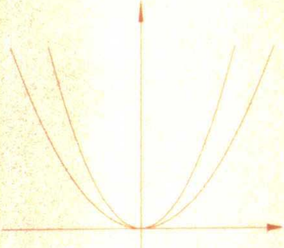
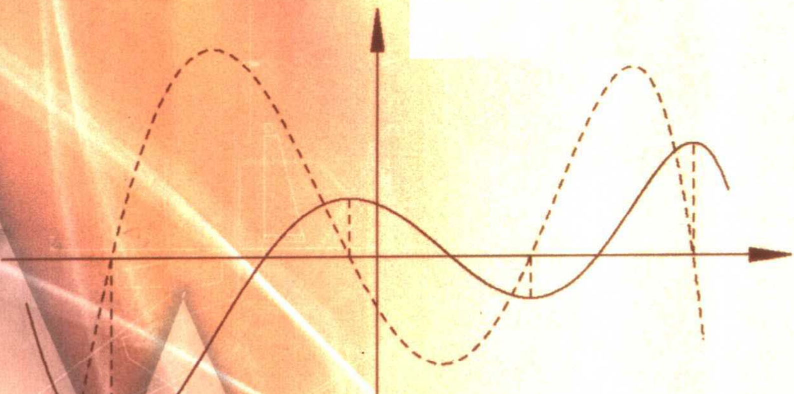
基础数学讲义丛书

基础代数学

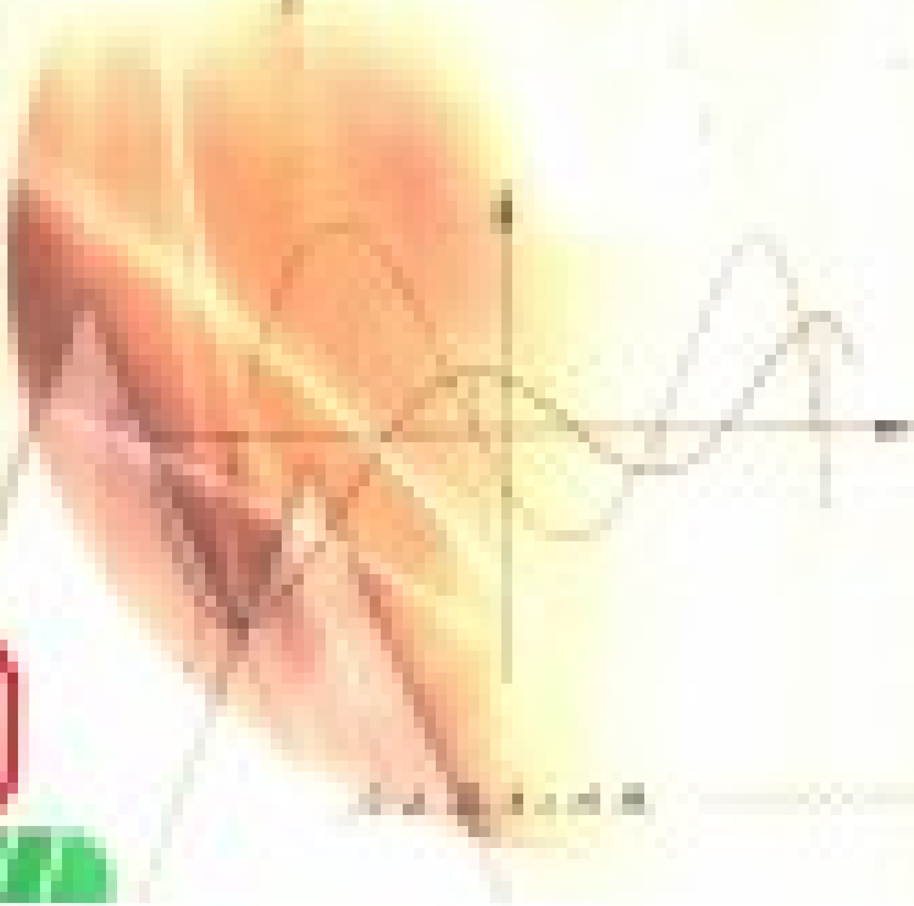


项武义　著



人民教育出版社

基础代数学



基础数学讲义丛书

基础代数学

项武义 著

人民教育出版社
·北京·

图书在版编目（CIP）数据

基础代数学/项武义主编. —北京：人民教育出版社，2004
（基础数学讲义；1）
ISBN 7-107-17679-X

Ⅰ. 基…
Ⅱ. 项…
Ⅲ. 代数课—中学—教学参考资料
Ⅳ. G633.623

中国版本图书馆 CIP 数据核字（2004）第 051403 号

人民教育出版社出版发行
（北京沙滩后街 55 号　邮编：100009）
网址：http://www.pep.com.cn
人民教育出版社印刷厂印装　全国新华书店经销
2004 年 9 月第 1 版　2004 年 9 月第 1 次印刷
开本：890 毫米×1 240 毫米　1/32　印张：7.25
字数：139 千字　印数：0 001～3 000 册
定价：13.10 元

代　序

< 节录：第四届苏步青数学教育奖颁奖会的演讲稿 >

精简实用、平实近人、引人入胜

——论基础数学教育之本质与精要

在即将来临的廿一世纪，科技与智力在总体国力中将居于主导成份．因此，科教乃是兴国必经之途，而基础教育的优良素质则是立国的根本．再者，在中、小学的素质教育中，基础数学教育乃是启发脑力和培训逻辑思维的主要学科．自古以来，它也一直是教导学生善于认识问题、善于解决问题的最佳园地．相传在古希腊雅典柏拉图学院的门前，曾书有“不懂几何学者不得入”的字句．这其实就是当年的教育家们对于数学教育的基本重要性的一种认识，数学是学习和研究科学与技术不可或缺的基本工具．但是数学在科技和工程上的应用还只能说是“小乘应用数学”，而基础数学在教育上的用场才是“大乘应用数学”．在佛学中，“小乘独善其身，大乘普渡众生．”基础数学教育乃是普渡众生，成为善于认识问题、善于解决问题者的不二法门．

显然，上述普渡众生的任务也给基础数学教育提出了高

素质、高效力的要求，而这也就是我们从事数学教育的播种者与耕耘者，所要集思广益、钻研实践，才能克成其功者. 今天我想和各位志同道合的新、老朋友们，从基础数学教育的本质和精要所在，来谈一谈如何把它教得精简实用、平实近人和引人入胜. 我觉得唯有如此，基础数学教育才能真正做到普渡众生，并且大幅度地提升国民的思维素质和创造能力.

现在，让我们从下列几点来讨论上述话题.

I. 基础数学的源起与本质

概括地说，人类文明对于大自然的认知和理解的进化过程是由定性层面向定量层面深化. 例如先定性地认识到我们所在的大地乃是一个大球，然后再进而估计和测量地球的大小. 基础数学的起源就是上述认知定量化的自然产物，而基础数学本身的进程则可以大体简述如下.

(i) 数系的构造与逐步扩充：例如自然数系、整数系和分数系，这乃是算术的范畴.

(ii) 由算术进步到代数的关键在于数系运算律的系统运用，也即以通性求通解.

(iii) 几何学乃是人类对于其所在的空间本质的认知的逐步深化，其演进过程大体如下：
实验几何 ⟶ 定性平面几何 ⟶ 定量平面几何 ⟶ 立体几何 ⟶ 坐标解析几何 ⟶ 向量几何.

(iv) 解析几何乃是代数与几何的自然结合. 由此再产生研讨变量问题的基础理论——微分与积分——则是水到渠

成、顺理成章的更上一层楼.

现在让我们再来看一看上述基础数学的本质是什么. 归根究底, 代数的根本在于数的运算和运算律; 几何的根本在于空间的基本结构和基本性质, 例如连结两点之间的直线段乃是两点之间的唯一最短通路, 这就是空间的基本结构, 而空间对于任给平面的反射对称性则是空间的基本性质; 微分和积分运算则是函数的“变率”和“求和”的解析表述和有效计算, 它们也就是分析变量问题的基础理论. 总之它们的本质都是精简朴实的, 它们的根源都是自然而且富有直观内含的. 其实, 上述简朴、平实、近人的本质也就是为什么基础数学教育, 自古以来一直是锻炼脑力、培养思维能力的“益智游乐园”. 因此, 在基础数学的教育中必须随时随地充分体现它精简实用、平实近人的本质, 才能发挥其启发脑力、培训思维的功效, 真正成为普渡众生的慈航.

II. 精中求简、以简御繁、至精至简

基础数学的范畴, 自然也随着科学文明的蓬勃进展而逐步扩张. 例如在古希腊到了高级学府柏拉图学院才要求的几何学, 在现代已经成为中学数学中, 人人必学的基本学科. 而且年轻的学生们还要同时学习各种各样的其他学科. 学生负担过重的确是现代教育中一个亟待解决的重大问题, 而要减轻学生的负担则必须要简化教学题材 ! 但是如何把基础数学的教材简化呢? 却又是众说纷芸、莫衷一是. 在这方面基本上可以归纳为下述两种不同的方针和想法: 其一是简略的简化法, 其二则是“精中求简”. 前者的思路是探讨如何对

于基础数学的现有题材作适当的加或减来达成简化课程；而后者的思路则是除了简略所有枝节性的题材之外，还要对基础数学的核心部分，在总体结构上探讨精中求简的出路. 我觉得唯有做好精中求简的研究才能真正提高教学质量与效果，也唯有这样，才能使得基础数学易学、好懂、能懂、会用，从而减轻学生的负担.

这里且以定性平面几何和定量平面几何为例，简约地讨论精中求简的一些具体途径.

(1) **定性平面几何**

定性平面几何所要研讨的主题是“全等形”和“平行性”. 在本质上，前者乃是平面对于任给直线的反射对称性的具体反映，而后者则是三角形的内角和恒等于一个平角所表达的“平直性”. 我们可以由 SAS 叠合公理和上述“内角和”这样两个基本性质为起点，引导学生去研讨等腰三角形和平行四边形的各种各样性质. 然后让他们集思广益，共同研讨哪些性质已经构成这两种基本图形的特征性质. 也即让他们自主地、自动地去发现下述两个定性平面几何论证的基本工具.

(A) **等腰三角形的特征性质**（如 [图 1] 所示）:

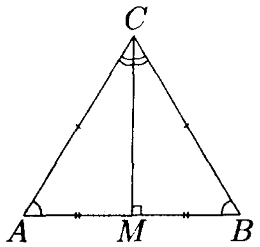
(i) $\overline{CA}=\overline{CB}$（定义）;

(ii) $\angle A=\angle B$；

(iii) $\angle C$ 的分角线 $\overline{CM}$ 垂直底边 $\overline{AB}$；

(iv) 中线 $\overline{CM}$ 垂直底边;

(v) 垂线 $\overline{CM}$ 平分顶角.



[图 1]

(B) **平行四边形的特征性质**（如 [图 2] 所示）:

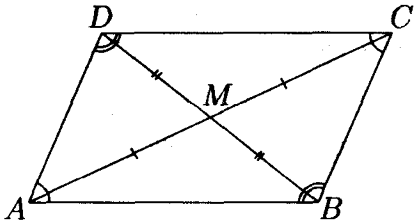
(i) $\overline{AB}//\overline{DC}$ 而且 $\overline{AD}//\overline{BC}$；

(ii) $\overline{AB}=\overline{DC}$ 而且 $\overline{AD}=\overline{BC}$；

(iii) $\angle A=\angle C$ 而且 $\angle B=\angle D$；

(iv) $\overline{AC}$ 和 $\overline{BD}$ 互相平分;

(v) $\overline{AB}//\overline{DC}$ 而且 $\overline{AB}=\overline{DC}$（或 $\overline{AD}//\overline{BC}$ 而且 $\overline{AD}=\overline{BC}$).



[图 2]

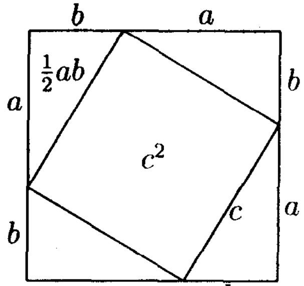
接着引导学生逐步运用上述两个基本工具，一以贯之地论证、解答所有其他平面几何中的定理、例题和习题. 其实，等腰三角形的特征性质之间的转换充分体现了对称性的具体用法，而平行四边形的特征性质之间的转换则充分体现了平行性的作用和表现. 这样的教学途径，不但可以达成定

性平面几何的精中求简，而且也使得学生逐渐学会抓本质，和逐步体会在认知上的“以简御繁”.

(2) **定量平面几何**

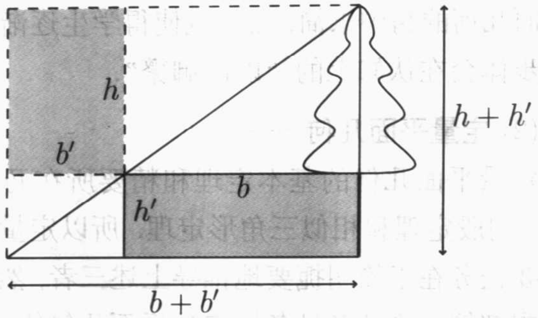
定量平面几何的基本定理和精要所在乃是三角形面积公式、勾股定理和相似三角形定理. 所以定量平面几何教学之首要任务在于简明扼要地推导上述三者，然后引导学生用它们来解答或论证各种各样定量平面几何的问题. 在这里，中国古算中善用面积公式的创见，提供了既简朴又直截了当的途径，其具体做法是以长方形面积等于长乘宽为起点，用熟知的割补法推导出三角形面积等于二分之一底乘高. 然后用 [图 3] 和 [图 4]，以面积计算推导勾股定理和直角三角形的相似比.

勾股定理：$(a+b)^2 = c^2 + 4\cdot\dfrac{1}{2}ab \Rightarrow a^2+b^2=c^2.$



[图 3]

出入相补：$b\cdot h' = h\cdot b' \Rightarrow \dfrac{b}{b'} = \dfrac{h}{h'} \Rightarrow \dfrac{b+b'}{b'} = \dfrac{h+h'}{h'}.$



[图 4]

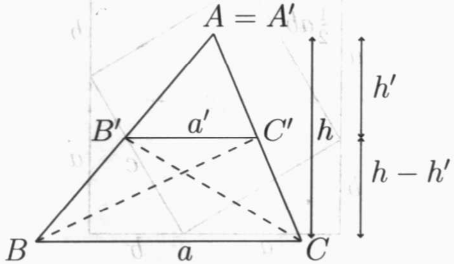
相似三角形定理的面积证法：

[证一] 出入相补所得之比例式

$$\frac{b+b'}{b'}=\frac{h+h'}{h'}$$

其实就是直角三角形的相似形定理. 而一般的三角形均可用其垂线分割成两个直角三角形. 由此可见, 容易结合上述比例式和勾股定理直接推导一般的相似三角形定理.

[证二] 用两种分割法计算 [图 5] 中的梯形面积：



[图 5]

$$S_{\text{梯形}BCC'B'}=\frac{1}{2}ah-\frac{1}{2}a'h',\quad S_{\text{梯形}BCC'B'}=\frac{1}{2}(h-h')(a+a')$$

$$
\begin{aligned}
\Rightarrow \quad & \frac{h}{h'} = \frac{a}{a'} \\
\Rightarrow \quad & \frac{\triangle}{\triangle'} = \frac{\frac{1}{2}ah}{\frac{1}{2}a'h'} = \left(\frac{a}{a'}\right)\left(\frac{h}{h'}\right) = \left(\frac{a}{a'}\right)^2 \\
\Rightarrow \quad & \left(\frac{a}{a'}\right)^2 = \left(\frac{b}{b'}\right)^2 = \left(\frac{c}{c'}\right)^2 = \frac{\triangle}{\triangle'} \\
\Rightarrow \quad & \frac{a}{a'} = \frac{b}{b'} = \frac{c}{c'}.
\end{aligned}
$$

[证三] 如 [图 5] 所示,

$$
\begin{aligned}
\triangle BB'C' &= \triangle CB'C' \quad \text{（同底同高）} \\
\Rightarrow \quad \triangle ABC' &= \triangle AB'C \\
\Rightarrow \quad \frac{\triangle ABC'}{\triangle ABC} &= \frac{\triangle AB'C}{\triangle ABC} \Rightarrow \frac{b'}{b} = \frac{c'}{c}.
\end{aligned}
$$

以上只是基础数学中精中求简的两个实例. 其实, 基础数学教育在各方面精中求简乃是一个大有可为, 值得全面探讨的课题. 而这方面的探讨成果, 将是一方面大幅提升教学效益而另一方面还可以真正减轻学生负担的改革途径. 当然, 这还得要有教材的妥善编写, 教学方法的全面改进和教育制度能彻底从"应试教育"中解脱出来等的配合.

总之, 我们要集思广益, 共同努力, 在基础数学的各个环节、各种方面都下功夫. 精益求精, 务必使得基础数学中的精要所在都以至简形式展示在学生面前. 这种至精以至简形式展现的"精简合一", 当然就是基础数学能够用来以简御繁的基本道理. 其实, 这也就是基础数学真正引人入胜的地方.

基础数学的“至精至简”可以大体上用下述四套运算律来加以总结，即：

1. 集合运算的运算律乃是逻辑思维的至精至简（也即布尔代数）.

2. 数系运算的运算律乃是代数学的至精至简.

3. 向量运算的运算律乃是几何学的至精至简.

4. 微分积分的运算律乃是分析学（也即变量数学）的至精至简.

学习基础数学就是要学会有效地、有系统地运用上述四套运算律去解决和认知大自然中的各种各样问题，这也就是以简御繁的具体实践！它们是人类理性文明中的“大巧若拙”，是人人能懂、到处有用的大道理. 若能把基础数学教得精到简朴、能懂好用和平实近人，则引人入胜的基础数学是可望可及的.

III. 返璞归真、平实近人、循循善诱、引人入胜

基础数学的本质和基本思想都是平实朴素的，而它们的逐步深入和有系统的运用，则又可以用来探索自然、以简御繁、妙用无穷. 但是要把基础数学的教学真正做到平实近人、引人入胜，当然还是很有考究的，而其中好多精微细致之处，则着实是耐人寻味、值得推敲. 我觉得教者和教材必须要对基础数学的本质和基本思想下一番深切的返璞归真的功夫，才能把它教得平实近人. 再者，在题材组织和教学方式上，要尽可能善导善诱，让学生逐步渐进地体会精简的

妙用．要把基础数学不但教得能懂，而且懂了还能广泛有用，唯有如此才能引人入胜．

让我们且以代数学上的几个实例，来对上述想法作简要的解说．

(1) **解代数方程原理和代数的起源**

从表面的形式来看，初中代数和小学算术的差别在于代数中引进不定元和多项式运算，然后用它们来解代数方程式、求公式等等．假如我们对由算术到代数的进化，下一番返璞归真的功夫去细致推敲，就会发现上述进化历程中真正的突破点在于下述简朴的基本思想：

数系的加、乘和指数运算满足一系列普遍成立的运算律．

例如，加和乘的交换律、结合律；乘对于加的分配律和指数定则．骤看起来，像分配律

$$m \cdot a + n \cdot a = (m + n) \cdot a$$

所表达的是 m 个 a 之和加上 n 个 a 之和即为 $(m+n)$ 个 a 之和．像这种本质十分明显的事实，虽然是普遍成立，但是它们会有什么用场呢？其实，整个代数学所发展的就是有系统、有效力地运用这一系列简朴、普遍成立的数系运算律，去解决各种各样的代数问题．此事的具体做法的首次成功就是把运算律用于解代数方程式．而这个用法的基本思想就是下述解代数方程原理．

在各种各样的代数问题之中，最为简朴的类型是某些待解的"未知量"和某些已经给定的"已知量"之间具有某些

特定的代数关系. 把这些特定的代数关系简明扼要地列述出来，就是一组含有“未知数”符号的代数方程式. 所以代数学中最为简朴基本的问题就是如何由一组代数方程式，去确定其中所含的“未知数”所应取之值，这也就是求解代数方程. 解代数方程的基本原理究竟是什么呢？这也就是每一位开始学习代数的学生理当掌握的. 它的基本想法是：那些运算律是对任何数都普遍成立，所以它们对“未知数”也当然成立、可用. 归根究底，解代数方程的基本原理就是有系统地运用运算律把所给的代数方程简化，从而确定其中所含的“未知数”所应取之值，也即有意识、有系统地达成化未知为已知的目的. 解代数方程的原理就是上述极为简朴的思想，而它在解决代数问题上又是那么简明有力、妙用无穷. 当然，在教学上，我们还要循循善诱地由简入深，顺理成章地由二、三元一次方程组，一元二次方程等入门，然后再逐步引导出多项式运算和多项式函数的基本性质和定理.

例如鸡兔同笼问题是一个大家原来已学过的问题，我们可以对它作一次温故知新，解说上述原理的用法. 鸡数和兔数是待解的未知数，可以用未知数符号 x, y 分别表示之；而头数和足数则是已知量，设其分别是 36 和 108，则它们之间的代数关系就可以用下述代数式简明扼要地表达之，即

$$\begin{cases} x+y = 36, & ① \\ 2x+4y = 108. & ② \end{cases}$$

由①可得 $y=36-x$，代入②，即得

$$2x+4\cdot(36-x)=108. \qquad (*)$$

若以算术中一成不改按部就班地先算小括号再算中括号的办法就无法再简化 (*) 式了，因为小括号中含有未知数！但是只要用上述解代数方程原理，就可以把 (*) 式用分配律逐步简化如下：

$$\begin{aligned}
\Rightarrow\quad 2x+4\times 36-4x &= 108\\
\Rightarrow\quad 4\times 36-2x &= 108\\
\Rightarrow\quad 4\times 36-108 &= 2x\\
\Rightarrow\quad x=(4\times 36-108)\div 2&=18.
\end{aligned}$$

由此可见，分配律的运用就足以解决算术中括号内含有未知量的困扰，在代数中我们用分配律有系统地简化含有未知量的括式．我们还可以用下述形象的说法来描述这个看来简朴无华而实质上影响深远的进步，即：

在算术中基本上不用分配律，乃是数学的石器时代；
及至代数，则有系统地运用分配律去简化各种各样
代数式和代数关系，这就进步到数学的铜器时代了！

(2) **归纳法和代数公式、代数定理的发现和证明**

代数学和几何学有一个本质上的差异．几何学所研讨的空间是我们生活的所在，我们对于它的种种形象和基本性质，与生俱来地有丰富的感性认识和相当可靠的直观，所以好多几何学上的基本定理如矩形面积公式，相似三角形定理等等是可以直观地看到、想象到它们应该是对的．但是代数学所研讨的是数系的结构和各种公式，它们在本质上是逐步归纳、复合所构造而得者，它们的直观性比之于几何就相去甚远了．长话短说，代数学中的公式和定理绝大部分都是

用归纳法由低次到高次，由一元，二元到多元逐步归纳而发现，然后再用归纳论证去确立其正确性. 因此，归纳乃是整个代数学的基本大法和基本功. 但是这里要特别强调，归纳法的内含是归纳地去探索、发现，然后归纳地定义（例如 n 阶行列式用 $(n-1)$ 阶行列式加以定义），然后再归纳地论证. 唯有这样才是完整的归纳法教学，才真正能做好代数学中公式和定理的返璞归真，也唯有这样归根究底，才能把代数学教得平实近人. 像目下把所要证的公式定理看成书本的宣示，然后加以归纳论证，乃是只教后半段的不完整的归纳法教学，是亟待补正的！

(3) **插值法、待定系数法**

插值法 (interpolation) 和 **待定系数法** (method of undetermined coefficients) 是初等代数学的要点和局部制高点，而因式分解则是可以大幅度地加以简略. 从初等代数的教学题材的总体分析，我觉得在传统教学中占用大量篇幅的因式分解是可以而且应该大幅度的简略. 其实，除了极为简朴的公式如

$$(x^n - a^n) = (x-a)(x^{n-1} + x^{n-2}a + \ldots + xa^{n-2} + a^{n-1})$$

和二项式定理之外，绝大部分其他因式分解的公式并无真正的用场. 而且大量的因式分解的例、习题也并不能让学生增加代数上的体会和修养. 而另一方面，插值法和待定系数法则是充分体现代数学基本精神，而且是非常有用、有力的基本功. 但是一般初等代数，甚至于高中代数的教学中，却往往忽略未教，或者只是轻轻带过、未加深入. 这种轻重倒置