（人教版A必修1）

走向大学丛书

新编数学ABC

《数学ABC》编写组 编

ZOUXIANG DAXUE CONGSHU

ZHEJIANG UNIVERSITY PRESS
浙江大学出版社

数学ABC

必修（1）

《数学ABC》编写组编

浙江大学出版社

图书在版编目(CIP)数据

数学ABC必修1/《数学ABC》编写组编. 6版. —杭州：浙江大学出版社，2002.7
(走向大学丛书)
ISBN 7-308-02957-3

Ⅰ. 数… Ⅱ. 数… Ⅲ. 数学课—高中—教学参考资料 Ⅳ. G634.603

中国版本图书馆CIP数据核字(2002)第017000号

责任编辑 杨晓鸣
封面设计 刘依群
出版发行 浙江大学出版社
(杭州浙大路38号 邮政编码310027)
(E-mail：zupress@mail.hz.zj.cn)
(网址：http://www.zjupress.com)
经　　销 浙江省新华书店
排　　版 杭州大漠照排印刷有限公司
印　　刷 杭州杭新印务有限公司
开　　本 787mm×1092mm 1/16
印　　张 5.75
字　　数 150千字
版 印 次 2002年7月第6版 2006年6月第13次印刷
书　　号 ISBN 7-308-02957-3/G·505
定　　价 8.00元

内容简介

《数学 ABC 必修(1)》是配合新课标人教社 A 版新编的教学辅导用书.

本书在编写过程中,始终体现高中新课程标准的理念,努力贯彻新课标在知识性、技能性学习目标方面的要求.本书的主要特点在于:

(1) 同步性　与教材章节同步,从而与师生教学同步.

(2) 实用性　紧扣教材,注重基础,范例或因其经典,或因其新颖,并加以点评阐明规律、总结方法,达到举一反三的目的.

(3) 层次性　通过 A、B、C 三级训练、夯实基础、强化重点、巩固提高,适合于不同选科、不同要求的学生使用.书末附有解答,对较难的题都给予具体的提示或解答,便于学生自我校正.

本书适合各类高中师生使用.

CONTENTS 目 录

第1章 集合与函数概念

第2章 基本初等函数(Ⅰ)

第3章　函数的应用

第1章 集合与函数概念

1.1 集合

1.1.1 集合的含义与表示(1)

范例解读

例1 下列各组对象的全体能否形成一个集合？若不能，请说明理由；若能，试用适当的方法把它表示出来.

(1) 10的所有约数；

(2) 某班中所有学习好的同学；

(3) 使$|x-1|$很小的所有实数x；

(4) 方程$x^2+2=0$的所有实数根.

解 (1) 能，$\{1,2,5,10\}$.

(2) 不能，因为学习好这个标准不确定.

(3) 不能，因为使$|x-1|$很小，究竟小到多少？不确定.

(4) 能，$\{x|x^2+2=0\}$或$\varnothing$.

点评 看一组对象的全体能否形成一个集合，关键看它的元素是否确定.

例2 数集$\{0,1,x^2-x\}$中的x不能取哪些数值？

解 ∵ 数集中的元素是互异的，

∴ $\begin{cases} x^2-x\neq 0, \\ x^2-x\neq 1. \end{cases}$

∵ $x^2-x=0$的解是$x=0$或$x=1$，

∴ $x^2-x\neq 0$的解是$x\neq 0$且$x\neq 1$.

又 ∵ $x^2-x=1$的解是$x=\dfrac{1-\sqrt{5}}{2}$或$x=\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$，

∴ $x^2-x\neq 1$的解为$x\neq\dfrac{1-\sqrt{5}}{2}$且$x\neq\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$，

综上，x不能取的数值是$0,1,\dfrac{1\pm\sqrt{5}}{2}$.

点评 (1) 本题解法的依据是集合中元素的互异性；

(2) 求解不等式时，也可先解对应的方程，再加以否定.

分级训练

A级

1. 可以构成集合的是 ( )

A. 高一(1)班的高个子同学

B. 很小的数

C. 方程$x^2+1=0$的实数根

D. $2,\sqrt{3},\pi,\cdots$

2. 在下列元素与集合的关系中，正确的是 ( )

A. $\sqrt{3}\in\mathbf{N}$ B. $\sqrt{3}\in\mathbf{Z}$

C. $\sqrt{3}\in\mathbf{Q}$ D. $\sqrt{3}\in\mathbf{R}$

3. 以方程$x^2-3x+2=0$和方程$x^2+x-2=0$的解为元素的集合为A，则A中元素的个数为 ( )

A. 1 B. 2 C. 3 D. 4

4. 下面有四个命题：① 集合$\mathbf{N}$中最小的数是1；② 0是自然数；③ $\{1,2,3\}$是不大于3的自然数组成的集合；④ 若$a\in\mathbf{N},b\in\mathbf{N}$，则$a+b\geqslant 2$，其中正确命题的个数是 ( )

A. 0 B. 1 C. 2 D. 3

5. 用符号“∈”或“∉”连接下列元素与集合：

(1) 0 ______ $\mathbf{N}$，$\frac{1}{2}$ ______ $\mathbf{Z}$，π ______ $\mathbf{Q}$，$\sqrt{2}$ ______ $\mathbf{R}$；

(2) 如果 $a,b\in\mathbf{N}$，且 $a<b$，那么 $a+b$ ______ $\mathbf{N}$，$a-b$ ______ $\mathbf{N}$.

6. 用列举法表示不等式组

$$\begin{cases}2(x+1)-\dfrac{2-x}{3}>\dfrac{7x}{2}-1,\\ \dfrac{x-5}{2}-3x\leqslant -1\end{cases}$$ 的自然数解

集合为______.

B级

7. 由实数 $-x$，$|x|$，$\sqrt{x^2}$，x，$-\sqrt[3]{x^3}$ 构成的集合中，元素最多有 ( )

A. 4个 B. 3个 C. 2个 D. 1个

8. 已知集合 $A=\{2a,a^2-a\}$，若集合 A 中含有 2 个元素，则下列说法正确的是 ( )

A. a 取全体实数

B. a 取除去 0 以外的所有实数

C. a 取除去 3 以外的所有实数

D. a 取除去 0 和 3 以外的所有实数

9. 由 $(-1)^n(n\in\mathbf{N})$ 构成的集合中含有元素的个数为 ( )

A. 1个 B. 2个

C. 0个 D. 无数个

10. 若 $-3\in\{a-3,2a-1,a^2+1\}$，求实数 a.

11. 集合 $\{1,a,b\}$ 又可以表示成集合 $\{a,a^2,b\}$，求实数 a、b.

C级

12. 设 x,y,z 都是非零实数，试用列举法将 $\frac{x}{|x|}+\frac{y}{|y|}+\frac{z}{|z|}+\frac{xyz}{|xyz|}$ 可能取的值组成的集合表示出来.

13. 已知方程 $ax^2+2x+1=0$ 的解是集合 A 的元素. (1) 若 A 只有一个元素，试求 a 的值；(2) 若 A 没有元素，求 a 的取值范围；(3) 若 A 至多有一个元素，求 a 的取值范围.

1.1.1 集合的含义与表示(2)

范例解读

例1 用列举法表示下列集合：

(1) $\{(x,y)\mid x+y=3,x\in\mathbf{N},y\in\mathbf{N}\}$；

(2) $\{(x,y)\mid y=x^2-1,|x|\leqslant 2,x\in\mathbf{Z}\}$.

解 (1) ∵ x,y 都是自然数，而 $3=0+3=1+2$，

∴ 此集合可表示为 $\{(0,3),(1,2),(2,1),(3,0)\}$.

(2) ∵ $|x|\leqslant 2$，$x\in\mathbf{Z}$，

∴ $x=0,\pm1,\pm2$，而相应的 $y=-1,0,3$.

$\therefore$ 此集合可表示为$\{(0,-1),(1,0),(-1,0),(2,3),(-2,3)\}$.

点评 (1) 集合中的元素是有序数对(x,y),可以理解为直角坐标平面上的点的坐标,因此,此题的集合可以理解为点集.同样,此题的集合也可以理解为二元方程(组)的解集.

(2) 若$a\neq b$,则(a,b)与(b,a)表示两个不同的元素.

例2 判断下列命题及式子是否正确:

(1) 集合$\{y\mid y=t^2-t-1\}$与集合$\{x\mid x=t^2-t-1\}$是同一个集合;

(2) 集合$\{y\mid y=x^2-x-1\}$与集合$\{(x,y)\mid y=x^2-x-1\}$是同一个集合;

(3) 集合$\{a,b,c\}$与集合$\{c,a,b\}$是同一个集合.

解 (1) 是正确的.因为这两个集合都表示二次函数t^2-t-1函数值的取值范围.

(2) 是错误的.因为集合$\{y\mid y=x^2-x-1\}$中的元素是二次函数$y=x^2-x-1$的函数值,而集合$\{(x,y)\mid y=x^2-x-1\}$中的元素可以看作二元二次方程$y=x^2-x-1$的解,因此它们表示的不是同一个集合.

(3) 是正确的.因为它们所含有的元素是相同的,而集合中的元素是无序的.

点评 判断两个集合是否相同,关键看两个集合中的元素是否完全相同,而不在于元素的顺序,也不在于使用什么元素符号.

分级训练

A级

1. 用列举法表示集合$\{x\mid -2<x<3,x\in\mathbf{N}\}$,应为 ( )

A. $\{0,1,2\}$　　B. $\{-1,0,1,2\}$
C. $\{1,2\}$　　D. $\{-1,1,2\}$

2. 由平面直角坐标系内的点(2,3)构成的集合可以表示为 ( )

A. $\{2,3\}$
B. $\{x=2,y=3\}$
C. $\{(2,3)\}$
D. {点(2,3)构成的集合}

3. 下列集合中,表示同一个集合的是 ( )

A. $M=\{(3,2)\},N=\{(2,3)\}$
B. $M=\{3,2\},N=\{2,3\}$
C. $M=\{(x,y)\mid x+y=1\},N=\{y\mid x+y=1\}$
D. $M=\{3,2\},N=\{(3,2)\}$

4. 方程的解集$\{x\in\mathbf{R}\mid 2x^2-3x-2=0\}$用列举法表示为________.

5. 用符号"$\in$"或"$\notin$"填空:

(1) $\frac{1}{3}$________$\mathbf{Q}$; (2) π________$\mathbf{Q}$;

(3) $\sqrt{2}+\sqrt{7}$________$\{x\mid x>2+\sqrt{5}\}$;

(4) 8________$\{y\mid y=2^n,n\in\mathbf{N}\}$.

6. 把下列集合换一种方法表示:

(1) $\{x\mid |x-2|<4,x\in\mathbf{N}\}=$________;

(2) {被3除余1的数}$=$________;

(3) $\{1,4,9,16,25,36\}=$________.

B级

7. 在平面直角坐标系中,所有第三象限的点的坐标可以表示为 ( )

A. $\{x<0$ 且 $y<0\}$
B. $\{(x,y)\mid x\leqslant 0$ 且 $y\leqslant 0\}$
C. $\{(x,y)\mid x<0$ 或 $y<0\}$
D. $\{(x,y)\mid x<0$ 且 $y<0\}$

8. 集合$A=\left\{x\mid x=\frac{a^2-2a+1}{a-1},a\in\mathbf{Z},a\neq 1\right\}$,有四个结论:① $x\in\mathbf{N}$; ② $x\in\mathbf{Z}$; ③ $x\in\mathbf{Q}$; ④ $x\in\mathbf{R}$,其中正确的有 ( )

A. 0个　B. 1个　C. 2个　D. 3个

9. 集合$A=\{-1,0,1,2\},B=\{y\mid y=x^2,x\in A\}$,用列举法表示$B$,则$B=$________.

10. 已知集合$A=\left\{x\in\mathbf{N}\,\middle|\,\frac{12}{6-x}\in\mathbf{N}\right\}$,用列举法表示集合$A=$________.

11. 用描述法表示下列集合：

(1) 方程组 $\begin{cases} y=2x+1 \\ y=x+1 \end{cases}$ 的解集；

(2) 平面直角坐标系中 x 轴上方的点的集合；

(3) 偶数集合.

12. 已知 $\frac{1}{2}\in\left\{x \mid x^2-px-\frac{5}{2}=0\right\}$，集合 $B=\left\{x \mid x^2-\frac{19}{2}x-p=0\right\}$，试用列举法表示集合 B.

13. 已知 $P=\{x \mid 2<x<k, x\in \mathbf{N}\}$，若集合 P 中恰有 3 个元素，求实数 k 的取值范围.

C级

14. 设集合 $M=\{x \mid a\leqslant x\leqslant a+3\}$，集合 $N=\{x \mid x<-1$ 或 $x>5\}$，至少存在一个元素 $x\in M$ 且 $x\in N$，则实数 a 满足什么条件？

1.1.2 集合间的基本关系

范例解读

例 1 下列命题中正确的是 ( )

A. 空集无子集

B. 任何一个集合都有真子集

C. B 的子集是由 B 中一部分元素组成

D. 设 $A\subseteq B$，若 $a\notin B$，则 $a\notin A$

解 因空集也是空集的子集，故 A 是错误. 因空集没有真子集，故 B 是错误.

因 B 的子集也可以是 B，故 C 也是错误的.

因为 A、B、C 都错了，故选 D.

1. 应从空集、子集、真子集等概念以及集合与集合之间的关系出发来进行思考和判断.

2. 命题 D 的正确，也可用反证法证明：假设 $a\notin A$ 不成立，则 $a\in A$ 成立.

$\because A\subseteq B$，$\therefore a\in B$，此与已知 $a\notin B$ 相矛盾.

$\therefore a\notin A$，故命题 D 正确.

例 2 写出集合 $\{a,b,c\}$ 的所有子集，并指出其中哪些是它的真子集？

解 集合 $\{a,b,c\}$ 的所有子集为：$\varnothing$，$\{a\}$，$\{b\}$，$\{c\}$，$\{a,b\}$，$\{a,c\}$，$\{b,c\}$，$\{a,b,c\}$ 共 8 个，其中真子集为：$\varnothing$，$\{a\}$，$\{b\}$，$\{c\}$，$\{a,b\}$，$\{a,c\}$，$\{b,c\}$ 共 7 个.

(1) 写集合的子集，可按集合的元素的个数从少到多的顺序去写能做到“不漏不重”.

(2) 若一个集合的元素有 n 个，则这个集合的子集有 2^n 个，真子集有 2^n-1 个.

例 2 满足 $\{1,2\}\subsetneqq A\subseteq\{1,2,3,4\}$ 的集合 A 的个数为________.

解 A 至少有 1，2 两个元素，至多有四个元素.

两个元素的 A 有 $\{1,2\}$ 1 个；

三个元素的 A 有 $\{1,2,3\}$，$\{1,2,4\}$ 2 个；

四个元素的 A 有 $\{1,2,3,4\}$ 1 个. 所以，满足条件的 A 有 4 个.

分级训练

A 级

1. 设集合 $A=\{x \mid x \leqslant 2\sqrt{3}\}$，$a=\sqrt{11}$，则 ( )

   A. $a \subsetneqq A$　　B. $a \notin A$

   C. $\{a\} \in A$　　D. $\{a\} \subsetneqq A$

2. 集合 $\{0\}$ 与 $\varnothing$ 的关系是 ( )

   A. $\{0\}=\varnothing$　　B. $\{0\} \in \varnothing$

   C. $\varnothing \in \{0\}$　　D. $\varnothing \subsetneqq \{0\}$

3. 下列说法中，正确的是 ( )

   A. 空集没有子集

   B. 空集是任何一个集合的真子集

   C. 任何一个集合必有两个或两个以上的子集

   D. 如果集合 $B \subseteq A$，则凡不属于集合 A 的元素必不属于集合 B

4. 用适当符号（$\in$，$\notin$，$\subseteq$，$\supseteq$，$\supsetneqq$，$\subsetneqq$，$=$）填空：

   (1) a ________ $\{a\}$；

   (2) $\{a\}$ ________ $\{a,b,c\}$；

   (3) d ________ $\{a,b,c\}$；

   (4) $\{a,b\}$ ________ $\{b,a\}$；

   (5) $\{3,5,7\}$ ________ $\{3,5\}$；

   (6) $\{4\}$ ________ $\{4,5,6,7\}$.

5. 以下四个关系式：① $\{0\} \supseteq \varnothing$；② $0 \notin \varnothing$；③ $\varnothing \neq \{0\}$；④ $\varnothing=\{\varnothing\}$，其中关系正确的序号是________.

6. 写出集合 $\{x \mid 2x-5<0, x \in \mathbf{N}\}$ 的所有子集.

7. 设集合 $A=\{1,3,x\}$，$B=\{1,x^2-x+1\}$，$B \subseteq A$，求 x 的值.

B 级

8. 设集合 $A=\{x \mid 1<x<2\}$，$B=\{x \mid x-a<0\}$，若 $A \subsetneqq B$，则 a 的取值范围是 ( )

   A. $a \geqslant 2$　　B. $a \leqslant 1$

   C. $a \geqslant 1$　　D. $a \leqslant 2$

9. 设集合 $A=\{x \mid x=5-4a+a^2, a \in \mathbf{R}\}$，$B=\{y \mid y=4b^2+4b+2, b \in \mathbf{R}\}$，则下列关系式中正确的是 ( )

   A. $A=B$　　B. $A \supsetneqq B$

   C. $A \subsetneqq B$　　D. 以上都不正确

10. 已知 $A=\{x \mid x<2\}$，$B=\{x \mid x<a\}$.

    (1) 若 $A=B$，则实数 a 的集合是________；

    (2) 若 $A \subseteq B$，则实数 a 的集合是________.

11. 已知 $A=\{a,b,c\}$，$B=\{x \mid x \in A\}$，求 B.

12. 集合 $A=\{x \mid -2 \leqslant x \leqslant 5\}$，$B=\{x \mid m+1 \leqslant x \leqslant 2m-1\}$，若 $B \subseteq A$，试求：

    (1) 实数 m 的取值范围；

    (2) 当 $x \in \mathbf{N}$ 时，A 的子集个数.

C级

13. 已知集合 $M=\{x\mid x=(2n+1)\pi,n\in\mathbf{Z}\}$，$N=\{x\mid x=(4k\pm1)\pi,k\in\mathbf{Z}\}$，求证：$M=N$.

1.1.3 集合的基本运算(1)
——交集、并集

范例解读

例 1 已知集合 $A=\{x\mid-2<x<4\}$，$B=\{x\mid-3\leqslant x\leqslant3\}$，求 $A\cap B$，$A\cup B$.

解

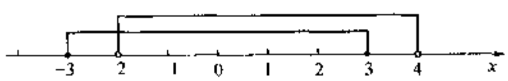

图 1-1

由图知，$A\cap B=\{x\mid-2<x\leqslant3\}$，

$A\cup B=\{x\mid-3\leqslant x<4\}$.

点评 在数轴上进行交、并运算时，区间的端点要仔细. 本例中 $A\cap B=\{x\mid-2<x\leqslant3\}$，区间端点“$x=2$”就不在 $A\cap B$ 中. 解这类问题忽视区间端点就易犯错误.

例 1 若 $A=\{x\mid x^2-3x+2=0\}$，$B=\{x\mid ax-2=0\}$，且 $A\cup B=A$，求由实数 a 组成的集合 C.

解 由 $A\cup B=A$ 知 $B\subseteq A$，

又 $A=\{1,2\}$，$B=\{x\mid ax=2\}$.

当 $B=\varnothing$ 时，$ax=2$ 无解，$a=0$；

当 $B=\{1\}$ 时，$a=2$；

当 $B=\{2\}$ 时，$a=1$，

故 $C=\{0,1,2\}$.

点评 (1) 若 $A\cup B=A$，则 $B\subseteq A$；反之，亦成立.

同理，若 $A\cap B=A$，则 $B\supseteq A$；反之，亦成立.

(2) 不要丢了 $B=\varnothing$ 的情形.

分级训练

A级

1. 若集合 $A=\{x\mid x>5\}$，$B=\{x\mid x>-1\}$，则 $A\cup B=$ （　　）
   A. $\{x\mid x>5\}$
   B. $\{x\mid x>-1\}$
   C. $\{x\mid-1<x<5\}$
   D. $\varnothing$
2. 已知集合 $A=\{x\in\mathbf{N}\mid x\leqslant5\}$，$B=\{x\in\mathbf{N}\mid x>1\}$，那么 $A\cap B=$ （　　）
   A. $\{1,2,3,4,5\}$
   B. $\{2,3,4,5\}$
   C. $\{2,3,4\}$
   D. $\{x\mid1<x\leqslant5,x\in\mathbf{R}\}$
3. 已知集合 $A=\{x\mid x^2+\sqrt{m}x+1=0\}$，若 $A\cap\mathbf{R}=\varnothing$，则实数 m 的取值范围是 （　　）
   A. $m<4$　　B. $m>4$
   C. $0<m<4$　　D. $0\leqslant m<4$
4. 已知集合 $M=\{x\mid x>2$ 或 $x<0\}$，$B=\{x\mid x>-4\}$，则 $A\cap B=$ ______，$A\cup B=$ ______.
5. 集合 $A=\{(x,y)\mid x+y=0\}$，$B=\{(x,y)\mid x-y=2\}$，则 $A\cap B=$ ______.
6. 写出所有满足条件 $\{1,2\}\cup A=\{1,2,3,4\}$ 的集合 A.

B级

7. 下列四个命题：① $a \in (A \cup B) \Rightarrow a \in A$ ② $a \in (A \cap B) \Rightarrow a \in (A \cup B)$ ③ $A \subseteq B \Rightarrow A \cup B = B$ ④ $A \cup B = A \Rightarrow A \cap B = B$，其中真命题的个数为（　　）

A. 1　　B. 2　　C. 3　　D. 4

8. 若 $M = \left\{x \mid x = \frac{k}{2} + \frac{1}{4}, k \in \mathbf{N}\right\}$，$N = \left\{x \mid x = \frac{k}{4} + \frac{1}{2}, k \in \mathbf{Z}\right\}$，则两集合的关系为（　　）

A. $M = N$　　B. $M \subseteq N$

C. $M \supseteq N$　　D. $M \cap N = \varnothing$

9. 设集合 $M = \{x \mid -1 \leqslant x < 2\}$，$N = \{x \mid x \leqslant a\}$，若 $M \cap N = \varnothing$，则实数 a 的取值范围是________.

10. 若集合 $P = \{1, 2, 4, m\}$ 与 $Q = \{2, m^2\}$ 满足 $P \cup Q = P$，则实数 m 组成的集合是________.

11. 已知 $S = \{x \mid 2x^2 - px + q = 0\}$，$T = \{x \mid 6x^2 + (p+2)x + q + 5 = 0\}$，且 $S \cap T = \left\{\frac{1}{2}\right\}$，求集合 S 和 T.

12. $A = \{x \mid x^2 + (p+2)x + 1 = 0\}$，$A \cap \{x \mid x > 0\} = \varnothing$，且 A 不为空集，求 p 的取值范围.

C级

13. 集合 $A = \{x \mid x^2 - ax + a^2 - 19 = 0\}$，$B = \{x \mid x^2 - 5x + 6 = 0\}$，$C = \{x \mid x^2 + 2x - 8 = 0\}$，问 a 取何值时，$(A \cap B) \supsetneqq \varnothing$ 与 $A \cap C = \varnothing$ 同时成立？

1.1.3 集合的基本运算(2)
——全集、补集

范例解读

例 1 已知全集 $U = \{2, 3, a^2 + 2a - 3\}$，$A = \{2, |a+7|\}$，$\complement_U A = \{5\}$，求 a 的值.

解 ∵ $\complement_U A = \{5\}$，∴ $5 \in U$ 且 $5 \notin A$.

又 ∵ $|a+7| \in A$，∴ $|a+7| \in U$.

∴ $\begin{cases} a^2 + 2a - 3 = 5, & ① \\ |a+7| \neq 5. & ② \end{cases}$

由①解得 $a = -4, a = 2$，它们都适合②；但当 $a = 2$ 时，$|a+7| = 9 \notin U$，故舍去 $a = 2$.

∴ $a = -4$.

(1) 符号“$\complement_U A = \{5\}$”包含三层含义：一是 $5 \in U$；二是 $5 \notin A$；三是 $A \subseteq U$.

(2) 解题结束后别忘检验所得结果是否符合题意.

例 1 已知全集 $U = \{x \mid x$ 取不大于 30 的质数$\}$，A、B 是 U 的两个子集，且 $A \cap (\complement_U B) = \{5, 13, 23\}$，$(\complement_U A) \cap B = \{11, 19, 29\}$，$(\complement_U A) \cap (\complement_U B) = \{3, 7\}$，求 A、B.

解 $\because U=\{2,3,5,7,11,13,17,19,23,29\}$，

用韦恩图分别表示 $A\cap(\complement_U B)$、$(\complement_U A)\cap B$ 及 $(\complement_U A)\cap(\complement_U B)$ 如图 1－2. 可得

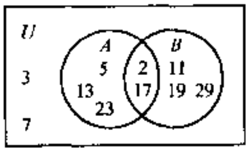

图 1－2

$A=\{2,5,13,17,23\}$，

$B=\{2,11,17,19,29\}$.

利用韦恩图直观、明了，可以帮助解题.

分级训练

A 级

1. 已知 $U=\mathbf{R}, A=\{x \mid x>3\sqrt{2}\}, a=\dfrac{1}{2-\sqrt{3}}$，则 (　　)

   A. $a\subseteq \complement_U A$　　B. $a\not\subseteq \complement_U A$

   C. $\{a\}\in A$　　D. $\{a\}\subsetneqq \complement_U A$

2. 设全集 $U=\{1,2,3,4,5,6,7\}, A=\{1,3,5,7\}, B=\{3,5\}$，则 (　　)

   A. $U=A\cup B$

   B. $U=(\complement_U A)\cup B$

   C. $U=A\cup(\complement_U B)$

   D. $U=(\complement_U A)\cup(\complement_U B)$

3. 设全集 $U=\{0,1,2,3,4\}, A=\{0,1,2,3\}, B=\{2,3,4\}$，则 $(\complement_U A)\cup(\complement_U B)=$ (　　)

   A. $\{0\}$　　B. $\{0,1\}$

   C. $\{0,1,4\}$　　D. $\{0,1,2,3,4\}$

4. 已知全集 $U=\mathbf{N}$，集合 $A=\{x\in\mathbf{N} \mid x>5\}$，则 $\complement_U A$ 用列举法表示为________.

5. 若全集 $U=\mathbf{R}, A=\{x \mid 1<x\leqslant 2\}$，则 $\complement_U A=$________.

6. 设全集 $U=\mathbf{Z}$，集合 $A=\{x \mid x=2k, k\in\mathbf{Z}\}, B=\{x \mid x=2k+1, k\in\mathbf{Z}\}$，则 $\complement_U A=$________，$\complement_U B=$________.

7. 已知全集 $U=\{1,2,3,4,5,6\}$，集合 $A=\{2,3,4\}, B=\{1,3,5\}$，求 $\complement_U A$，$\complement_U B$，$A\cap(\complement_U B)$，$\complement_U(A\cup B)$.

B 级

8. 已知 M、N 都是全集 U 的子集，则图 1－3 中阴影部分可以表示为 (　　)

   A. $M\cup N$

   B. $\complement_U(M\cap N)$

   C. $(\complement_U M)\cup(\complement_U N)$

   D. $\complement_U(M\cup N)$

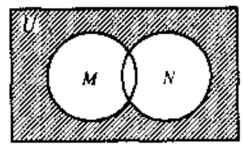

图 1－3

9. 设全集 $U=\{a,b,c,d\}, M=\{a,c,d\}, N=\{b,d\}, P=\{b\}$，则 (　　)

   A. $P=M\cap N$　　B. $P=M\cup N$

   C. $P=M\cap(\complement_U N)$　　D. $P=(\complement_U M)\cap N$

10. 下列命题正确的是 (　　)

    A. 若 $A\subseteq\mathbf{R}$，则 $\complement_{\mathbf{R}}(\complement_{\mathbf{R}}A)=\{A\}$

    B. 若 $A\subseteq B$，则 $\complement_B A\neq\varnothing$

    C. 若 $A=\{1,2,3\}, B=\{1,2,3\}$，则 $\complement_A B$ 不存在

    D. 若 $A\subseteq B$，则 $A\cap\complement_U B=\varnothing$

11. 设全集 $U=\{1,2,3,4,5\}$，且 $A\cap B=\{2\}$，$(\complement_U A)\cap B=\{4\}$，$(\complement_U A)\cap(\complement_U B)=\{1,5\}$，则集合 $A=$________，$B=$________.

12. 设全集 $U=\{1,3,5,7\}$，且 $A=\{x \mid x^2+ax+b=0\}$，若 $\complement_U A=\{5,7\}$，则 $a=$________，$b=$________.

13. 设全集 $U=\{2,3,a^2+2a-3\}, A=\{|2a-1|,2\}$，$\complement_U A=\{5\}$，求实数 a 的值.

C级

14. 设全集 $U=\mathbf{R}$，集合 $A=\{x \mid x>5$ 或 $x<-2\}$，$B=\{x \mid a+1 \leqslant x \leqslant 2a-1\}$，且 $B \subseteq \complement_U A$，求实数 a 的取值范围.

《集合》单元复习

范例解读

例1 已知集合 $A=\{x \mid x>-5$ 或 $x<-6\}$，$B=\{x \mid x<1\}$，$C=\{x \mid x<-4$ 或 $x \geqslant 2\}$，全集 $U=\mathbf{R}$，则 $(\complement_U A \cup \complement_U B) \cap C=$ ________.

解 借助数轴易求出 $A \cap B=\{x \mid x<-6$ 或 $-5<x<1\}$，如图 1-4(甲)所示.

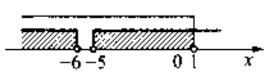

图 1-4(甲)

$\therefore \complement_U(A \cap B)=\{x \mid -6 \leqslant x \leqslant -5$ 或 $x \geqslant 1\}$.

$\therefore \complement_U A \cup \complement_U B=\complement_U(A \cap B)=\{x \mid -6 \leqslant x \leqslant -5$ 或 $x \geqslant 1\}$.

再借助数轴可得 $(\complement_U A \cup \complement_U B) \cap C=\{x \mid -6 \leqslant x \leqslant -5$ 或 $x \geqslant 2\}$，如图 1-4(乙)所示，故应填 $\{x \mid -6 \leqslant x \leqslant -5$ 或 $x \geqslant 2\}$.

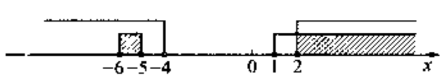

图 1-4(乙)

点评 如果不用性质 $\complement_U A \cup \complement_U B=\complement_U(A \cap B)$，也可先求出 $\complement_U A$、$\complement_U B$，再求出 $\complement_U A \cup \complement_U B$.

例2 设 $A=\{x \mid a \leqslant x<a+3\}$，$B=\{x \mid x<-1$ 或 $x>5\}$，a 为何值时，(1) $A \cap B=\varnothing$；(2) $A \cap B \neq \varnothing$；(3) $A \cap B=A$；(4) $A \cup \complement_U B=\complement_U B$.

解 (1) $A \cap B=\varnothing$ 是指集合 A 与 B 没有公共元素，所以有 $a \geqslant -1$ 且 $a+3 \leqslant 5$，即当 $-1 \leqslant a \leqslant 2$ 时，$A \cap B=\varnothing$.

(2) $A \cap B \neq \varnothing$ 说明集合 A 与 B 有公共元素，所以有 $a<-1$ 或 $a+3>5$，即当 $a<-1$ 或 $a>2$ 时，$A \cap B \neq \varnothing$.

(3) $A \cap B=A$ 说明凡属于 A 的元素一定属于 B，所以有 $a+3<-1$ 或 $a>5$，即当 $a<-4$ 或 $a>5$ 时，$A \cap B=A$.

(4) $A \cup \complement_U B=\complement_U B$ 说明集合 A 的元素一定是不属于 B 的元素，即 $A \cap B=\varnothing$，由 (1) 知，即当 $-1 \leqslant a \leqslant 2$ 时，$A \cup \complement_U B=\complement_U B$.

点评 集合是一种符号语言，解题时先要准确理解每一种符号，每一个集合，然后把它转化为其他数学问题.

例2 设 $A=\{x \mid x^2+4x=0\}$，$B=\{x \mid x^2+2(a+1)x+a^2-1=0\}$，若 $A \cap B=B$，求 a 的值.

解 $\because A \cap B=B$，$\therefore B \subseteq A$，又 $A=\{0,-4\}$，

$\therefore B=\varnothing$ 或 $B=\{0\}$ 或 $B=\{-4\}$ 或 $B=\{0,-4\}$.

(1) 当 $B=\varnothing$ 时，$\Delta=4(a+1)^2-4(a^2-1)<0$，解得 $a<-1$.

(2) 当 $B=\{0\}$ 时，$\begin{cases}2(a+1)=0\\a^2-1=0\end{cases}$，解得 $a=-1$.

(3) 当 $B=\{-4\}$ 时，$\begin{cases}2(a+1)=0\\a^2-1=16\end{cases}$，无解.

(4) 当 $B=\{0,-4\}$ 时，$\begin{cases}2(a+1)=4\\a^2-1=0\end{cases}$，解得 $a=1$.

综上可知：$a \leqslant -1$ 或 $a=1$.

例4 已知集合 $A=\{x\mid -2\leqslant x\leqslant 5\}$，$B=\{x\mid m+1\leqslant x\leqslant 2m-1\}$.

(1) 若 $B\subseteq A$，求实数 m 的取值范围；

(2) 若 $x\in\mathbf{Z}$，求 A 的非空真子集的个数；

(3) 若 $x\in\mathbf{R}$ 时，没有元素 x 使 $x\in A$ 与 $x\in B$ 同时成立，求实数 m 的取值范围.

解 (1) ∵ $B\subseteq A$， ∴ $B=\varnothing$ 或 B 为 A 的非空子集.

当 $B=\varnothing$ 时，有 $m+1>2m-1$，可得 $m<2$；

当 B 为 A 的非空子集时，有

$$\begin{cases}m+1\leqslant 2m-1,\\ m+1\geqslant -2,\\ 2m-1\leqslant 5,\end{cases}$$ 可得 $2\leqslant m\leqslant 3$.

∴ $m\leqslant 3$.

(2) ∵ $x\in\mathbf{Z}$，∴ $A=\{-2,-1,0,1,2,3,4,5\}$，

∴ A 的非空真子集的个数为 $2^8-2=254$.

(3) ∵ $x\in\mathbf{R}$ 时，没有元素 x 使 $x\in A$ 与 $x\in B$ 同时成立，

∴ $A\cap B=\varnothing$，可分两种情况：

当 $B=\varnothing$ 时，有 $m+1>2m-1$，可得 $m<2$；

当 $B\neq\varnothing$ 时，有 $\begin{cases}m+1\leqslant 2m-1,\\ 2m-1<-2\end{cases}$ 或 $\begin{cases}m+1\leqslant 2m-1,\\ m+1>5.\end{cases}$

∴ $\begin{cases}m\geqslant 2,\\ m\leqslant -\dfrac{1}{2}\end{cases}$ 或 $\begin{cases}m\geqslant 2,\\ m>4.\end{cases}$ ∴ $m>4$.

综上所述，$m<2$ 或 $m>4$.

点评 空集是任何集合的子集，是任何非空集合的真子集，在解有关子集的问题时，必须注意这一情况.

分级训练

A级

1. 已知 $A=\{(x,y)\mid 4x+y=6\}$，$B=\{(x,y)\mid 3x+2y=7\}$，则 $A\cap B$ 等于 ( )

A. $(1,2)$　　B. $\{(1,2)\}$

C. $\{1,2\}$　　D. $\{2,1\}$

2. 已知全集 $U=\{1,2,3,4,5\}$，$M=\{2,3,4\}$，$N=\{1,3,5\}$，则集合 $\complement_U(M\cup N)$ 等于 ( )

A. $\{1,2,4,5\}$　　B. $\{1,2,3,4,5\}$

C. $\{3\}$　　D. $\varnothing$

3. 设全集 $U=\mathbf{R}$，$M=\{x\mid f(x)=0\}$，$N=\{x\mid g(x)=0\}$，则集合 $\{x\mid f(x)\cdot g(x)=0\}$ 可表示为 ( )

A. $M\cap N$　　B. $(\complement_U M)\cup N$

C. $M\cup\complement_U N$　　D. $M\cup N$

4. 集合 $\{1,2,3\}$ 的所有非空真子集是________________.

5. 若全集 $U=\{2,3,a^2+2a+2\}$，$A=\{2,|a|\}$，$\complement_U A=\{5\}$，则实数 $a=$________.

6. 已知 $A=\{x\mid 2x^2+x+m=0\}$，$B=\{x\mid 2x^2+nx+2=0\}$，且 $A\cap B=\left\{\dfrac{1}{2}\right\}$，求 $A\cup B$.

7. 已知集合 $A=\{x\mid -2<x<4\}$，$B=\{x\mid x-a<0\}$，在下列条件下分别求出 a 的取值范围：

(1) $A\cap B=\varnothing$；　　(2) $A\subsetneqq B$.

B级

8. 如果全集 $U=\{a,b,c,d,e\}$，集合 $M=\{a,c,d\}$，$N=\{b,d,e\}$，那么 $(\complement_U M)\cap(\complement_U N)$ 等于 ( )

A. $\varnothing$　　B. $\{d\}$

C. $\{a,c\}$　　D. $\{d,e\}$

9. 若集合 A、B、C 满足 $A\cup B=A\cup C$，则 ( )

A. $B=C$

B. $A\cap B=A\cap C$

C. $A\cap(\complement_U B)=A\cap(\complement_U C)$

D. $(\complement_U A)\cap B=(\complement_U A)\cap C$

10. 集合 M 和 N 分别含有 10 个和 12 个元素，若集合 $M\cap N$ 有 5 个元素，则 $M\cup N$ 含有________个元素；当 $M\cup N$ 含有________个元素时，$M\cap N=\varnothing$.

11. 用 A,B 的关系式分别表示图 1-5 和图 1-6中的阴影部分：

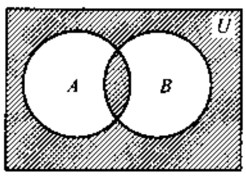

图 1-5

(1) ________；

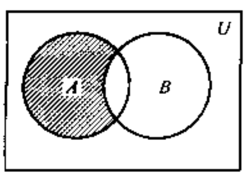

图 1-6

(2) ________.

12. 设全集 $U=\{1,2,3,4,5\}$，$A\cap B=\{2\}$，$(\complement_U A)\cap B=\{4\}$，$(\complement_U A)\cap(\complement_U B)=\{1,5\}$，求 A，B.

13. 已知全集 $U=\{2,4,x^2-x+2\}$，$A=\{2,6-x\}$，且 $\complement_U A=\{4\}$，求实数 x.

C 级

14. 已知集合 $A=\{x\mid x^2-3x+2=0\}$，$B=\{x\mid x^2-ax+(a-1)=0\}$，$C=\{x\mid x^2-mx+2=0\}$，且 $A\cup B=A$，$A\cap C=C$，求实数 a 和 m 的值.

1.2 函数及其表示

1.2.1 函数的概念(1)

范例解读

例 1 判断下列各题按对应法则，是否是从集合 A 到集合 B 的函数？

(1) $A=(-\infty,+\infty)$，$B=[0,+\infty)$，f 是求平方；

(2) $A=(-\infty,+\infty)$，$B=(0,+\infty)$，f 是求平方；

(3) $A=[0,+\infty)$，$B=(-\infty,+\infty)$，f 是求平方根.

解 (1) 按对应法则，A 中任何一个元素，在 B 中有惟一的元素与其相对应，所以它是从集合 A 到集合 B 的函数，实际上这个函数可以表示为 $y=x^2(x\in\mathbf{R})$.

(2) 按对应法则，A 中元素 0 在 B 中没有元素和它对应，所以它不是从集合 A 到集合 B 的函数.