高等工程數學

(1987年第二版) 上 冊

P. V. 奧尼爾　著
吳嘉祥　劉上聰　譯

曉園出版社
世界图书出版公司

高等工程數學

（1987年第二版）上 冊

P. V. 奥尼爾　　著

吴嘉祥　劉上聰　譯

曉 園 出 版 社

世界图书出版公司

北京·广州·上海·西安

高等工程数学　上册
P.V. 奥尼尔　著
吴嘉祥　刘上聪　译
*
晓园出版社出版
世界图书出版公司北京公司重印
北京朝阳门内大街 137 号
北京中西印刷厂印刷
新华书店北京发行所发行　各地新华书店经售
*
1995 年 5 月第　一　版　　开本：787×1245　1/20
1995 年 5 月第一次印刷　　印张：39
印数：0001－500　　字数：690 千字
ISBN：7－5062－1820－8/O・154
定价：59.00 元（WB9409/1820）

譯　序

數學是研習理、工科的基礎，數學根基的深淺，經常是左右一個人將來在其本行中能否有出色表現的主要關鍵之一。因此，數學為理工科學生的必修科目，國內外皆然，也因此工程數學類的書籍充斥。然而，當O'neil 所著的工程數學一書在國內出現以來，國內的市場幾乎完全為其吞噬，主要的原因是它有下列特點：

1. 說理深入淺出，敘述清晰易懂。
2. 章節發展次序的安排很理想，有助於研習者的理解和吸收。
3. 每章末都作提綱挈領式的總結，使研習者能鳥瞰全局，不致有見樹不見林的結果。
4. 提供為數極多的範例，對數學在各不同領域中的應用作了極詳盡的說明和示範。
5. 習題豐富，而且內容精彩。

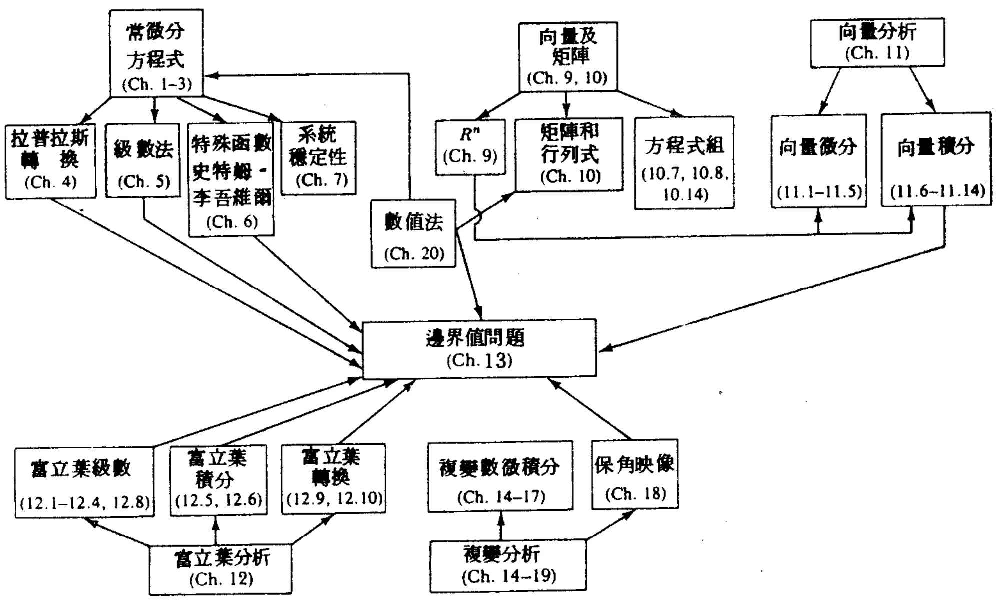
由於目前正處於知識爆炸，並趨於科際整合的時代，使得本書無法不以龐大的篇幅出現，但讀者可依本身的需要，就其內容作彈性的取捨。

譯者曾採用本書前一版當作教本，對其優點深有體會，因此在新版上市之際，儘速將其譯出，希望幫助讀者破除語文的隔閡而有助於對內容的領會。本書之翻譯，除第〇章至第八章由吳嘉祥執筆外，其他部份由劉上聰負責完成。原書頗有些誤植處，譯本已儘可能予以改正，但因時間倉促，全書雖經細校數遍，疏誤恐仍難免。希望讀者若有發現，不吝來信指正，當於再版時訂正之。

1987年8月于台北工專　　　　吳嘉祥・劉上聰　謹識

原　序

本書嘗試處理現代的工程師、物理學者及應用數學家所需要的，屬於微積分後的數學論題。由下列的綱要草圖，可獲得有關本書內涵及各論題間相依關係的概念。全書的基本先決要求爲包含冪級數、函數的級數（或富立葉級數）瑕積分、偏導數及多重積分的標準初等微積分。線和面積分等通常不包含於基本微積分中的論題，從基礎開始介紹。



本書分成六個主要部分，以便使執教者在未教其他部分的情況下，依序教授工程數學之其他部分的方式寫成。在撰寫本書時，試圖遵循下列的準則：

1. 論題及其順序或敍述方式遵照既有的工程數學課程內容及書評者的建議。
2. 每個新介紹的觀念，緊跟隨一個或更多的範例。
3. 每節以涵括自例行計算至極具挑戰性的習題作爲結尾。

4. 包含大量的應用，通常先討論該組問題的背景資料，建立數學模式，再使用數學方法解表示模式的方程式。
5. 在主要章節後面附相關的歷史綱要。

雖然第二版和第一版的型式相同，但也有下列的一些重要的改變：

1. 改寫了許多的習題及部分範例。在仔細地對習題分級方面下了更多的心力，使得開始的少數問題相當簡單而直接，但隨著趨向該組問題結尾，而逐漸增加其複雜性。
2. 已加入了由書評者及使用者建議的方便的特性。例如，在處理一階齊次微分方程式時，經常產生兩種典型的積分，現在為了便於參考，已附加在該節之末。同樣地，在要求學生計算指定的富立葉級數之前，也給予一含正弦和餘弦函數的簡易積分表。
3. 各種不同的轉換表已予擴充。
4. 同樣的，遵照第一版使用者的建議，已經加入了一些新的教材。例如，加入以矩陣法求解本徵值為複數的聯立微分方程式，及不含 n 個線性獨立特徵值之矩陣等問題。後者牽涉了指數矩陣的討論。
5. 為了使說明更明晰或強調主題的某些層面，有些章節已經改寫。
6. 最後，我們已試圖將第一版中出現的錯誤完全清除。

謝 辭

在出版的這一邊而言，我要對 Wadsworth 的 Jim Harrison 及 Bookworks 的 Greg Hubit。加州州立工藝大學的 Tom O'Neil 在新習題及修正錯誤方面下了很多的苦心，而且也就改進方面提供很多建議。伯明罕的阿拉巴馬大學的 Jeanne Hutchison 及 Arther Segal 教授在習題及題解方面也提供了許多珍貴的建議。

第一版的書評者包括：

Mathematics

Stuart Black
California State University
Long Beach

J. Michael Bossert
California State University
Sacramento

Thomas O'Neil
California State Polytechnic
University

Raymond D. Terry
California State Polytechnic
University

Joseph Verdina

Jerald P. Dauer
University of Nebraska

Robert Fennel
Clemson University

Charles N. Friedman
University of Texas

Michael Gregory
University of North Dakota

Euel Kennedy
California State Polytechnic
University

Myren Krom
California State University
Sacramento

Doug Moore
University of California
Santa Barbara

California State University
Long Beach

Michael Williams
Virginia Polytechnic Institute
and State University

Electrical Engineering

Arwin A. Dougal
University of Texas

Charles P. Newman
Carnegie-Mellon University

Mechanical Engineering

Kenneth Krieger
University of New Orleans

J. P. Vanyo
University of California
Santa Barbara

第二版的書評者：

David Ellis
San Francisco State University

Howard Goldlick
University of Hartford

Robert W. Hunt
Humboldt State University

Ramakant G. Khazanie
Humboldt State University

Istvan Kovacs
University of South Alabama

James Powell
Western Michigan University

最後，我要感謝許多針對錯誤作詳細評註，及提出改進的意見而寫信給我的人。這些意見在第二版已做了適當的修訂。

目　錄

第一部分　微分方程式　1

第一部分

微分方程式

第〇章
緒　　論

物理科學和工程學中，有許多問題以各種數學方程式表示，其中包含了代表所求關係之函數的導數。此類方程式稱爲*微分方程式*(differential equation)，而若導數爲單一變數的函數，則稱爲常(ordinary)微分方程式，若爲偏(partial)導數，則稱爲偏微分方程式。

基本上，由於我們和自然界的交互作用，由觀察運動中的物體或系統的方式開始，因而產生了微分方程式。所以，我們觀察並量度改變率或導數；將對一量和另一個量間之關係的推測列成數學式；以實驗測試這些推論，最後導出描述所研究程序的微分方程式。其後的問題爲解這些方程式。下列即有幾個以微分方程式描述自然現象的實例。

範例1　電路

假設我們對流經圖1中之電路的電流有興趣。習慣上，電流 $I(t)$ 視爲時間 t 的函數。設電阻 R，電容 C 和電感 L 均爲常數，而在 t 時刻時電容中的總電荷爲 $Q(t)$。（若電流以安培計，則電阻 R 以歐姆，C 以法拉，L 以亨利，而 Q 以庫侖計。）

實驗告訴我們

跨電阻器兩端的電壓降 $= IR$

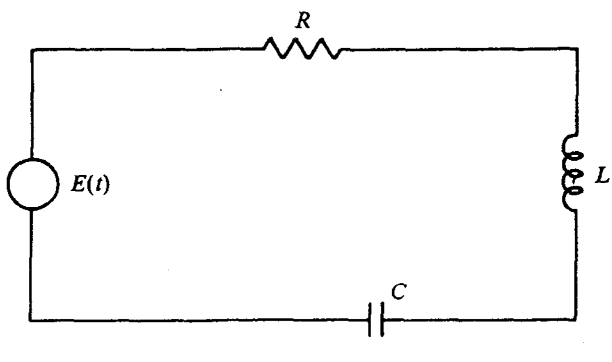


圖1　RLC電路

$$\text{跨電容器兩端的電壓降} = \frac{Q}{C}$$

及

$$\text{跨電感器兩端的電壓降} = L\frac{dI}{dt}.$$

其次，克希何夫（Kirchhoff）的電路第二定律說明了引動電壓等於電路中電壓降之和。因此

$$L\frac{dI}{dt} + RI + \frac{Q}{C} = E(t),$$

爲一包含 I 和 Q 的微分方程式。通常我們已知 E, R, L 和 C 而企求解得 Q。爲了消去 I 以得到僅含 Q 的方程式，令

$$I = \frac{dQ}{dt}.$$

將此式代入微分方程式得

$$L\frac{d^2Q}{dt^2} + R\frac{dQ}{dt} + \frac{1}{C}Q = E,$$

爲僅含 Q 及其導數爲未知數的微分方程式。可以解得 Q，再由 dQ/dt 求得 I。

這是一常微分方程式（不含偏導數），且爲二階（即此方程式中出現之最高階導數的階次）。

範例 2　自由振盪

假設我們將球懸於一彈簧端，將球向下拉，再釋放，則我們能否描述其運動。

爲了分析此類問題，我們必須考慮作用於球上之力。設想彈簧如圖 2 (a)所示，在此未拉伸狀態，其長度爲 L。若將球懸掛於彈簧上，並使系統維持平衡，彈簧將有一伸長量 d，因此，此刻球與天花板相距 $L+d$［圖 2 (b)］。爲了方便，球的垂直位移將自 $L+d$ 處量起［圖 2 (c)］。因此，$L+d$ 處 $y=0$，並選擇 y 向下爲正，向上爲負。在 $L+d$ 處，彈簧處於靜平衡(static equilibrium)

作用於球上的力如下：

1. 地心引力值爲 mg，其中 g 爲重力引起的定值加速度，其值約爲 980 cm/sec^2

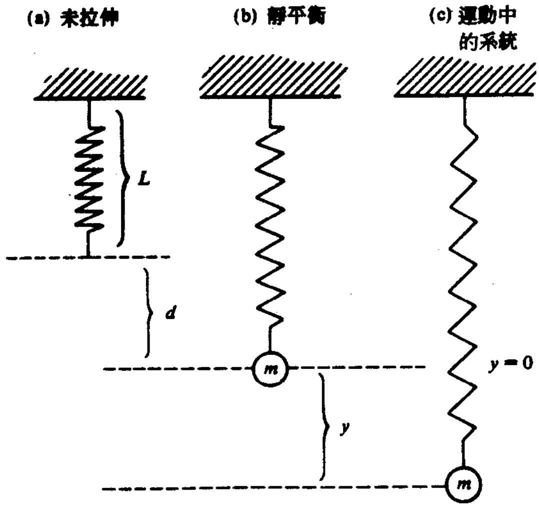


圖 2

或 9.8 m/sec² 。

2. 虎克定律的敘述爲彈簧回復力的大小與其伸長的距離成正比，並經實驗證實。比例常數 k 稱爲彈簧模數(spring modulus)，其值隨彈簧而異。k 值愈大，彈簧愈剛強。

靜平衡時，此力爲 $-kd$（負值表示彈簧有拉球向上的傾向）。若球自平衡位置拉下距離 y，則添加一力 $-ky$ 作用於球上。因此，彈簧作用於球上的總力爲

$$-kd - ky.$$

加上重力和彈簧力，可得總力爲

$$mg - kd - ky.$$

在平衡位置 $y = 0$，而所有的力形成平衡，因此

$$kd = mg.$$

則總力變成 $mg - mg - ky$，或僅爲 $-ky$。

現在要考慮兩種情形：

1. 無阻尼系統　在此我們設想阻尼效應（例如空氣阻力）可以忽略。使用牛頓第二定律（力等於質量乘以加速度），並使 t = 時間，而 d^2y/dt^2 表示加速度，則有

$$m\frac{d^2y}{dt^2} = -ky.$$

因此，y 對時間的行態受下列二階微分方程式控制

$$m\frac{d^2y}{dt^2} + ky = 0.$$

稍後將可看到其解為

$$y(t) = A\cos\left(\sqrt{\frac{k}{m}}\,t\right) + B\sin\left(\sqrt{\frac{k}{m}}\,t\right),$$

其中 A 與 B 為由問題的附加數據（例如球的起始位置和初速度）所決定的常數。因此，在無阻尼狀態下，球呈現週期性的上下運動，通常稱為諧振（harmonic oscillation）。

2. 阻尼系統　若球連接一緩衝筒，如圖 3 所示，則有新的力加入，並傾向於阻滯運動。實驗顯示，阻力和速度 dy/dt 成正比。因此對稱為阻尼常數（damping constant）的常數 c 而言，作用於球上的總力為 $-ky-c(dy/dt)$。由牛頓第二定律所得的方程式將為

$$m\frac{d^2y}{dt^2} = -ky - c\frac{dy}{dt}$$

，或

$$m\frac{d^2y}{dt^2} + c\frac{dy}{dt} + ky = 0.$$

此方程式的解較無阻尼情況的解複雜。視 m，c 和 k 值的相對大小，其所

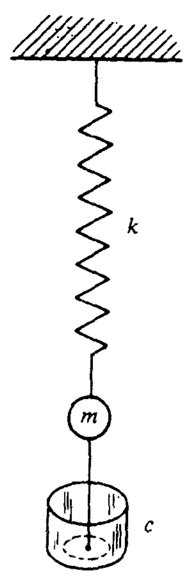


圖 3　阻尼彈簧系統