丛书主编 错 桢

高二 数学（下）

试验修订本

龙门图解

学科主编 傅荣强
本册主编 傅荣强

开创
教辅读图时代

龍門書局

责任编辑 王风雷 夏少宁　　封面设计 企鹅美编室

亲爱的读者：

感谢您选择《龙门图解》!

这套用图解形式编写的教辅书是我们的新尝试，一年来虽殚精竭虑，但因水平和能力所限，我们感到这套书仍有许多不尽如人意之处。我们深信，广大读者一定能为我们提供无穷的智慧和无尽的素材。在此，我们真诚地希望您能写信告诉我们：您对《龙门图解》有什么意见和建议；您有什么用图解形式学习的好方法、金点子；您还希望看到哪些领域的图解类书籍……您的这些宝贵意见将用于《龙门图解》的修订和品牌的延伸。相信在广大读者的支持下，《龙门图解》一定能茁壮成长。

来信请寄：

北京东黄城根北街16号龙门书局《龙门图解》编委会收。邮编 100717

愿《龙门图解》成为您的、我的、大家的好朋友！

龙门书局

开创教辅读图时代

ISBN 7-80160-699-X

9 787801 606990 >

ISBN 7-80160-699-X

定价：12.00元

修订本

龙门图解

高二数学（下）

学科主编　傅荣强

本册主编　傅荣强

编　　写　常　青　任政忠　朱　岩

　　　　　孙吉利　胡善君

龍門書局

北京

图书在版编目(CIP)数据

龙门图解.高二数学：试验修订本.下／锴桢主编；傅荣强分册主编；常青、任政忠，朱岩编著．北京：科学出版社：龙门书局，2003

ISBN 7 80160 699 X

Ⅰ.龙… Ⅱ.①锴…②傅…③常…④任…⑤朱… Ⅲ.数学课 高中 教学参考资料 Ⅳ.G634

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2002)第 080258 号

责任编辑：王风雷 夏少宁　　封面设计：企鹅美编室

龙门图解

高二数学试验修订本(下)

出　　版：	龍門書局
地　　址：	北京东黄城根北街 16 号
邮政编码：	100717
网　　址：	http://www.sciencep.com
印　　刷：	中国科学院印刷厂
发　　行：	科学出版社总发行　　各地书店经销
版　　次：	2003 年 1 月第一版
印　　次：	2003 年 1 月第一次印刷
开　　本：	890 × 1240　A5
印　　张：	8 3/4
字　　数：	200 000
印　　数：	1－30 000
定　　价：	**12.00 元**

(如有印装质量问题，我社负责调换)

目录

第九章 直线、平面、简单几何体

图引

在初中，我们学习过三角形、四边形、圆，等等，我们了解了它们的性质、用途等等. 但是平面图形知识的应用是有一定局限性的. 因为我们生存的这个世界是个三维的立体世界. 你看城市交通中的重要设施——立交桥（见图1）. 你能说出这三条高架桥的几何关系吗？

图1

如果连关系都说不清，那怎么设计和建造它们啊！太难了，那好，我们从最简单的小问题说起：

在图2所示的螺丝帽中，直线 AB 和 CD 有怎样的关系？

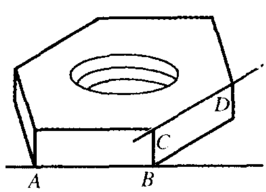


图2

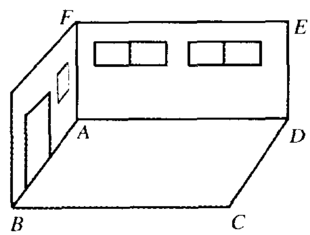


图3

再来看一个不大不小的问题. 图3是一个房间的示意图，可以说这样的图形和我们每一个人都息息相关. 那你知道地面与墙面的交线 AB 和墙面 $ADEF$ 的关系如何，地面 $ABCD$ 与墙面 $ADEF$ 的关系又如何吗？这些关系如果弄错了，我们建的房子就不美观、不牢固、不实用.

最后，我们欣赏一下我们的祖先留给我们的宝贵遗产，中华民族的伟大建筑，举世闻名的万里长城，见图 4.

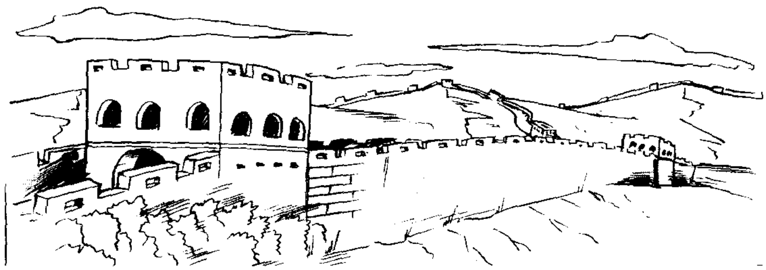


图 4

像万里长城这样规模宏大的建筑，由各种各样的几何体组成，它是怎样建成的呢？

小小的螺丝帽问题，不大不小的房间问题，堪称世界之最的万里长城问题，都超脱了平面图形的范围．研究它们，迫切需要我们学习和掌握一些新知识，即：

立体几何——研究空间图形的位置关系和数量关系的科学．

本章将在初中平面几何知识的基础上，研究四个代表类的六大类关系，最终实现一个观念的升华：

四个代表类——点，线，面，体；

六大类关系——平行，垂直，成角，距离，面积，体积；

一个观念的升华——从平面观念到空间观念，即二维观念到三维观念的升华．

目录

9.1 平面

图例

基础知识例解

本节是立体几何的开篇课，从此拉开了平面观念向空间观念转轨的帷幕，这是思想的飞跃，观念的升华.

借此机会，和读者们唠叨几句，供参考.

在初中几何里，我们已经研究过一些几何图形，如，线段、三角形、圆等，我们还认识到了几何图形可以看作点的集合.

人类社会从产生到发展时至今日对宇宙奥秘在不断探索，如果对几何图形的研究，仅仅局限于平面图形，那实在是相差得太远太远了. 暂且不论"神州 3 号"上天，就是简单的土木建筑、机械设计等实际问题，单单依靠平面图形去解释其中的几何内涵，恐怕也不行. 所有这些，迫切要求我们学习一些全新的文化知识——立体几何.

本章为"直线、平面、简单几何体"，它是立体几何的核心部分. 在这一章里，我们将向读者们介绍以下问题：

一、空间直线和平面

在空间直线和平面的研究中，借助集合的有关知识，把点视为元素，把直线、平面看作集合，着重讨论直线与直线、直线与平面、平面与平面的"平行，垂直，成角，距离"等四大问题.

二、简单几何体

在简单几何体的讨论中，还是从集合的观点出发，将几何体认为是空间的点集，首先深化"空间直线和平面"理论，使其在几何体中得到应用；其次建立简单几何体的侧(表)面积和体积理论. 这样，简单几何体就获得了可以"度量"的内涵.

综上可知，本章研究的主要对象可概述为四个字——点、线、面、体；主要任务可归纳为六类问题——平行、垂直、成角、距离、面积、体积；这六类问题从数和形两个侧面揭示了立体几何的本质，那就是"立

体几何是研究空间图形的数量关系和位置关系的学科”.

最后我们指出，立体几何研究过程中所采用的方法是公理法，其体系是

$$\text{公理化体系}\begin{cases}\text{延续平面几何学说；}\\\text{原始概念；}\\\text{定义；}\\\text{公理；}\\\text{定理.}\end{cases}$$

同时提醒读者们注意：平面图形是空间图形的一部分，因此，在空间图形的研讨中，只要我们所讨论的对象在同一个平面内，无论平面在空间的位置如何，平面几何的一切定义、公理、定理、公式均可延用，莫去厚非！

例题 1

1. 图 9-1-1 所示的图形中，画法正确的是 (　　)

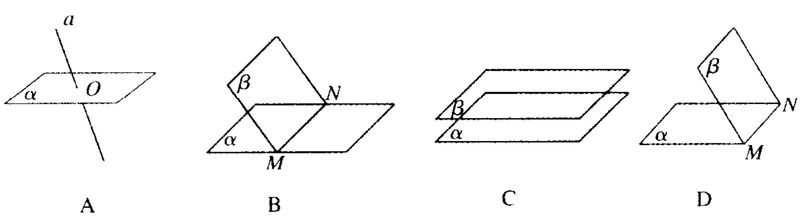


图 9-1-1

2. 一个平面将空间分成＿＿＿部分，两个平面将空间分成＿＿＿部分，三个平面将空间分成＿＿＿部分.

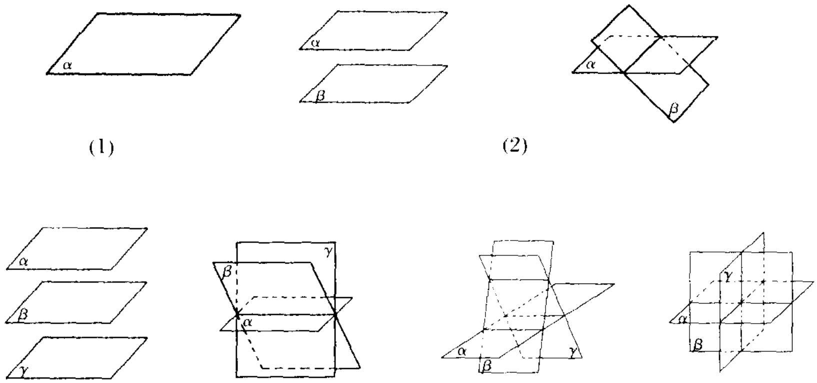
自助解题

1. 在空间图形的画法中，当一个平面的一部分被另一个平面遮住时，应把被遮部分的线段画成虚线或不画，所以画法正确的是 A.

2. 本题对平面在空间的位置分类讨论.

　　一个平面将空间分成两部分，如图 9-1-2(1)；两个平面相交时将空间分成 4 部分，两个平面不相交时将空间分成 3 部分. 所以，两个平面将空间分成 3 或 4 部分，如图 9-1-2 (2)；

　　三个平面不相交时将空间分成 4 部分. 三个平面相交时分别将空间分成 6，7，8 部分，详见图 9-1-2(3).



(1)　　　　(2)

(3)

图 9-1-2

水平放置的平面图形的直观图的画法规则

下面介绍一下如何画水平放置的平面图形的直观图. 这在课本中学习棱柱时才能学到，所以初学立体几何的同学画几何体图形的直观图往往很难把握，为此，我们先讲一下画法规则——斜二测画法.

斜二测画法规则：

(1) 在已知图形中取互相垂直的 x 轴和 y 轴，两轴交于点 O. 画直观图时，把它们画成对应的 x'轴和 y'轴，两轴交于点 O'，使 $\angle x'O'y'=45°$ (或 135°). 它们确定的平面表示水平平面.

(2) 已知图形中平行于 x 轴或 y 轴的线段，在直观图中分别画成平行于 x' 轴或 y'轴的线段.

(3) 已知图形中平行于 x 轴的线段，在直观图中保持原长度不变；平行于 y 轴的线段，长度为原来的一半.

在了解斜二测画法后，结合平面的画法，对水平平面内的图形就可以画得比较真实准确了. 画几何体图形时，可参照例题 5 所讲的实物与直观图的对比，以正方体为基本模型进行作图.

即学即练

1. (1) 选择一个适当的角度，画两个平面 α 与 β，使得 α 是水平平面，表示 α 的平行四边形横边长为 2.4 cm，且 α 与 β 相互被遮住一部分. 要求“被遮部分”画成“虚线”.

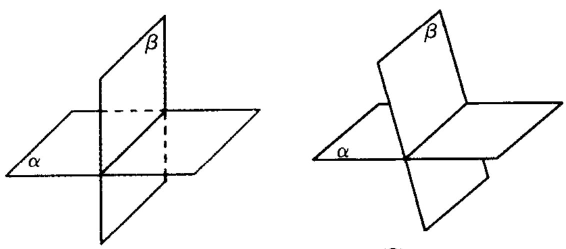
   (2) 画两个平面 α 与 β，使得 α 是水平平面，且 α 与 β 相互被遮住一部分. 要求“被遮部分”不画线.

2. 画出水平放置的边长为 3cm 的正三角形、正方形、正六边形.

答案 1. 空间图形中的“实线”、“虚线”没有先后顺序之分. 看得见的线画成实线；看不见的线画成虚线，这是画空间图形的规矩.

(1)如图 9–1–3(1)，由已知，α 是水平平面，表示 α 的平行四边形横边长为 2.4cm.按水平放置的平面的画法规则，表示 α 的平行四边形的“邻边”长为 1.2cm，“锐角”为 45°；α 与 β 相互被遮住的部分画成虚线.成图见图 9–1–3(1).

(2)见图 9–1–3(2).



(1) (2)

图 9–1–3

2.本题中，我们采用“斜二测画法”去画水平放置的正三角形、正方形、正六边形的直观图.先画正三角形的直观图.如图 9–1–4(1)，$\triangle ABC$ 是边长为 3cm 的正三角形.如图 9–1–4(2)，取 BC 边所在的直线为 x 轴，BC 边的 垂直平分线为 y 轴，这时 A 点落在 y 轴上，且 $|OA|=\frac{3\sqrt{3}}{2}$ cm.如图 9–1–4(3)，画出与图 9–1–4(2)中 x 轴、y 轴对应的 x_1 轴、y_1 轴. 使 $\angle x_1O_1y_1=45°$. 在 x_1 轴上、y_1 轴的左右两侧分别取点 B_1、C_1，使 $|B_1O_1|=|O_1C_1|=\frac{3}{2}$ cm；在 y_1 轴上、x_1 轴的上方

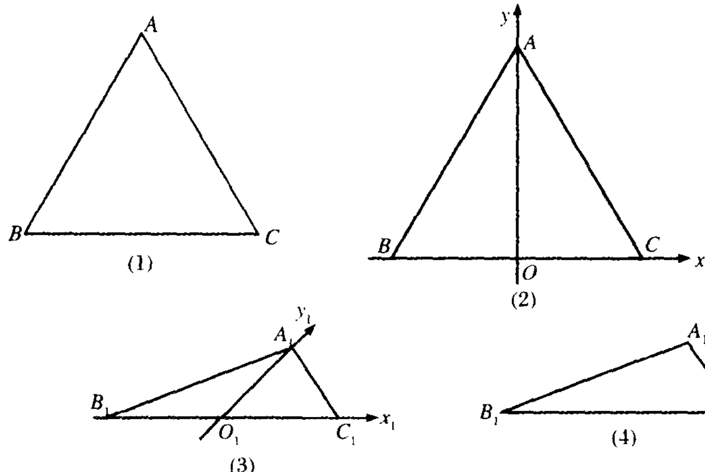


图 9-1-4

取点 A_1，使 $|O_1A_1|=\frac{3\sqrt{3}}{4}$cm．连结 A_1B_1、A_1C_1，$\triangle A_1B_1C_1$ 就是水平放置的边长为 3cm 的正三角形的直观图.擦去辅助线，成图见图 9-1-4(4). 用同样的方法，可以得到水平放置的边长为 3cm 的正方形、正六边形的直观图，成图见图 9-1-5(1)、(2).

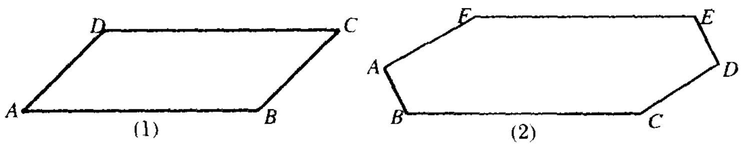


图 9-1-5

例题 2

如图 9-1-6 (对该几何体暂不命名)，用符号语言的形式表示：

(1) 点 E 与直线 BF 的关系，点 E 与直线 AF 的关系；

(2) 点 F 与平面 ABC 的关系，点 F 与平面 ACD 的关系；

(3) 直线 AE 是否在平面 ABD、平面 ABF 内?

(4) 直线 AF 与直线 CD 相交于点 F；

(5) 平面 ABF 与平面 BCD 有公共的直线 BF.

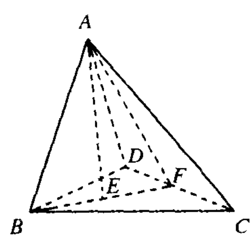


图 9-1-6

自助解题

常用的数学语言有三种形式——文字语言；符号语言；图形语言.

借用集合中的符号表示立体几何中的点、直线、平面的位置关系，主要是指下面的符号：

$$\in;\ \notin、\subset、\not\subset;\ \cap.$$

(1) 点 $E\in$直线 BF；点 $E\notin$直线 AF；

(2) 点 $F\notin$平面 ABC；点 $F\in$平面 ACD；

(3) 直线 $AE\not\subset$平面 ABD；直线 $AE\subset$平面 ABF；

(4) 直线 $AF\cap$直线 $CD=$点 F；

(5) 平面 $ABF\cap$平面 $BCD=$直线 BF.

即学即练

在图 9–1–7 所示的正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中，用符号语言的形式表示：

(1) 点 O 与直线 AC 的关系，点 A 与直线 A_1C 的关系；

(2) 点 O 与平面 A_1BD 的关系，点 B 与平面 A_1AC 的关系；

(3) 直线 AB 是否在平面 A_1BD 内？直线 A_1C 是否在平面 A_1AC 内？

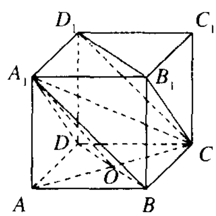


图 9–1–7

(4) 直线 BC 与直线 A_1C 相交于点 C，直线 AC 与直线 BD 相交于点 O；

(5) 平面 A_1AC 与平面 A_1BD 有公共的直线 A_1O.

答案 (1) 点 $O\in$直线 AC，点 $A\notin$直线 A_1C；

(2) 点 $O\in$平面 A_1BD，点 $B\notin$平面 A_1AC；

(3) 直线 $AB\not\subset$平面 A_1BD，直线 $A_1C\subset$平面 A_1AC；

(4) 直线 $BC\cap$直线 $A_1C=$点 C，直线 $AC\cap$直线 $BD=$点 O；

(5) 平面 $A_1AC\cap$平面 $A_1BD=$直线 A_1O.

例题 3

如图 9–1–8，定义四个顶点不共面的四边形叫做空间四边形. 已知 E、F、G、H 依次是空间四边形 $ABCD$ 的边 AB、BC、CD、DA 上的点，且线段 EH 的延长线与线段 FG 的延

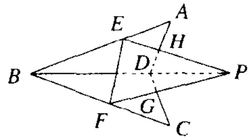


图 9–1–8

长线交于点 P. 求证：点 P 在直线 BD 上.

自助解题

$\because B\in$平面 ABD，$D\in$平面 ABD，

$\therefore$ 直线 $BD\subset$平面 ABD.

同理可证，直线 $BD\subset$平面 CBD.

$\therefore$ 平面 $ABD\cap$ 平面 $CBD=$直线 BD.　　①

又 $\because$ 线段 EH 的延长线与线段 FG 的延长线交于点 P，

$\therefore P\in$直线 EH.

而直线 $EH\subset$平面 ABD，

$\therefore P\in$平面 ABD.

同理可证，$P\in$平面 CBD.

$\therefore P\in$平面 $ABD\cap$ 平面 CBD.　　②

由①和②，知

$P\in$直线 BD，即点 P 在直线 BD 上.

金点子

证明点 P 在直线 l 上，方法比较多，本例采用的方法可概述如下：

$$\left.\begin{array}{l}P\in\alpha\\P\in\beta\end{array}\right\}\Rightarrow P\in\alpha\cap\beta;\qquad(\mathrm{I})$$

$$\alpha\cap\beta=l.\qquad(\mathrm{II})$$

$$\left.\begin{array}{l}(\mathrm{I})\\(\mathrm{II})\end{array}\right\}\Rightarrow P\in l.$$

在立体几何中，下面的说法同义：

A、B、C 三点共线；点 C 在直线 AB 上；直线 AB 通过(或经过)点 C.

即学即练

1. 如图 9-1-9，已知$\triangle ABC$ 的三个顶点 A、B、C 都不在平面 α 内，直线 $AB\cap$ 平面 $\alpha=$点 P，直线 $AC\cap$ 平面 $\alpha=$点 Q，直线 $BC\cap$ 平面 $\alpha=$点 R.
   求证：P、Q、R 三点共线.

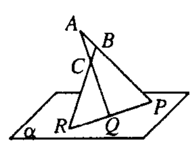


图 9-1-9

2. 在图 9-1-10(1)所示的几何体中，$AB/\!/A_1B_1$，$AB<A_1B_1$；$AC/\!/A_1C_1$，$AC<A_1C_1$；$BC/\!/B_1C_1$，$BC<B_1C_1$.
   求证：直线 A_1A、B_1B、C_1C 相交于同一点.

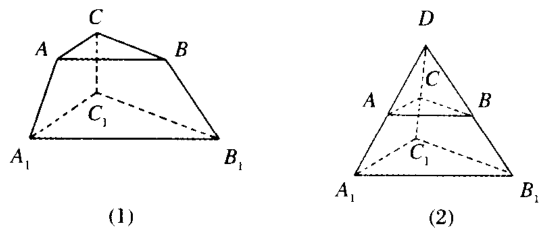


图 9-1-10

答案 1. 如图 9-1-9，A、B、C 是 $\triangle ABC$ 的三个顶点，A、B、C 不共线，它们可以确定平面 ABC.

$\because$ 直线 $AB \cap$ 平面 α=点 P，

直线 $AB \subset$ 平面 ABC，

$\therefore$ 点 $P \in$ 平面 $ABC \cap$ 平面 α.　　①

同理可证

点 $Q \in$ 平面 $ABC \cap$ 平面 α，　　②

点 $R \in$ 平面 $ABC \cap$ 平面 α.　　③

由①、②、③知，P、Q、R 三点共线.

2. 如图 9-1-10(2).

$\because AB /\!/ A_1B_1$，$AB < A_1B_1$，

$\therefore$ 直线 A_1A、B_1B 在同一个平面内，并且它们相交；记它们相交于点 D，即

直线 $A_1A \cap$ 直线 B_1B=点 D.　　①

又 $\because A_1A \subset$ 平面 AA_1C_1C($AC /\!/ A_1C_1$，AC 与 A_1C_1 可以确定平面)，

$\therefore D \in$ 平面 AA_1C_1C.

同理 $D \in$ 平面 BB_1C_1C.

$\therefore D \in$ 平面 $AA_1C_1C \cap$ 平面 BB_1C_1C=直线 C_1C，

即 $D \in$ 直线 C_1C.　　②

由①和②，知

A_1A、B_1B、C_1C 三线共点，即直线 A_1A、B_1B、C_1C 相交于同一点.

例题 4

已知一条直线和三条平行直线都相交，求证：四条直线在同一个平面内.

自助解题

解答“文字语言题”要写“已知，求证”.

已知(如图 9-1-11)直线 $a /\!/ b /\!/ c$，直线 $l\cap a=A$，$l\cap b=B$，$l\cap c=C$. 求证：a、b、c、l 共面.

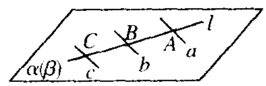


图 9-1-11

证明：$\because a /\!/ b$，

$\therefore a$、b 可以确定一个平面 α.

又 $\because l\cap a=A$，$l\cap b=B$，

$\therefore A\in a$，$B\in b$，

$A\in\alpha$，$B\in\alpha$，

$AB\subset\alpha$；

并且，$A\in l$，$B\in l$.

$\therefore l\subset\alpha$.

这一段论述，主要是为了证得 $l\subset\alpha$.

另一方面，$\because b /\!/ c$，

$\therefore b$、c 可以确定一个平面 β.

同理可证得 $l\subset\beta$.

$\because$ 平面 α、β 均经过直线 b、l，且 b 和 l 是两条相交直线，它们确定的平面是惟一的，

$\therefore$ 平面 α 与 β 是重合的(或者说成是同一个平面)，

$\therefore a$、b、c、l 共面.

金点子

线的共面问题，绝大多数情况下以三线共面为基本型，由此派生出“四线共面，多线共面”等问题. 证法大体上分为两类：

① 先由两条直线确定一个平面，再证其他直线在这个平面内；

② 先确定两个平面，再证两个平面重合.