}$，由 $a>0, c>0$，

取$\dfrac{a}{c}=\sin A=\dfrac{\sqrt{5}-1}{2}$. ∴最小角为 $\arcsin\dfrac{\sqrt{5}-1}{2}$.

[例 7] (1998 年全国高考题)等比数列$\{a_n\}$的公比为$-\dfrac{1}{2}$，前 n 项和 S_n 满足$\lim\limits_{n\to\infty}S_n=\dfrac{1}{a_1}$，那么 a_1 的值为 ( )

A. $\pm\sqrt{3}$ B. $\pm\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ C. $\pm\sqrt{2}$ D. $\pm\dfrac{\sqrt{6}}{2}$

分析 公比已知，$\lim\limits_{n\to\infty}S_n$ 存在，用方程的思想方法，由$\dfrac{a_1}{1-q}=\dfrac{1}{a_1}$，解方程可求出 a_1.

解 $\because\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{a_1(1-q^n)}{1-q}=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{a_1\left[1-\left(-\frac{1}{2}\right)^n\right]}{1+\frac{1}{2}}=\dfrac{a_1}{1+\frac{1}{2}}$.

$\therefore\dfrac{a_1}{1+\frac{1}{2}}=\dfrac{1}{a_1}$ 解方程，得 $a_1^2=\dfrac{3}{2}$，得 $a_1=\pm\dfrac{\sqrt{6}}{2}$. ∴应选 D.

评述 若熟知当$|q|<1$时，$\lim\limits_{n\to\infty}S_n=\dfrac{a_1}{1-q}$也可直接列方程$\dfrac{a_1}{1+\frac{1}{2}}=\dfrac{1}{a_1}$. 解之得 $a_1=\pm\dfrac{\sqrt{6}}{2}$.

[例 8] (1998 年全国高考题)已知圆锥的全面积是底面积的 3 倍，那么该圆锥的侧面展开图扇形的圆心角为 ( )

A. 120° B. 150° C. 180° D. 240°

解析 由已知可知，$S_{侧}=2S_{底}$，由所求只须求$\dfrac{2\pi r}{l}$. 已有一个等式 $S_{侧}=2S_{底}$，用方程的思想方法，确定要求的未知数 α，找到含未知数 α 的等量关系（由已知可找），只有一个未知数，只须一个相等关系.

解：设侧面展开图扇形的圆心角为 α，

由 $\alpha=\dfrac{2\pi r}{l}$，得 $r=\dfrac{l\alpha}{2\pi}$，由 $S_{侧}=\pi rl$，

$S_{底}=\pi r^2$，依题意列方程　得　$\pi\cdot\dfrac{l\alpha}{2\pi}\cdot l=2\pi\dfrac{l^2\alpha^2}{4\pi^2}$. $(l\neq 0)$

解之，$\alpha=0$（舍去）或 $\alpha=\pi$，即 $\alpha=180°$. $\therefore$ 应选 C.

评述 本题实际上也用到转化的思想方法. 本题也可用综合法来做.

$\because S_{全}=3S_{底}$，$\therefore S_{侧}=2S_{底}$，又 $\because S_{侧}=\pi rl$，$S_{底}=\pi r^2$，$\therefore \pi rl=2\pi r^2$，$\because r\neq 0$，$\therefore l=2r$，又 $\because\ \alpha=\dfrac{2\pi r}{l}$，而 $l=2r$，$\therefore \alpha=\dfrac{2\pi r}{2r}=\pi$，而 $\alpha=180°$.

做完一道题后，最好你反问自己一下，还有别的方法吗？这样对培养你思维灵活性和深刻性大有好处.

[例 9] （2000 年全国高考题）已知数列$\{C_n\}$，其中 $C_n=2^n+3^n$，且数列$\{C_{n+1}-pC_n\}$为等比数列，求常数 p.

分析 这是已知数列为等比数列，求参数值 p，其中蕴含着已知与未知的等式关系，于是可从方程的思想方法来考虑. 依据等比数列这一条件，列出方程（含参数的等式）、解方程就可求得参数 p 的值. 并兼用分类思想.

解 设 $R_n=C_{n+1}-pC_n=2^{n+1}+3^{n+1}-p(2^n+3^n)=2^n(2-p)+3^n(3-p)$，由$\{R_n\}$成等比数列，则列出如下方程：

$$R_n^2=R_{n-1}\cdot R_{n+1}$$

而　$$\begin{aligned}R_n^2&=[2^n(2-p)+3^n(3-p)]^2\\&=2^{2n}(2-p)^2+2\cdot 2^n\cdot 3^n(2-p)(3-p)+3^{2n}(3-p)^2\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}R_{n-1}\cdot R_{n+1}&=[2^{n-1}(2-p)+3^{n-1}(3-p)][2^{n+1}(2-p)+3^{n+1}(3-p)]\\&=2^{2n}(2-p)^2+2^{n+1}\cdot 3^{n-1}(2-p)(3-p)+2^{n-1}\cdot 3^{n+1}(2-p)\cdot\\&\quad(3-p)+3^{2n}(3-p)^2\end{aligned}$$

由 $R_n^2-R_{n-1}\cdot R_{n+1}=0$，得

$$2^{n-1}\cdot 3^{n-1}(2-p)(3-p)[2\times 3\times 2-3^2-2^2]=0$$

$\therefore (2-p)(3-p)=0$ 解之，得 $p=2$ 或 $p=3$.

评述 此题用方程的思想方法来求解，思路就比较宽阔，也可以从另一角度来列方程：

由$\dfrac{R_{n+1}}{R_n}$为与 n 无关的常数，确定 p 的值.

事实上，
$$\frac{R_{n+1}}{R_n}=\frac{2^{n+1}(2-p)+3^{n+1}(3-p)}{2^n(2-p)+3^n(3-p)}$$
$$=\frac{2\cdot 2^n(2-p)+2\cdot 3^n(3-p)+3^n(3-p)}{2^n(2-p)+3^n(3-p)}$$
$$=2+\frac{3^n(3-p)}{2^n(2-p)+3^n(3-p)}=2+\frac{3-p}{\left(\frac{2}{3}\right)^n(2-p)+(3-p)}$$

(1) 当 $p=3$ 时，$\frac{R_{n+1}}{R_n}=2$，则数列$\{C_{n+1}-pC_n\}$其公比为 2 的等比数列；

(2)当 $p=2$ 时，$\frac{R_{n+1}}{R_n}=3$，则数列$\{C_{n+1}-pC_n\}$其公比为 3 的等比数列.

还有更为特殊的方程，由 $C_{n+1}-pC_n=2^n(2-p)+3^n(3-p)$.

(1) 当 $p=3$ 时，$C_{n+1}-3C_n=-2^n$，此数列首项为 -2，公比为 2 的等比数列；

(2)当 $p=2$ 时，$C_{n+1}-2C_n=3^n$，此数列首项为 3，公比为 3 的等比数列.

在蕴含中你能找出已知与未知的等式关系吗？现在你对方程的思想方法有何评价？

[例 10] (1993 年全国高考题)设 $f(x)=4^x-2^{x+1}(x\geqslant 0)$，求 $f^{-1}_{(0)}=$______.

解 根据互为反函数之间的关系，求 $f^{-1}_{(0)}$就是求 $0=4^x-2^{x+1}$中的 x，解这个方程得 $2^{2x}=2^{x+1}$，即 $x=1$，故 $f^{-1}_{(0)}=1$. ∴应填 1.

评述 把求反函数值的问题转化为求指数方程的解，这样做观点高，解法也简便.

[例 11] (1994 年全国高考题)已知 $\sin\theta+\cos\theta=\frac{1}{5}$，$\theta\in(0,\pi)$，则 $\cot\theta$ 的值________.

解 由 $\sin\theta+\cos\theta=\frac{1}{5}$，得 $\sin\theta\cos\theta=-\frac{12}{25}$.

又 $\theta\in(0,\pi)$，$\sin\theta>0$，$\therefore\cos\theta<0$，且 $\sin\theta>|\cos\theta|$.

将 $\sin\theta$、$\cos\theta$ 看作是方程 $t^2-\frac{1}{5}t-\frac{12}{25}=0$ 的两个根，解之，得 $t_1=\frac{4}{5}$，$t_2=-\frac{3}{5}$. $\because\sin\theta>|\cos\theta|$，

$\therefore\sin\theta=\frac{4}{5}$，$\cos\theta=-\frac{3}{5}$，从而 $\cot\theta=-\frac{3}{4}$. ∴应填 $-\frac{3}{4}$.

[例 12] (1994 年全国高考题)设$\{a_n\}$是正数组成的数列，其前 n 项和为 S_n，并且对于所有的自然数 n，a_n 与 2 的等差中项等于 S_n 与 2 的等比中项. (1) 写出数列$\{a_n\}$的前 3 项；(2)求数列$\{a_n\}$的通项公式.

解 (1)$\because a_n>0$,$\therefore \dfrac{a_n+2}{2}=\sqrt{2S_n}$,$(n=1,2,3,\cdots)$

下面利用方程的思想方法求 a_1,a_2,a_3.

当 $n=1$ 时,$\dfrac{a_1+2}{2}=\sqrt{2a_1}$,$\therefore\ a_1=2$.

当 $n=2$ 时,$\dfrac{a_2+2}{2}=\sqrt{2(2+a_2)}$,$\therefore\ a_2=6$.

当 $n=3$ 时,$\dfrac{a_3+2}{2}=\sqrt{2(8+a_3)}$,$\therefore\ a_3=10$.

(2)$\because \dfrac{a_n+2}{2}=\sqrt{2S_n}$,$\therefore S_n=\dfrac{(a_n+2)^2}{8}$,$S_{n-1}=\dfrac{(a_{n-1}+2)^2}{8}$,

当 $n\geqslant2$ 时,$a_n=S_n-S_{n-1}=\dfrac{1}{8}[(a_n+2)^2-(a_{n-1}+2)^2]$.

整理,得 $(a_n+a_{n-1})(a_n-a_{n-1}-4)=0$,

$\because\ a_n>0,a_{n-1}>0.\therefore a_n-a_{n-1}=4$.

故$\{a_n\}$的首项为 2,公差为 4 的等差数列.$\therefore a_n=4n-2$.

评述 用方程的观点解数列的问题就是将问题转化为待定字母的确定,而这些字母的确定则又通过方程的研究来完成,这一基本观点,体现了方程的思想方法.由此可见,一旦掌握了这一思想方法,那么这一类题的求解就不会有什么困难了.

[**例 13**] (1996 年全国高考题)已知$\triangle ABC$ 的三个内角 A、B、C 满足 $A+C=2B$,$\dfrac{1}{\cos A}+\dfrac{1}{\cos C}=\dfrac{-\sqrt{2}}{\cos B}$,求 $\cos\dfrac{A-C}{2}$的值.

解析 根据题意,易知,$B=60°$,$A+C=120°$代入

$\dfrac{1}{\cos A}+\dfrac{1}{\cos C}=\dfrac{-\sqrt{2}}{\cos B}$,用三角变换,得

$$\cos\frac{A-C}{2}=-\sqrt{2}\left(-\frac{1}{2}+2\cos^2\frac{A-C}{2}-1\right).$$

整理成关于 $\cos\dfrac{A-C}{2}$的方程,$4\sqrt{2}\cos^2\dfrac{A-C}{2}+2\cos\dfrac{A-C}{2}-3\sqrt{2}=0$.

从而解方程,得 $\cos\dfrac{A-C}{2}$的值为$\dfrac{\sqrt{2}}{2}$.

你对三角恒等变换的知识掌握得如何?请再复习一次!

[**例 14**] (1995 年全国高考题)在复平面上,一个正方形的四个顶点按照逆时针方向依次为 Z_1、Z_2、Z_3、O(其中 O 是原点).已知 Z_2 对应的复数 $z_2=1+\sqrt{3}i$,求 Z_1 和 Z_3 对应复数.

解析 如图 1-2,设 Z_1、Z_3 对应的复数为 z_1、z_3.由加法的几何意义得 $z_1+z_3=1+\sqrt{3}i$ ①