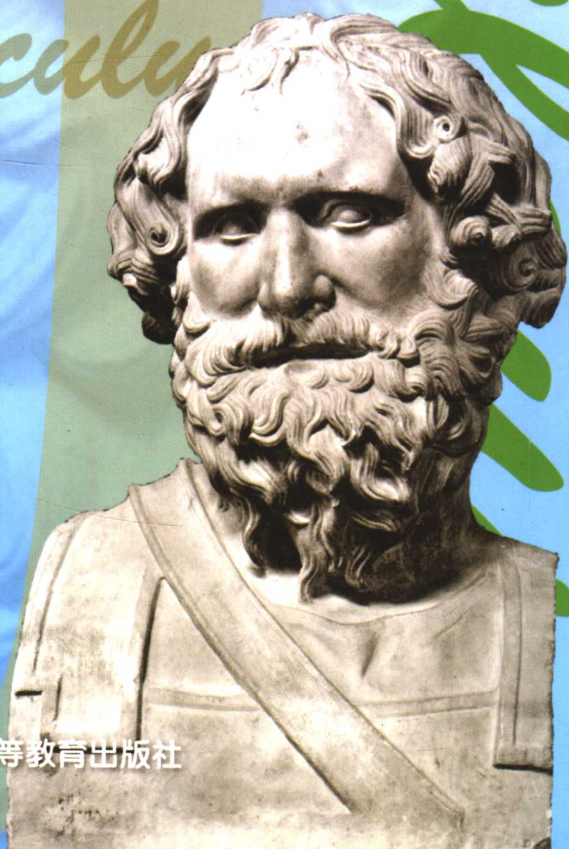
普通高中新课程数学教学研究与资源丛书

微积分

严士健 主编
齐植兰 李心灿 编著



ARCHIMEDES

高等教育出版社

普通高中新课程数学教学研究与资源丛书

微 积 分

严士健　主编

齐植兰　李心灿　编著

高等教育出版社

内容提要

本书是配合高中新的“数学课程标准”的实施而编写的，侧重于为实施新课程的教师提供与课程标准的理念、处理方式相匹配的数学教学资源，进而向教师提供专业知识、方法的补充资源，目的是帮助教师掌握课程标准中的相关内容，更好地理解和处理新课程的讲授。

本书分标准要求、知识结构，典型案例、教学建议、教学资源搜索等栏目，内容包括：导数——函数的变化率、极限概念——再论导数、导数的应用、积分、微积分主要内容的发展简史、著名数学家选讲等。

本书既可作为教师的培训用书，也可作为教师日常教学的参考书，希望还能成为教师自我开发教学资源，提高自己的数学专业水平的参考书。

图书在版编目(CIP)数据

微积分/齐植兰，李心灿编著. —北京：高等教育出版社，2005.9
(普通高中新课程数学教学研究与资源丛书/严士健主编)
ISBN 7-04-017634-3

Ⅰ.微... Ⅱ.①齐...②李... Ⅲ.高等数学课-高中-教学参考资料 Ⅳ.G633.603

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2005)第 093096 号

策划编辑 张忠月 **责任编辑** 舒敬江 **封面设计** 张申申 **责任绘图** 尹 莉
版式设计 王艳红 **责任校对** 杨雪莲 **责任印制** 孔 源

出版发行	高等教育出版社	**购书热线**	010-58581118
社　　址	北京市西城区德外大街4号	**免费咨询**	800-810-0598
邮政编码	100011	**网　　址**	http://www.hep.edu.cn
总　　机	010-58581000		http://www.hep.com.cn
		网上订购	http://www.landraco.com
经　　销	北京蓝色畅想图书发行有限公司		http://www.landraco.com.cn
印　　刷	北京铭成印刷有限公司		
开　　本	787×960 1/16	**版　　次**	2005年9月第1版
印　　张	14.25	**印　　次**	2005年9月第1次印刷
字　　数	250 000	**定　　价**	16.80元

物料号 17634-00

总　序

《普通高中数学课程标准》(以下简称《标准》)颁布以后,不少教师反映,其中有些内容在以往高中课程中没有,或者处理方法有所不同,希望得到一些帮助,以更好地实施标准。为了满足这种要求,高等教育出版社组织编写、出版了这套丛书。丛书按照内容的不同改变,分册进行讨论。首先就《标准》设置的“算法”、“统计与概率”、“向量”、“导数及其应用”、“推理与证明”5部分内容编写了《算法初步》、《统计与概率》、《向量及其应用》、《微积分》和《推理与证明》各册。

各册的框架依作者的写作风格和内容的情况不尽相同,但总的想法是一方面针对具体的内容,就标准的要求进行论述、分析并提出一些建议,以求有助于老师们实施标准的有关部分;另一方面,对相关的知识和方法进行一些适当的拓展和提升,列举一些进一步的教学资源,为老师们进一步学习和研究相关问题、提高数学修养提供资料和帮助。

《标准》所涉及内容的增加和改变,大致上是考虑到数学及其应用在当代的发展及趋势,作为现代化社会成员所需要理解或掌握的一些数学内容,或者是需要感受的一些数学观念。这些内容和观念,对高中学生的未来发展有重要的意义。《标准》同时要求有关内容的处理要适合高中学生的认知水平;着重数学知识和方法,但要反映与相应课外内容的联系。我们努力在各册中尽量反映这种意图,为此在下面对有关问题作一些解释,可能有助于老师们和有关读者理解各册的写作意图。

计算机技术是20世纪后期以来,对技术、社会生产和生活以及科学研究最有影响的技术之一,数学在它的发明和开发中起着关键的作用。但是在我国的社会舆论和实践中,人们似乎忽略了这一重要联系,以至影响了它在社会发展——特别是高新技术的开发——中发挥更大的作用。所以如何使广大社会成员了解、重视并且初步掌握这一联系,应该是数学教育的重要任务之一。我们认为这是《标准》设置算法的基本理由。因此它所要求的算法教学,不像计算机专业课程那样,单纯地介绍计算机所需要的算法、语言及其程序,而是首先帮助同学通过实例将他(她)们熟悉的数学中的算法转化为用计算机语言表述的算法,从而理解计算机算法中的一些概念、基本结构、计算机流程框图和伪代码的背景,有条件的学校可以上机做初步的计算实习。然后在后续的教学中,在凡是有可能的地方,结合并应用算法进行数学教学。这样可以帮助同学了解计算机的

算法与数学中算法的渊源，理解计算机技术与数学的关系，感受数学在计算机技术中的作用，逐步学会应用计算机帮助解决数学的计算问题，同时也有助于加强同学的逻辑严密性。《算法初步》的前半部分就是按照这种想法提供了比较丰富的实例供老师们参考，阐述了算法的数学背景，提供了一些教学建议；后半部分在这个基础上，结合前面的论述，对计算机中的算法作了比较全面的讨论，并介绍了一些进一步的教学资源。

统计与概率是20世纪以来蓬勃发展的两门数学学科。统计是一门具有新特色的独立应用数学，它从日常生活到高新技术领域都有广泛的应用。虽然它以概率论作为数学基础，但是它与数学的其他分支有本质的不同，处理问题的出发点是归纳的。概率论则是描绘和研究随机(偶然)现象的学科，在中学阶段，它能够帮助学生拓宽对数学的视野和具有广泛的应用前景，也有助于深入解释统计的方法。由于它们具有广泛的应用性和具有处理随机现象的特性，早在20世纪七、八十年代，国际上已经普遍在中学引进了统计与概率的教学内容。我国几经周折，近几年在高中教学中也引入了这部分内容，这当然是一个可喜的进步。但是人们习惯于大学中的处理方法，将概率作为统计的数学基础，而更多地注意数学的系统性，忽略统计的直接应用、直观本质等教学原则。这样既不利于学生掌握统计与概率的本质及其应用的思想和方法，又大大增加了学生的学习难度。所以《标准》强调统计要帮助学生通过案例体会从合理收集、整理数据到分析数据、提取信息、做出决策的全过程，学会应用一些实际可用的方法。对于统计中的概念(如“总体”、“样本”等)应结合实例作说明，而不追求数学的定义。概率教学则是要帮助同学通过实例认识随机现象和理解概率的意义，适当地对统计的结果作一些概率解释。对于统计与概率的教学都要注意帮助同学体会统计、概率处理随机性问题与其他数学课程内容处理确定性问题的差别。《统计与概率》一书一方面通过实例努力体现这些，另一方面，阐述这些直观性处理与从数学角度讲述统计概率之间的联系，希望老师掌握直观性处理的分寸——实际应用性和科学性兼备。最后提供一些进一步的教学资源。

向量在高中引入与否，在新大纲的制定中已经有过多次讨论。不少人更多地从向量处理立体几何问题是否比综合法更简单出发，来反对在高中引入向量。的确，用向量处理立体几何问题是否比综合法简单随问题而异，不能一概而论。但是向量不仅仅能解决立体几何问题，它还是一个重要的数学工具。我们知道解析几何是使用代数方法来研究几何的一种有效方法，它是通过坐标来沟通几何与代数的。向量有类似之处，它既是几何的，又是代数的，是沟通几何与代数的另一有效桥梁。而且它有显著的物理背景，近代几何和理论物理的研究进展表明，它在某些方面有自己的重要而独到的作用。因此在处理高中几何问题的有关部分时，引进向量，既可以在初等几何方面多一个工具，更重要的是通过处

理初等几何,初步掌握向量这一工具,为学生以后的发展作了铺垫。《向量及其应用》这一分册前半部分论述了向量的发展历史、教育价值和基本知识,通过实例说明向量在几何、不等式及物理学中的应用,对教学提出一些建议,为老师实施《标准》的有关部分提供参考。最后对向量在数学中的进一步应用作了介绍,提供了一些教学资源,帮助老师理解向量在数学中的作用,也为有关的数学文化教学内容提供资料。

导数是刻画函数变化的快慢程度的一个一般概念,因此它和函数一样,所反映的原型在客观世界中是无处不在的。高中的学生,不论他(她)将来是否进入高等学校,都应该学习导数及其应用的内容,并应用它考察和理解实际现象中的变化。必要时,可以求助于数学和其他自然科学去解决问题。这是作为现代社会成员的一项科学文化素质要求,应该是高中阶段学习导数及其应用的首要目标。为了在很少的课时内达到上述要求,《标准》强调通过丰富实例由平均变化率过渡到瞬时变化率的途径(从极限的观点看,实际上是直接从函数的差商的极限开始讨论),来理解导数概念的实质、客观背景和应用的广泛性以及导数的初步计算。这样做可以避免传统的微积分由极限讲起的数学教学过程。从极限讲起需要较多的课时才能使学生理解,以致以往在中学微积分的教学设置中,学生既没有充分理解导数和积分及其应用的实质,数学上也不能达到掌握微积分初步的要求。大学的高等数学老师认为与其让他们“炒夹生饭”,还不如在中学不学微积分。现在的处理能够兼顾两者,即既可以帮助学生理解导数及其应用的实质,又将系统讲授微积分的任务留给大学阶段,而且前者有助于后者的系统学习。在《微积分》中,前一部分先沿着《标准》的思路通过相当丰富的实例进行分析,提出一些有关教学的建议;然后在后一部分再引进极限概念加以延伸,说明引进极限概念的必要性并不在导数概念的引入,而在于对导数的进一步研究。至于极限的其他应用,例如级数等,本册则不可能涉及。本册还简单介绍了微积分的发展史以及在微积分学发展中做出重要贡献的数学家的小传,希望有助于老师们了解微积分的历史发展过程及其对文化发展的意义,同时也便于老师们帮助同学了解微积分对推动社会进步的作用。

《推理与证明》是这次高中数学课程新增内容之一。我们体会这部分内容的设置首先在于帮助同学在学习数学十多年以后,对于数学课程中所经历的思考和推理方式作一次梳理和小结。这些思考方式虽然同学们常常使用,但是在多数情况下,运用并不自觉,一旦遇到比较复杂的情况或者是需要运用数学之外的情况,就可能不能发挥推理的作用。数学中经常使用的表达方法是演绎(包括计算),这是数学给予学生的一种最重要的训练,也是数学在教育中能够处于重要地位的根据之一。但是如何想出这些方法并不是使用演绎的思考方式,而是应用了直观考察,借助以往的经验类比和归纳等合情推理的方法。不论是合情推

理，还是演绎推理方式在学生今后的成长和发展中都是经常用到的。特别是将来打算学习文科的学生，演绎推理方法对他们仍然需要。而社会上对于各种思考方式的区别与联系相对来说比较模糊，因此应明确地认清什么是合情推理、演绎推理，还有什么是“事实证明”等，应用各种思考方式来做出适当的结论，知道一些结论是在什么情况下做出的，因而对可靠性的程度都会有一个适当的判断。其次，通过一些实例，也有助于加强同学们使用推理与论证的训练。我们也不希望将本书写成解题的思考方法手册。考虑到这一部分内容几乎完全是新的，所以本册写作原则是在可能的条件下多提供一些适合中学生理解程度的例子，或者提示一下那些例子经过适当简化或变动就可以为中学生所理解，并且说明这些例子对同学理解各种推理的作用，从而实际上也是和高中教师一起讨论如何教学，帮助他们进行教学的准备。我们想对这本书，目前不一定需要像其他各书一样，具体地、比较详细地讨论教学建议。

以上概略地介绍了我们对《标准》的相关内容的认识和撰写各册的一些想法。我们也知道进行良好的教学是一门艺术，增进教师的修养是多方面、多途径的。认真地说，我们只是就《标准》新增加的或改变处理的一些内容和老师们进行交流、讨论，向老师们提供一些实例、资料、看法和想法，供老师们参考。我们最大的希望只是我们的写作能够有助于老师们根据实际的教学环境进行创造性的处理，根据自己的条件有效提高，以适应新一轮的教学改革的过程。

丛书各册虽然不同于各专业书籍的写法，但是他们对内容背景的阐述，以及由实例抽象到一般概念和方法的论述过程，对有关专业的读者对专门内容的理解同样有参考价值。因为我认为这种过程是理解专门内容的实质所必需的，而现在很多专门书籍常常忽视这一点。

借丛书出版之际，说了以上一大篇意见，意在有助于使用此书，不全面和不妥当之处肯定会有的，希望大家批评指正。

严士健

2005 年 5 月于北京师范大学

前　言

微积分是什么？为什么要开设微积分课？它的教育价值何在？

请看下列一些杰出人物的精辟论述：

当代著名数学家柯朗(Courant)说："微积分学，或者数学分析，是人类思维的伟大成果之一。它处于自然科学与人文科学之间的地位，使它成为高等教育的一种特别有效的工具。……这门学科乃是一种撼人心灵的智力奋斗的结晶；这种奋斗已经经历了两千五百多年之久，它深深扎根于人类活动的许多领域，并且，只要人们认识自己和认识自然的努力一日不停止，这种奋斗就将继续不已。"

法国著名数学家傅里叶(Fourier)说："数学分析与自然同样广阔，它定义了所有可理解的关系，它是一个慢慢形成的困难科学，它认真地保留了每一条既经获得的原则，它在人类思想的变迁与错误之中不断地长大并变得更强壮。它的主要属性是清晰性，它丝毫不表达混淆的概念。"

恩格斯说："在一切理论成果中，未必再有什么像17世纪后半叶微积分的发明那样被看作人类精神的最高胜利了。"他还说："只有微分学才能使自然科学有可能用数学来不仅仅表明状态，并且也能表明过程，即运动。"

英国著名数学家霍顿(Hutton)说："微积分在任何时候都可能是最伟大、最精巧和最崇高的发明之一，它为我们开辟了一个新的世界。正如它已经做到的那样，它把我们的知识扩展到无限，并使我们超越了那些似乎已给人类思维所规定了的界限，至少已经无限地超越了古代几何所受到的种种限制。"

美国著名数学家奥斯古德(Osgood)说："微积分就其广泛的意义而言，它是我们领悟物理真理的最伟大的助手。"

德国著名数学家黎曼(Riemann)说："只有在微积分发明之后，物理学才成为一门科学。"

法国著名数学家拉普拉斯(Laplace)说："数学分析的语言，是所有的数学语言中最完善的语言，而且语言本身就成为新发现的有力工具。特别是那些被构思出来的种种必要概念，往往是许多新算法的起源。"他还说："微分运算，具有代数运算的全部精确性。"

著名数学家雷波特(Report)说："微积分是人类所建造的最宏伟的知识大厦之一。"

美国著名数学家、沃尔夫奖得主拉克斯(Lax)说："目前数学在非常广泛的

领域里的研究蓬蓬勃勃，而且成就辉煌，但还没有充分发挥人们的数学才华以加深数学与其他科学之间的相互联系。这种不平衡对于数学以及对于它的使用者都是有害的。纠正这种不平衡是一种教育工作，……微积分是最适合从事这项工作的一门课程。……在微积分里，学生可以直接体会到数学是确切表达科学思想的语言，可以直接学到科学是深远影响着数学发展的数学思想的源泉。最后，很重要的一点在于数学可以提供许多重要科学问题的光辉答案。"

美国数学家休斯·哈雷特(Hughes Hallett)等人说："微积分是人类智慧最伟大的成果之一。300年前，受天文学方面问题的启发，牛顿(Newton)和莱布尼茨(Leibniz)阐发了微积分的诸多概念，自那时以来，每一世纪都证明了微积分在阐明数学、物理科学、工程学以及社会和生物科学方面问题的强大威力。由于微积分具有将复杂问题归纳为简单规则和步骤的非凡能力，迄今已获得相当大的成功。"

微积分的创立是数学发展中的里程碑，它的发展和广泛应用开创了数学学科向近代数学过渡的新时期，为研究变量和函数提供了重要的方法和手段，由于变量和函数在自然界和社会中有着几乎无处不在的实际背景，所以微积分不但是高等学校许多专业的一门重要公共基础课，而且也应该让今后没有机会上大学的那些中学生初步了解微积分的有关概念，并知道它们的科学、文化价值。

本书是配合高中新课程的实施，着重于为实施新课程的教师提供与课程标准的理念、处理方式相匹配的数学教学资源，进而向教师提供专业知识、素材、方法的补充资源，希望它成为教师自我开发教学资源，提高自己数学专业知识和教学水平的参考书。为此，本书的特点是：

1. 按普通高中数学课程标准，依据选修系列2"选修2－2"的要求选材，由典型案例引入导数与定积分概念，由函数的平均变化率的变化趋势给出导数概念，由积分和式的变化趋势给出定积分概念，没有提到极限，而是在观察变化趋势中贯穿极限思想，从几何上、数值上、代数上，认识这两个概念的本质，重点是这两个概念在科技及生产生活中的广泛应用。借助于产生这个概念的实际背景，让学生了解微积分的意义和价值，掌握解决问题的思路与方法。

2. 作为教学参考资料，应在基本要求的基础上，进一步提高，从数学上讲清这两个概念，给予严格定义。为此，在第二章简要介绍了极限概念及相关的几个重要定理，以及两个重要的极限、函数的连续性等，在此基础上"再论导数"，对第一章中的有关导数概念及求导公式加以论证。

3. 按课程标准要求，要学生了解"导数在研究函数中的应用"，从几何直观探索并了解函数的单调性与导数的关系，结合图像了解函数在某点取得极值的必要条件和充分条件。在第一章给出导数概念后，讨论了一阶导数与函数图像的关系。在第三章中给出了二阶导数，函数的增减性、极值、曲线的凹凸性的判定定理，但只是由几何直观上得出。为从数学上加以论证，在第三章最后给出了

微分中值定理：罗尔(Rolle)定理及拉格朗日(Lagrange)定理，并对几何上给出的判定定理加以严格论证。

4．对于定积分部分(只选修 2－2 要求，选修 1－1 不含积分)，与导数类似，由典型案例引入定积分概念。为便于计算，积分和式总是由等分积分区间构成的，以便观察随 n 的增大积分和式的变化趋势，从而引出定积分概念。并由路程与速度关系介绍了定积分概念及微积分基本定理。“再论定积分”部分，给出了黎曼和及定积分概念，变上限定积分所确定的函数，以及微积分基本定理的严格证明。

5．在课程标准中要求“收集有关微积分创立的时代背景和有关人物的资料，并进行交流，体会微积分的建立在人类文化发展中的意义。”为此，在本书中编写了“微积分主要内容的发展简史”和“著名数学家选讲”两章。从第五章中可以使读者较具体的了解微积分的出现并不是偶然的，它是一系列数学思想经历漫长岁月逐步演变的结果，它深深扎根于人类活动的许多领域，它是人类文化的重要组成部分，是人类社会进步的产物，也是推动社会发展的动力。在第六章中，我们选择了对微积分学说发展起重大作用的 12 位杰出数学家进行了介绍。除了介绍他们的简要生平，主要业绩(特别是对微积分所作的贡献)外，还介绍了一些他们的治学态度，治学方法或一些趣闻轶事以及一些著名学者对他们的评论。通过这些介绍，可以使读者较具体、深刻地了解微积分是两千多年来，许多数学家艰苦卓绝奋斗的集体成果，是一种撼人心灵的智力奋斗的结晶。并且认识到，只要人类认识自己和认识自然的努力一日不止，这种奋斗就将继续不已。我们认为，作为一个教师，如果了解了微积分中重要概念、理论、方法的发展历史轨迹，了解了这些杰出数学家的生平、业绩、治学态度、治学方法、名言、趣闻轶事等，一定会把微积分讲授得更生动有趣和更富于哲理；而对于正在学习微积分的学生和数学爱好者，了解了这些杰出数学家的学术成就和道德风范，也必将从中受到鼓舞，加深对数学的认识，进而提高学习数学的兴趣，激发刻苦钻研、勇往直前的奋斗精神。

6．在每章的最后都有[教学建议]，其中主要涉及教学中应注意的问题，如如何突出重点，紧扣课程标准要求。将微积分引入中学数学课程中主要让学生了解微积分的价值及其应用的广泛性，感受微积分的思想方法和研究解决问题的手段，而不是追求概念、推理的严谨性。

7．作为“资源丛书”，我们在本书的最后，给出了“教学资源搜索”，其中列出的文献，一方面是我们编写此书时所参阅和引用的主要文献；另一方面也是为读者进一步搜索资源提供一些线索。

本书是我们应高等教育出版社和严士健教授之约编写的，严士健教授对编写此书提出了指导性的意见，高等教育出版社张忠月同志为编辑、出版此书付出

了不少精力，在此一并致以诚挚谢意。

由于我们水平所限，本书若有不当、错误之处，恳请同仁和读者批评、指正。

编者
2005年春

目　录

第一章

导数——函数的变化率

本章由变速直线运动的速度、非均匀金属杆的线密度、曲线的切线斜率等问题，引入函数在区间上的平均变化率概念，并在代数上、数值上及几何上由平均变化率的变化趋势引入函数在一点处的变化率概念，即导数概念．给出函数的和、差、积、商以及复合函数的求导法则，并给出基本初等函数的导数公式．

[标准要求]

1．导数概念及其几何意义

(1) 通过对大量实例的分析，经历由平均变化率过渡到瞬时变化率的过程，了解导数概念的实际背景，知道瞬时变化率就是导数，体会导数的思想及其内涵．

(2) 通过函数图像直观地理解导数的几何意义．

2．导数的运算

(1) 能根据导数定义求函数 $y=c$，$y=x$，$y=x^2$，$y=x^3$，$y=\dfrac{1}{x}$，$y=\sqrt{x}$ 的导数．

(2) 能利用给出的基本初等函数的导数公式和导数的四则运算法则求简单函数的导数，能求简单的复合函数(仅限于形如 $f(ax+b)$)的导数．

(3) 会使用导数公式表．

导数的运算，按标准要求可以直接给出基本初等函数的导数公式和导数的四则运算公式，但本章对这两部分的相关公式仍作了推导．对于基本初等函数，由差商随 Δx 趋于 0 的变化趋势导出了指数函数与正弦函数的导数公式，再利用复合函数的求导法则及导数的四则运算法则导出了其余三角函数及对数函数与反三角函数的导数公式．对于复合函数的导数，标准要求中仅限于求形如 $f(ax+b)$的复合函数的导数，而本章导出了一般复合函数的导数公式．这样编写的目的是为了帮助读者更好地理解和处理这部分内容的讲授，有助于掌握标准的有关部分．

[典型案例]

一、变速直线运动的速度

例 1　自由落体问题　物体在时刻 $t=0$ 从一高塔上坠落，若以 s 表示在下落 t(单位秒(s))时物体所走过的路程，则 $s=\dfrac{1}{2}gt^2$．求物体在 $t=2$(s)时的下落

速度.

解 这是一个变速直线运动,其下落速度 $v=gt$,这是我们熟知的,是因为它是一个等加速运动,加速度为 g,故 $v=gt$.那么速度 v 和路程 s 又是什么关系呢?对于等速直线运动,若速度为 v_0,则由时刻 $t=0$ 开始,物体所走过的路程 s 与时间 t 的函数关系是 $s=v_0t$.对于变速直线运动,显然关系式:"路程=速度×时间"或"速度=路程/时间"不成立.如以上自由落体运动,若仍按以上关系式得出 $s=v\times t=gt^2$,则与 $s=\frac{1}{2}gt^2$ 相违背.那么,如何由 $s=\frac{1}{2}gt^2$ 求出物体在时刻 $t=2$ 的瞬时速度呢?处理这一问题仍由等速直线运动"速度=路程/时间"这一关系式得到启发.

若取 $t=2(\mathrm{s})$ 到 $t=2.1(\mathrm{s})$ 这段时间间隔,物体下落的路程为

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}g(2.1)^2-\frac{1}{2}g(2)^2&=\frac{1}{2}g((2.1)^2-2^2)\\&=\frac{1}{2}g(4.41-4)=0.205g(\mathrm{m}).\end{aligned}$$

在这 $0.1(\mathrm{s})$ 的短暂时间内若将落体运动近似看成是等速的,则

$$速度=\frac{路程}{时间}=\frac{0.205\ g}{0.1}=2.05\ g(\mathrm{m/s}).$$

称这个速度为物体在时间间隔 $2\leqslant t\leqslant 2.1$ 上的平均速度.再缩短时间间隔,计算平均速度,如表 1.1 所示

表 1.1

时间间隔	平均速度
$2\leqslant t\leqslant 2.05$	$2.025\ g$
$2\leqslant t\leqslant 2.01$	$2.005\ g$
$2\leqslant t\leqslant 2.005$	$2.002\ 5\ g$
$2\leqslant t\leqslant 2.001$	$2.000\ 5\ g$
$2\leqslant t\leqslant 2.000\ 1$	$2.000\ 05\ g$

可以看出,随着时间间隔的缩短,平均速度愈来愈接近 $2\ g$,那么,可以认为 $2\ g$ 就是时刻 $t=2(\mathrm{s})$ 时落体的瞬时速度.这与 $v=gt$ 当 $t=2$ 时得出的值是一致的.

自然也可以由 $1.9\leqslant t\leqslant 2$,$1.95\leqslant t\leqslant 2$,$1.99\leqslant t\leqslant 2$ 等等时间间隔上的平均速度的数值逼近 $t=2$ 时的瞬时速度,如表 1.2.