

● 工業技術通訊 叢刊 ●

高速切削法參考材料

—— 第六輯 ——

工業技術通訊編輯委員會編

機械工業出版社



工業技術通訊叢刊

高速切削法參考材料

——第六輯——

工業技術通訊編輯委員會編



機械工業出版社

1953

編 者 的 話

在這一輯裏，主要是談高速切削的具體應用及一些實際問題。其中除一篇是學習蘇聯的先進技術的報導外，全部是翻譯蘇聯的文章。這輯中有五篇選自‘機械譯叢’，其餘選自‘工業技術通訊’。文章中個別的文字也作了刪改。

這輯中，‘高速切削的理論’給我們以理論的指導；‘斷屑問題的研究報告’給我們解決了最感困難的斷屑問題；在第四輯裏向讀者介紹的‘適應高速切削的機床的改裝與合理使用’也選進去了，它對改裝舊機床，提供了極豐富的經驗；‘高速鑽孔的經驗’介紹了使用雙頂尖角及在橫刃處開凹槽的新方法；‘高速切削螺絲用的附加裝置’介紹了一個在車製螺絲時既簡單又有效的自動退刀裝置。其餘的文章也有很大的參考價值。

編者：工業技術通訊編輯委員會

文字編輯：應華炎、鄧德咸 責任校對：曹 珊

1953年1月發排 1953年8月初版 1—5,500冊

書號 0165-4-21 31×43^{1/32} 137千字 83印刷頁 定價 7,200元(乙)

機械工業出版社(北京盤甲廠17號)出版

機械工業出版社印刷廠(北京泡子河甲1號)印刷

中國圖書發行公司總經售

目 次

高速切削的理論·····	格魯多夫著	謝 研譯	(1
斷屑問題的研究報告·····	烏立夫等著	符其珣譯	(44
適應高速切削的機床的安裝與合理使用·····			
·····	普洛科波維契著	謝 研譯	(81
多刀半自動車床的高速切削·····			
·····	席弗林、艾弗倫著	齊 勳譯	(115
高速鑽孔的經驗·····	席樂夫著	范國寶譯	(131
螺絲的高速切削法·····	夏赫拉著	吳聯榮譯	(137
高速切削螺絲用的附加裝置·····			
·····	馬伊斯基著	周士炎譯	(142
使用高速銑絲器的經驗·····		陳耀君	(146

高速切削的理論

格魯多夫著

譯者按：本文著者格魯多夫是蘇聯金屬切削理論權威之一，現任蘇聯工具機製造部全蘇科學研究院切削研究所所長。他遠在 1935～1936 年就和其他幾位學者和工程師從事了金屬切削的深入研究，並在世界上首先證明了高速切削的可能性。本文是他在莫斯科捷利尤科‘工程技術者之家’作的學術報告。

被加工材料與刀具材料的物理機械性質

在金屬切削加工的過程中，被加工材料的切削層、工件表面層和刀具的材料，都要發生物理機械性質的改變，與此同變的是變形作用力和摩擦係數，因此，摩擦力、摩擦溫度、切削溫度（包括刀具、切屑和工件的溫度）、刀具的磨損及使用壽命等也都有所改變。

被加工材料具有各種不同的化學成分、機械性質與物理性質（包括硬度、抗張力和抗壓力的強度極限、延伸率、衝擊韌性、比熱、導熱率、導電率和比重等），這些原始資料可以從專門的手冊中查出，例如：‘機械百科全書’（第三、四卷，Машгиз 版）和‘構造鋼手冊’（第二卷，Металлургияиздат 版）裏面都有這些材料。

各種化學成分的刀具材料，其物理機械性質的研究工作，在今天來說還是很不夠的。

表 1 列出了幾種硬質合金在標準溫度下的特性。爲了便於比較，表中還列有淬過火的 PΦ1 高速鋼的特性。目前 C2 硬質合金雖已停止生產了，但從表 1 中可以看出它的化學成分和機械特性是和 T15K6 硬質合金極爲接近的。至於 C2 硬質合金在高溫下的機械特性，可參考工學碩士布魯什德因的論文^①。所要注意的是：T15 K6 硬質合金在高溫下

① 指‘C2 硬質合金的切削性能與其組織的關係’一文，1940 年國防出版局出版。

的機械性能是和 C2 硬質合金的機械性質相近的。同樣，波別基特硬質合金的性質也和 BK8 硬質合金相近。波別基特硬質合金的特性可參考工學碩士布洛恒的論文。

從表 1 中很清楚的可以看出：BK8 硬質合金的硬度比 PΦ1 高速鋼的硬度高出 5.5 個洛氏單位 (R_A)，而硬質合金 C2 與 T15 K6 的硬度比 PΦ1 要高出 6~7.2 個單位。這一點，對於硬度 $R_A = 75 \sim 83$ 的淬火鋼的加工，具有特別重要的意義。顯然，要想對於淬火鋼有切削的可能性，刀具的硬度是必須超過被加工材料的硬度的。

TK 類硬質合金抗彎強度極限約為淬火高速鋼抗彎強度極限的 $1/3$ ，而 BK8 硬質合金的抗彎強度極限則比 C2 和 T15 K6 硬質合金高些。

硬質合金抗壓強度極限和高速鋼 PΦ1 的抗壓強度極限很相近。從上述強度極限的比較可知，在設計硬質合金刀具時，如果可能而且合理的話，必須創造這樣一

表 1

刀 具 材 料	化 學 成 分 %				機 械 性 質					物 理 性 質				τ - 與被 加工鋼件 ($\sigma_B=60$ 公斤/公厘 ²) 熔結的溫 度
	碳	錫	鈦	鉻	硬 度	強 度 極 限		衝擊 韌性 α_k 公斤公厘 ^{1/2}	比 熱 c	導 熱 率 λ	比 電 阻 χ	比 重 γ		
						抗 彎 σ_u 公斤/公厘 ²	抗 壓 σ_{cm} 公斤/公厘 ²							
													RA	
PΦ1	0.85	18	—	—	83	370	380	0.89	0.11	0.05	—	8.73	575~600	
BK8	5.4	85	—	7.94	88.5	140	330	0.6	0.04	0.14	0.207	14.45	600~675	
波別基特	5.1~5.64	82.06~82.07	—	10.13~11.04	88	125	—	—	—	—	—	—	—	
C2	7.4	69.5	12.5	9	89	120	300	0.32	—	—	—	11.0	—	
T15K6	7.45	73.5	12	5.8	90.2	115.6	—	—	0.059	0.065	0.692	11.01	700~875	

個條件：使硬質合金刀片工作時受到的不是彎力，而是壓力。這樣就必須把刀具的正前角改成負前角，才有可能達到目的。

BK8 硬質合金的衝擊韌性要比 PΦ1 高速鋼的衝擊韌性約低 30%，而 C2 硬質合金的衝擊韌性要比 PΦ1 高速鋼的衝擊韌性約低 60%。

BK8 硬質合金的脆性比 C2 和 T15 K6 硬質合金的脆性小得多。因此，切削部分在標準幾何形狀 ($\gamma=15^\circ$, $\lambda=+3^\circ$, $\varphi=45^\circ$, $\alpha=8^\circ$) 及其他同等條件下，TK 類硬質合金在工作刃部損傷的情形要比 BK 硬質合金嚴重。

高速鋼的比熱約為硬質合金比熱的 2.5 倍。BK8 硬質合金的導熱率約為高速鋼導熱率的 3 倍，為 C2 和 T15 K6 硬質合金導熱率的 2 倍。這兩個特性——比熱和導熱率——對於切削刀具的焊接、刃磨和使用，具有很大的意義。

使用普通方法或高頻電流法焊接 T15 K6 硬質合金時，由於加熱過速，可能發生裂紋；但焊接 BK8 硬質合金時，這種現象就不常發生。T15 K6 硬質合金由於加熱過速，內部發生極大的附加應力，以致引起裂紋。這種情形在刀具的焊接過程中或刃磨與工作過程中均可看到，因此，為防止 T15 K6 硬質合金刀片在焊接時發生裂紋起見，必須進行緩慢的加熱。TK 類硬質合金的刃磨用量應該和 BK8 硬質合金的刃磨用量大有不同。刃磨時必須注意，怎樣避免刀片發生局部過熱的情形。這祇有應用強烈冷卻方法，才能達到目的。

使用 T15 K6 硬質合金切削金屬時，因局部迅速加熱，極有產生裂紋的可能。果然，這種裂紋在切削刃與被切削面接觸的部位上常可看到。

刀具後面磨損甚大時，在磨損面上就會有裂紋出現。這種裂紋很難用磨修方法把它消除，因此時常會有人提出使刀具後面上的磨損超過 1 公厘是否適宜的問題，當然，這樣的裂紋不是經常產生的，它主要是與切削刀具上的溫度有關。

BK8 硬質合金的比電阻很接近純鐵的比電阻，C2 和 T15 K6 硬質合金的比電阻則約為 BK8 比電阻的 2~3 倍。

4

刀具材料的線膨脹係數，對於硬質合金刀片往刀體上焊接，意義很大，並且影響兩個相焊材料在切削時的結合情況，因為金屬在切削時，溫度的變動範圍極大。

如果刀片和刀桿兩者的膨脹不同，就可能發生脫焊現象。

一般認為被切削材料和硬質合金發生熔結時的溫度，可以決定硬質合金的磨損，因此也就可以決定它的生產率。

當磨損與熔結現象同時存在時，硬質合金的磨損就要來得急劇一些。在這樣磨損的過程中，會產生兩種材料的熔結體，增加了摩擦面的不平性。這種結合體碎落時，將帶走部分硬質合金份子，使磨損增加，硬質合金上就會生成極大的不平性，使硬質合金迅速磨損。

從表 1 可以看出：硬質合金 T15 K6 和鋼的熔結溫度，要比 BK8 高些，因此這種硬質合金對於鋼件加工的生產率也要高些。

綜合以上所述各點可知，認識刀具材料和被加工材料在正常溫度下的物理機械性質後，對於使用硬質合金刀具切削金屬，就有可能預見工作的是否能夠順利進行。

工件材料和刀具材料的物理機械特性是隨着切削因素改變的，影響最大的是切削速度、剪斷厚度和刀具切削部位的幾何形狀。

溫度對於被加工材料和刀具材料的影響

爲了瞭解切削過程，必須認識被加工材料和刀具材料的物理機械性質，並研究這個物理機械性質在各種工作過程中的變化，即在各種切削速度、刀具壽命、切屑大小及刀具切削部位的幾何形狀工作時，被加工材料和刀具材料的物理機械性質要發生何種變化。

我們都知道，在切削過程中，會發生變形功和摩擦功，這些功的大部分都轉變爲熱，這就顯然會使被切削的切屑、切削刀具和工件三者的溫度增高。

根據克利沃烏荷夫教授的實驗，證明切屑和刀具在切削過程中，溫度可達 $800\sim 900^{\circ}\text{C}$ 。這樣，就必須研究一下被加工材料和刀具材料的物理機械性質與加熱溫度的關係。當然，被加工材料與刀具材料的物理

機械性質，在普通加熱情況下的變化過程不能真正代表切削過程中的變化，但它的基本道理則和金屬切削過程一樣。

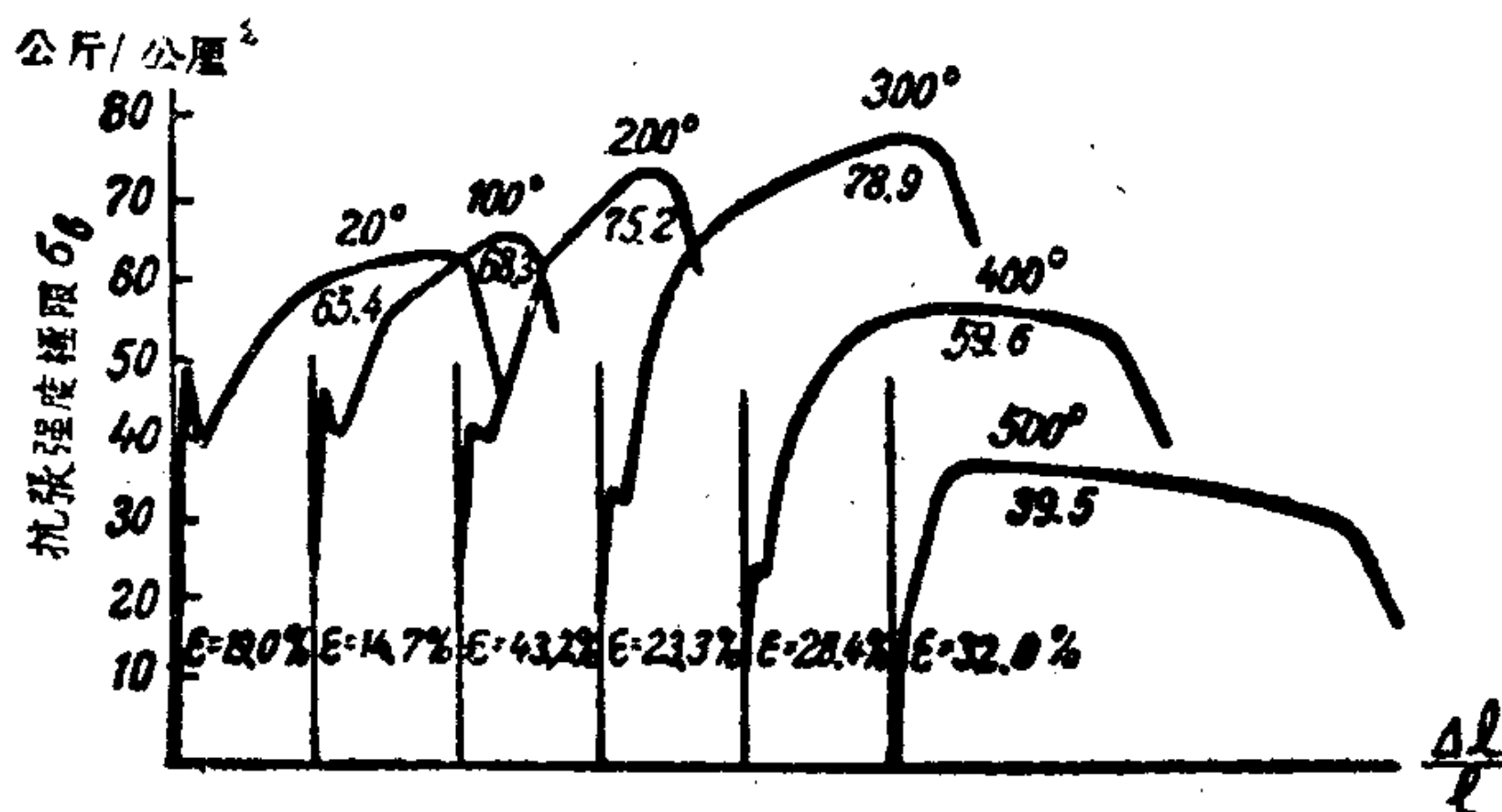


圖 1

圖 1 表示含碳 0.4~0.5% 的鋼在人工加熱到各種溫度時的抗張力曲線。從圖中可以看出：溫度增高時，鋼的抗張強度極限最初是增加的，在溫度 300°C 時達到它的最高值，然後就猛烈降低。延伸率 ϵ 呢，最初在降低，然後逐漸增高。

看了具有各種物理機械性質的鋼在加熱到各種溫度時的抗張力曲線以後，我們就可以確定出含碳量 0.4~0.5% 鋼的物理機械性質的變化原則(圖 2)。

從圖 2 的曲線中可以看出：溫度增高時，抗張力強度極限 σ_B 最初是降低了(在 100°C 時)，然後增高到最大值(在 300°C 時)，再以後就猛烈低落；延伸率 ϵ 最初是下降，然後升高了；衝擊韌性 a_k 最初是升高的，然後降低到它的最低值，隨着又升高了；比熱 C 在增加，導熱率 λ 則隨着溫度的增高而減低。

我們知道，在切削過程中，切屑可以熱到很高的溫度。很明顯的，它的物理機械性質也要根據一定的法則，隨着溫度的增高而發生變化。

必須指出，強度高的鋼，在熱到 800°C 時，機械性質的變化要遠比強度低的鋼劇烈。實際上，如果把鋼加熱到 800°C 時，鋼 1 (見圖 3) 的

強度極限可能降低到原值的 $1/8 \sim 1/10$ ，而鋼 3 則僅降低到 $1/2 \sim 1/3$ 。因此，在切削強度高的鋼時，如果用人工加熱方法，那麼得到的生產率就遠比強度低的鋼為大。

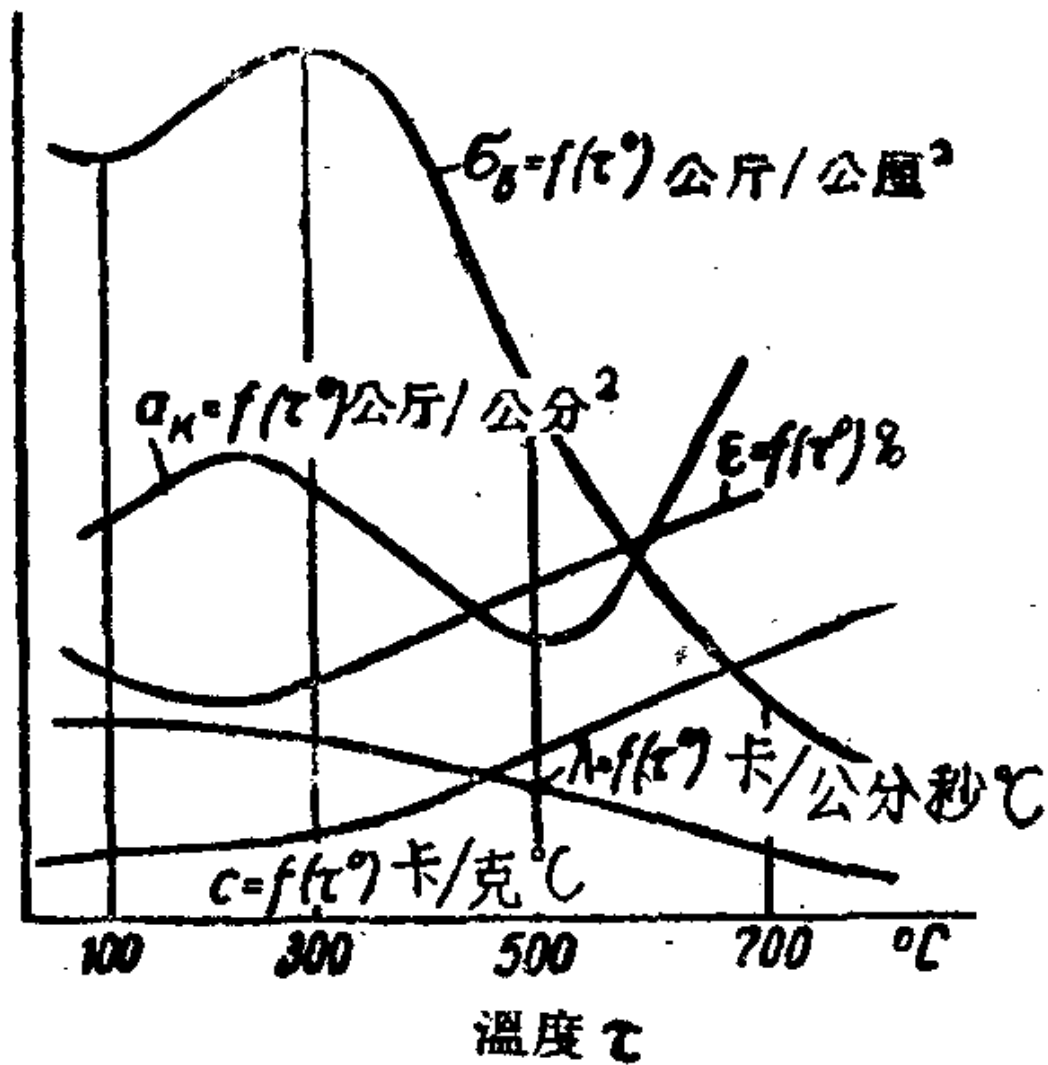


圖 2

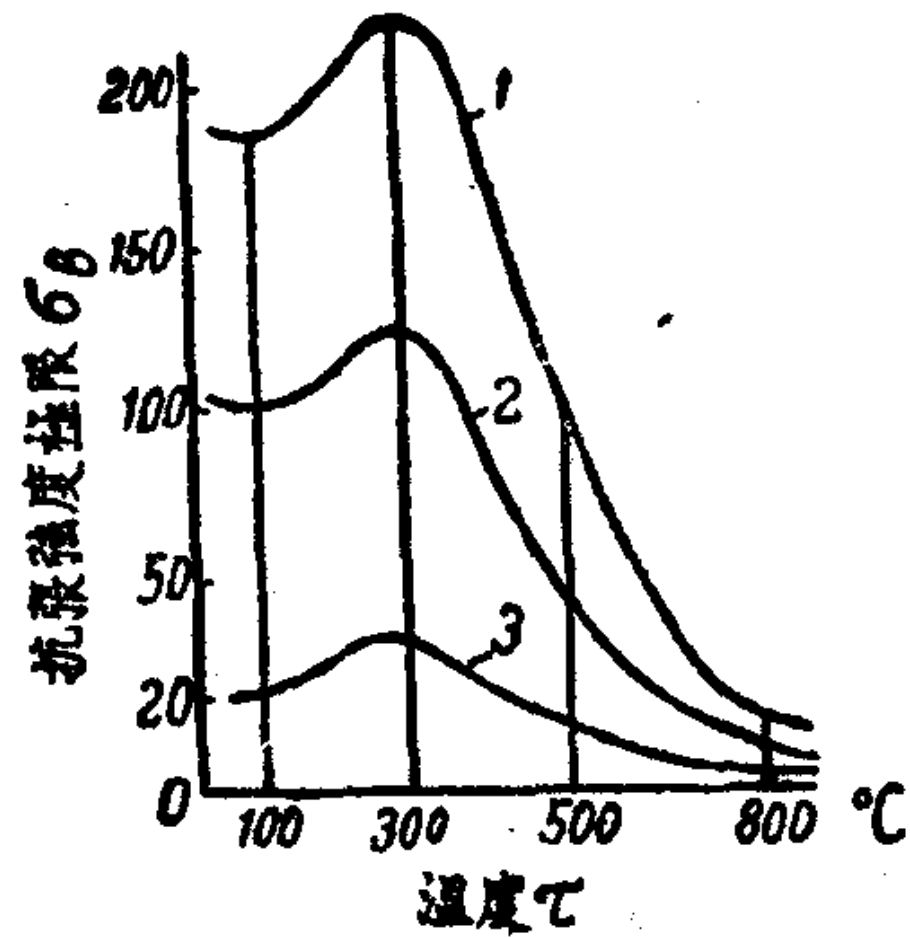


圖 3

魯嘉維什尼科夫、阿斯基那捷、巴巴特、越飛、卡甘諾維契、阿南尼也夫、費里且夫等的實驗證明，切削金屬時，如果把切削經過加熱的切削層和不經加熱的切削層做一比較，那麼就很明顯的看出，切削經過加熱的切削層時，動力消耗會顯著減低，生產率則急劇增加。

表 2 列出魯嘉維什尼科夫的實驗數字。被加工材料是 5 號鋼，所用車刀是 30×45 公厘的彎柄車刀，車刀鑲着 P Θ 3 和 T15K8 的硬質合金刀片， $\gamma = 12^\circ$ ， $\alpha = 7^\circ$ ， $\varphi = 60^\circ$ 。工件的直徑 160 公厘，長度是 800 公厘。

從表 2 中可以看出，把鋼從 0°C 加熱到 560°C 切削時，切削力幾乎減低到原值的 $1/3$ ，這個數字和以前用人工方法加熱時所得出的、關於被加工材料物理機械性質變化的數字相近。

阿斯基那捷和巴巴特指出，在常溫切削某種鋼件時，比切削力為 148 公斤/公厘²，但把工件加熱至 900°C 切削時，其比切削力僅為 35 公斤/公厘²，即約降低到原值的 $1/4$ 。

表2 預熱溫度對切削力的影響

材料: 5號鋼

(σ_B=60 公斤/公厘², 布氏硬度計的球印直徑 4.5 公厘, 相對延伸率-18%)

加工條件	工件溫度 °C	無負荷時動力的平均消耗馬力	切削動力的平均消耗馬力	切削力 P _s 公斤	切 削 用 量				
					每分鐘轉數	吃刀深度 t 公厘	走刀量 S 公厘/轉	切屑斷面 f 公厘 ²	切削速度 v 公尺/分
常溫狀態	0	1.22	6.05	1150	52	8	0.945	7.6	24.5
	250	1.40	4.15	760	52	8	0.945	7.6	24.5
加熱狀態	450	1.58	2.37	430	52	8	0.945	7.6	24.5
	560	1.58	2.08	378	52	8	0.945	7.6	24.5

表3列出了越飛在研究金屬加熱切削的經濟價值時所得的數字。根據這些資料可知,由於經過預熱,切削的生產率可提高2.5~4倍。

表3 金屬加熱切削時,生產率和車刀壽命比常溫切削時的提高情形

車刀的硬質合金為 T21 K8;被加工材料為鉻鋼,布氏硬度為 330

切 削 用 量				車 刀 角 度				工件溫度 °C	車刀工作至磨損 h _s 達0.5 公厘/分的時間	車刀壽命相對提高	生產率相對提高
t	S _轉	n	S _分	γ°	α°	φ°	r				
公厘	公厘/轉	轉/分	公厘/分				公厘				
2	0.63	165	105	+10	6	45	1	700	35	4倍	2.5倍
2	0.12	245	29	+10	6	45	1	20	7~8		
2	0.9	163	145	+10	6	45	1	700	34	4倍	4倍
8	0.12	245	29	+10	6	45	1	20	7~8		
2	0.12	260	31	+10	6	45	1	450	90~95	9~10倍	—
2	0.12	260	31	+10	6	45	1	20	8~9		

以上所引的資料意味着:材料經人工方法加熱後,切削力顯著的降低了(約降低到原值的 $\frac{1}{3} \sim \frac{1}{4}$),這情形和把工件加熱到各種溫度來試驗其抗張力時,所發生的機械性質變化的情形一樣。

在切削未經預熱的材料時，切下的切屑由於變形和摩擦，結果也要受到加熱。這樣馬上就會使人聯想到，材料切削層的加熱，將和經過人工預熱的材料一樣，會對切削過程和生產率發生決定性的影響。但是對切削過程加以研究後，由於測量切削力的結果證明實際並不如此：假如被切削材料經過人工預熱到 900°C 時，切削力能減少到原值的 $1/3 \sim 1/5$ ，那麼，切削未加熱的材料時，即使切屑受熱到 800°C ，而切削力的降低僅只 $20 \sim 40\%$ 而已。

使用 T15K6 硬質合金車刀加工 45 號鋼件（其強度極限為 $\sigma_B = 65$ 公斤/公厘²）時，如吃刀深度為 0.5 公厘，走刀量為 0.1 公厘/轉，車刀壽命為 90 分時，切削速度可取用 320 公尺/分。這時切屑與車刀前面的接觸時間 θ 為：

$$\theta = \frac{60 \times B \zeta}{1000 \times v} = \frac{60 \times 0.5 \times 2}{1000 \times 320} = 0.00019 \text{ 秒。}$$

公式中 B—月牙窪寬度；

ζ —切屑收縮度^①；

v —切削速度。

因此，切削層的變形和切屑與車刀前面的摩擦，時間僅為 0.00019 秒。由於變形功和摩擦作用，分離的切屑可加熱至 $800 \sim 900^{\circ}\text{C}$ 。把切屑溫度加以研究，可使我們認識到，切屑在離開工件時的溫度，一定低於經過 0.00019 秒後（這段時間是用來進行一些內部變化和發生熱量的）所生成的溫度。熱量的發生既然在發生變形之後，那麼，由於變形所發生的熱量祇可間接的（通過摩擦係數和切屑收縮度）影響切削作用力和改變摩擦面的情況。

根據筆者、羅建別爾格和其他同志的實驗得知，切削速度增高時，切削分力 P_x 、 P_y 、 P_z 將按圖 4 的曲線變化。從這裏可以看出，切削力最初稍微降低，然後增高了，最後逐漸低落。同樣，切屑的收縮度也按這個規律變化（圖 5），而這個變化是決定於車刀的前角及車刀前面的成長^②、

① 根據齊滅教授的公式， $\zeta = \frac{\sin(\delta + \beta_1)}{\sin \beta_1}$ 。

② Навост, 或稱刀瘤，即切屑分子因熔結而附着在車刀前面的凸起物。

摩擦面的狀況(摩擦係數)、降伏點及變形時間的。切屑收縮度的低減是由於和車刀前面接觸的切屑面發生了微軟或微熔(由於摩擦係數的降低)及變形時間縮短(變形速度的落後)這兩個原因所造成。

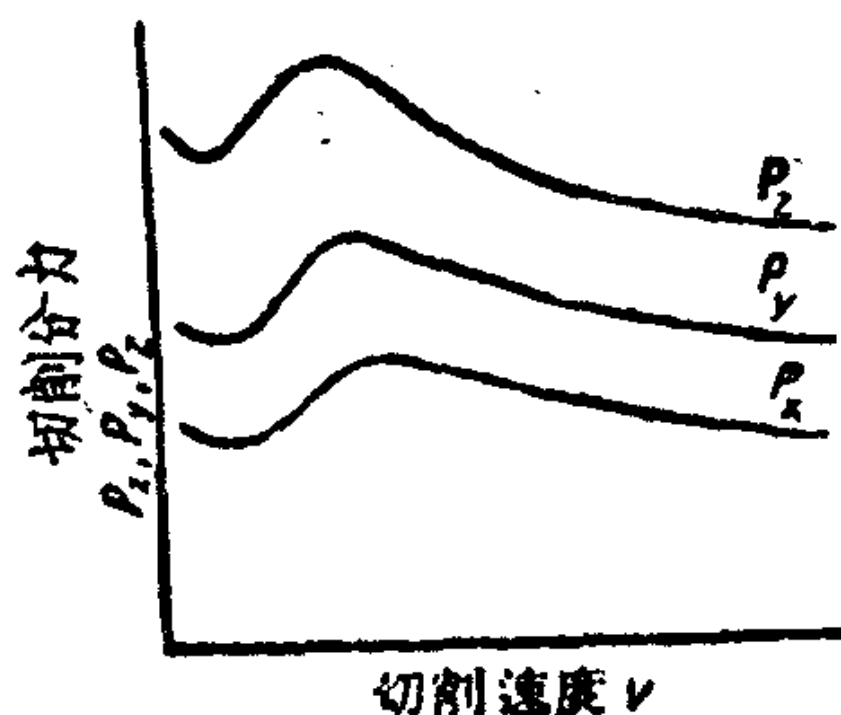


圖 4

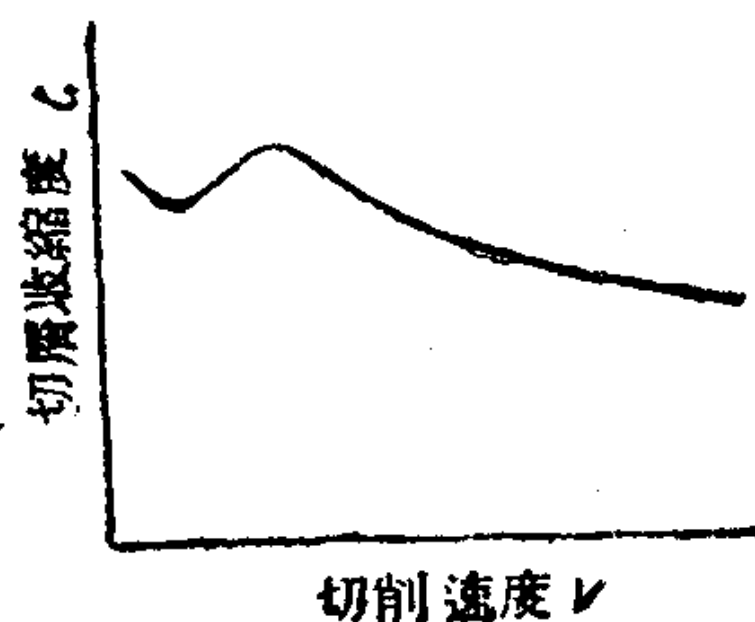


圖 5

因此，我們理解到，切削力的變化不僅由於被加工材料的切削部位在變形期間受熱，發生了機械性質的變化所致，而主要是由於摩擦面狀況改變的後果。

假如材料在變形前或在變形期間果真熱到了 $800\sim 900^{\circ}\text{C}$ ，那麼切削力似乎就有減低到原值的 $1/3\sim 1/5$ 的可能；但實際上切削力並沒有如此降低過，即或分離的切屑達到了 800°C 的時候，切削力依然不能降低這樣多。

某些學者指出，採用負前角車刀及高的切削速度工作時，切屑所生的高熱是由於變形加大所造成，他們並提出許多數字，證明這樣做時，切削力要比採用正前角降低許多。這現象的解釋是由於切屑加熱，切削層強度減低的緣故。

但羅建別爾格博士的實驗和烏立夫等的資料都指出，使用負前角車刀工作時，比起正前角來，切削力並沒有降低(圖 6)。此外，在確定車削中切削力和強度極限(在 $\sigma_B = 60\sim 160$ 公斤/公厘² 的範圍內)的關係時(圖 7)，切削力是逐漸上升的，雖然在加工 $\sigma_B = 160$ 公斤/公厘² 的鋼件時，其切屑溫度可達 $600\sim 800^{\circ}\text{C}$ 。在這種場合下，切削力也並未得出理想中的降低。

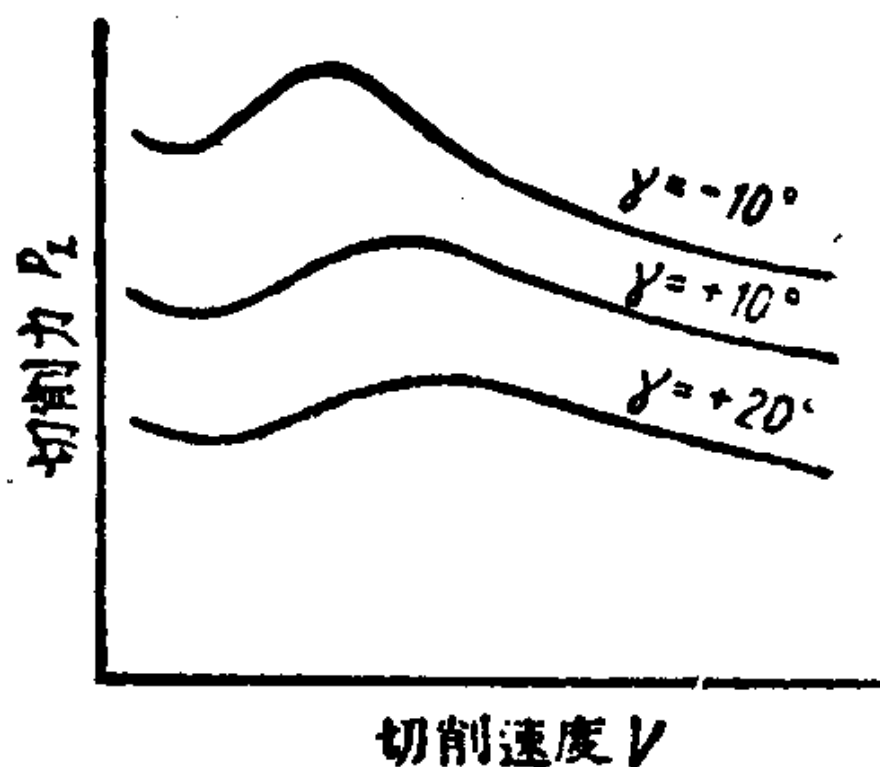


圖 6

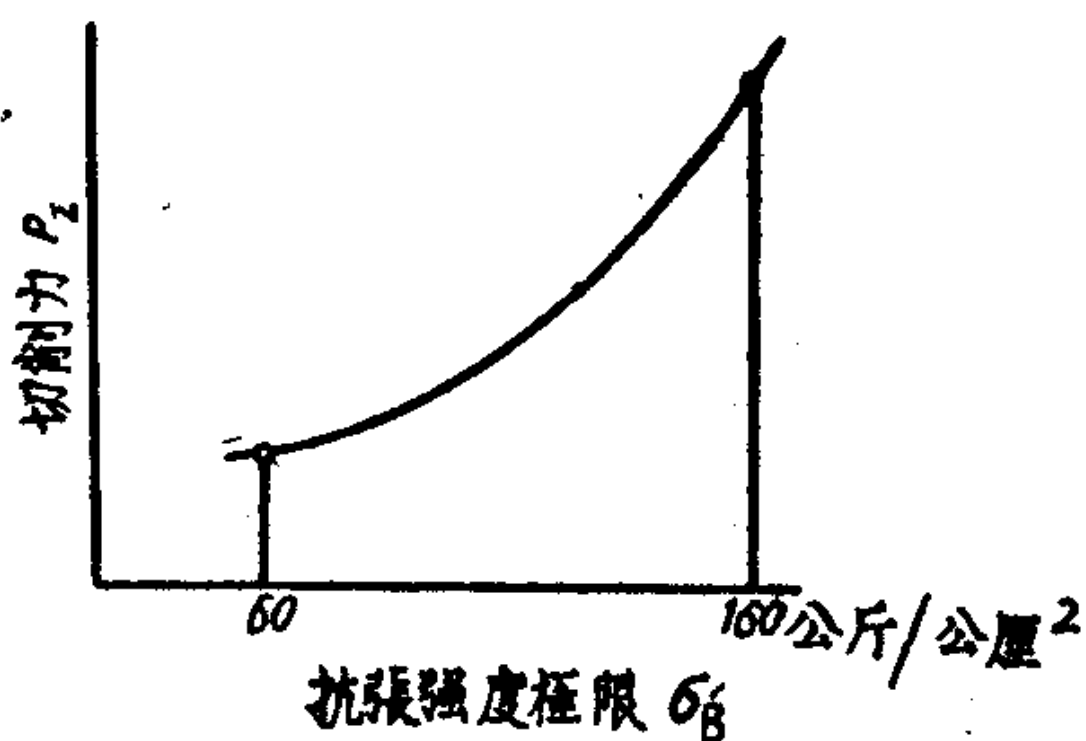


圖 7

因此，切屑在分離時所受變形功的加熱，對於切削力的降低並無良好影響。所以，看到了被加工材料溫度對於切削力、生產率的影響以後，不應當再對於切削過程的實際情形，不加詳細分析，就把材料經過人工預熱與切屑層在切削過程中的加熱兩者混為一談了。

金屬切削時，起決定性作用的是摩擦面的形態，後者又決定於摩擦係數和比接觸力以及硬質合金由於加熱而發生的物理機械性質的變化。這裏引用切削過程中的加熱和刀具材料用人工加熱的相似性，是完全合適的，因為刀具材料的加熱是由於摩擦功發生，並在這個加熱狀態下切削被加工的材料。

從工學碩士布魯什德因和工學碩士布洛恆的研究工作裏，可以看出 C2 硬質合金和波別基特硬質合金的物理性質變化與硬質合金加熱的關係。

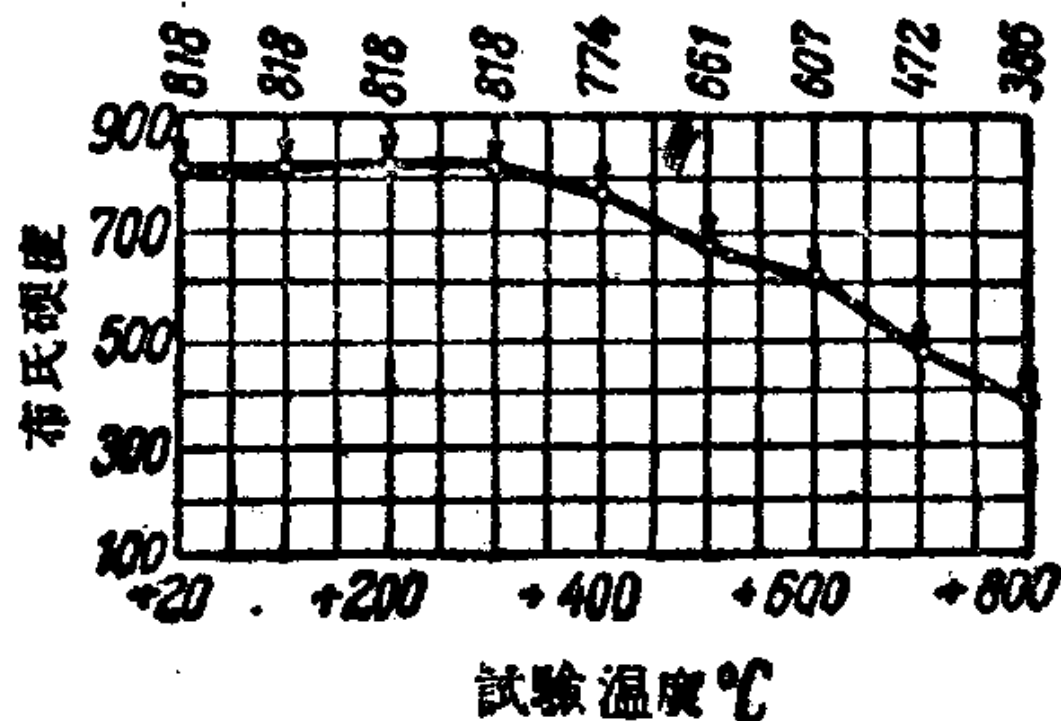


圖 8

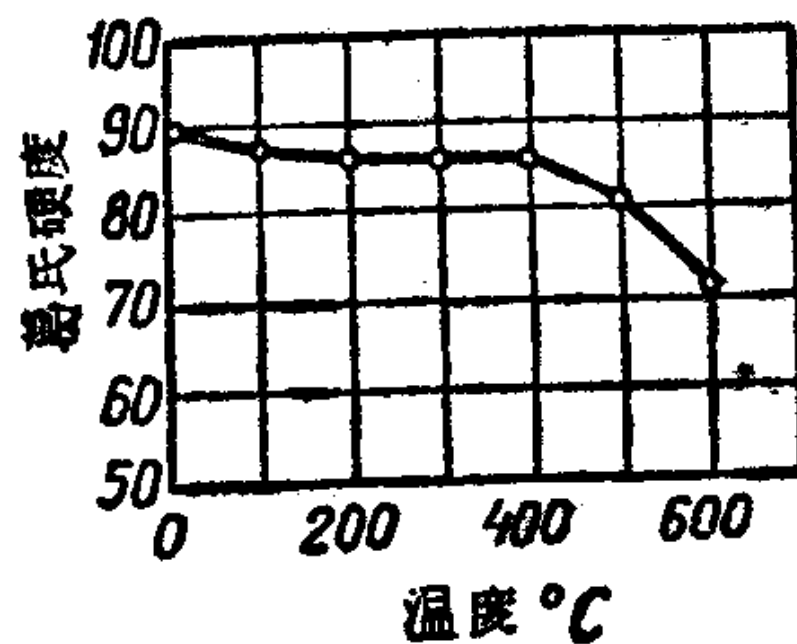


圖 9

圖 8 表示硬質合金 C2 與加熱溫度的關係。硬質合金的硬度，在熱至 $300\sim 400^{\circ}\text{C}$ 時差不多仍能維持固定不變，而在繼續加熱（至 800°C ）時，才從 $H_B=818$ 降低到 $H_B=386$ ，即降低 50% 強。這種變化情形，對於波別基特硬質合金也很相似（圖 9）。

圖 10 表示硬質合金 C2 的加熱溫度對於抗彎強度極限的影響。硬質合金加熱至 400°C 時，強度極限差不多沒有甚麼改變，祇在繼續加熱時（從 $400\sim 800^{\circ}\text{C}$ ），抗彎強度極限才從 115.5 公斤/公厘² 降低到 62 公斤/公厘²，即降低約 50%。根據布洛恒的資料，對於波別基特硬質合金也有同樣的情形。

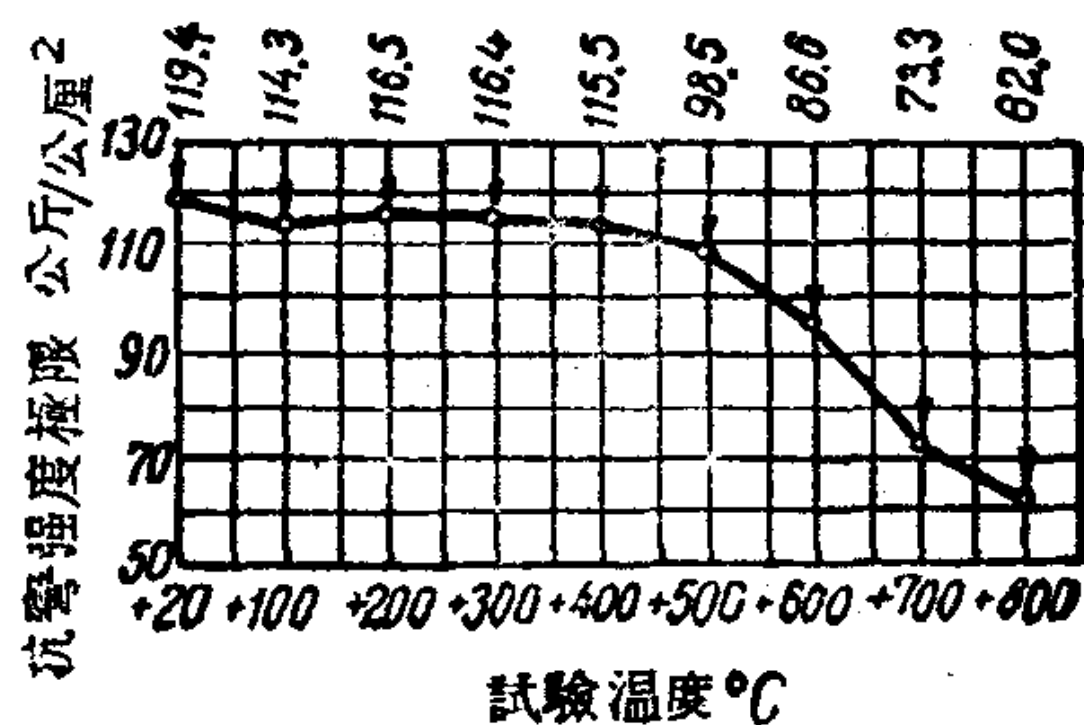


圖 10

抗壓強度極限（圖 11）的變化沒有抗彎強度變化得那樣顯著。實際上，如把 C2 硬

質合金加熱至 400°C 試驗時，其抗壓強度極限毫未變化，仍為 297 公斤/公厘²；祇在加熱至 800°C 時，才低落為 217 公斤/公厘²，即減低了約 26%。值得注意的是硬質合金 C2 的衝擊韌性在各種加熱溫度下的變化（圖 12）。起初，當溫度升高至 300°C 時，硬質合金的衝擊韌性從 0.322 增高到 0.52 公斤公尺/公分²。然後，當溫度升高至 $400\sim 600^{\circ}\text{C}$

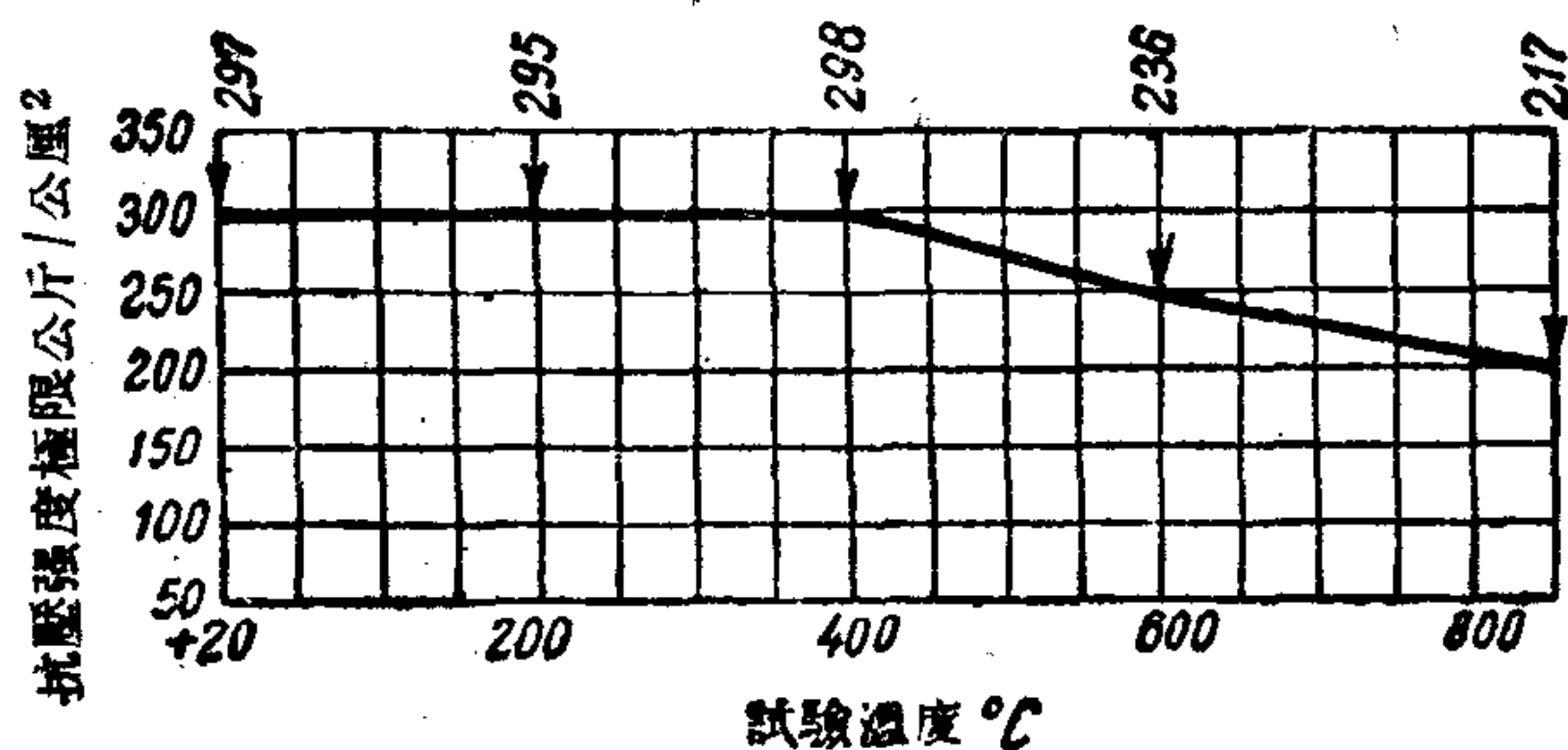


圖 11

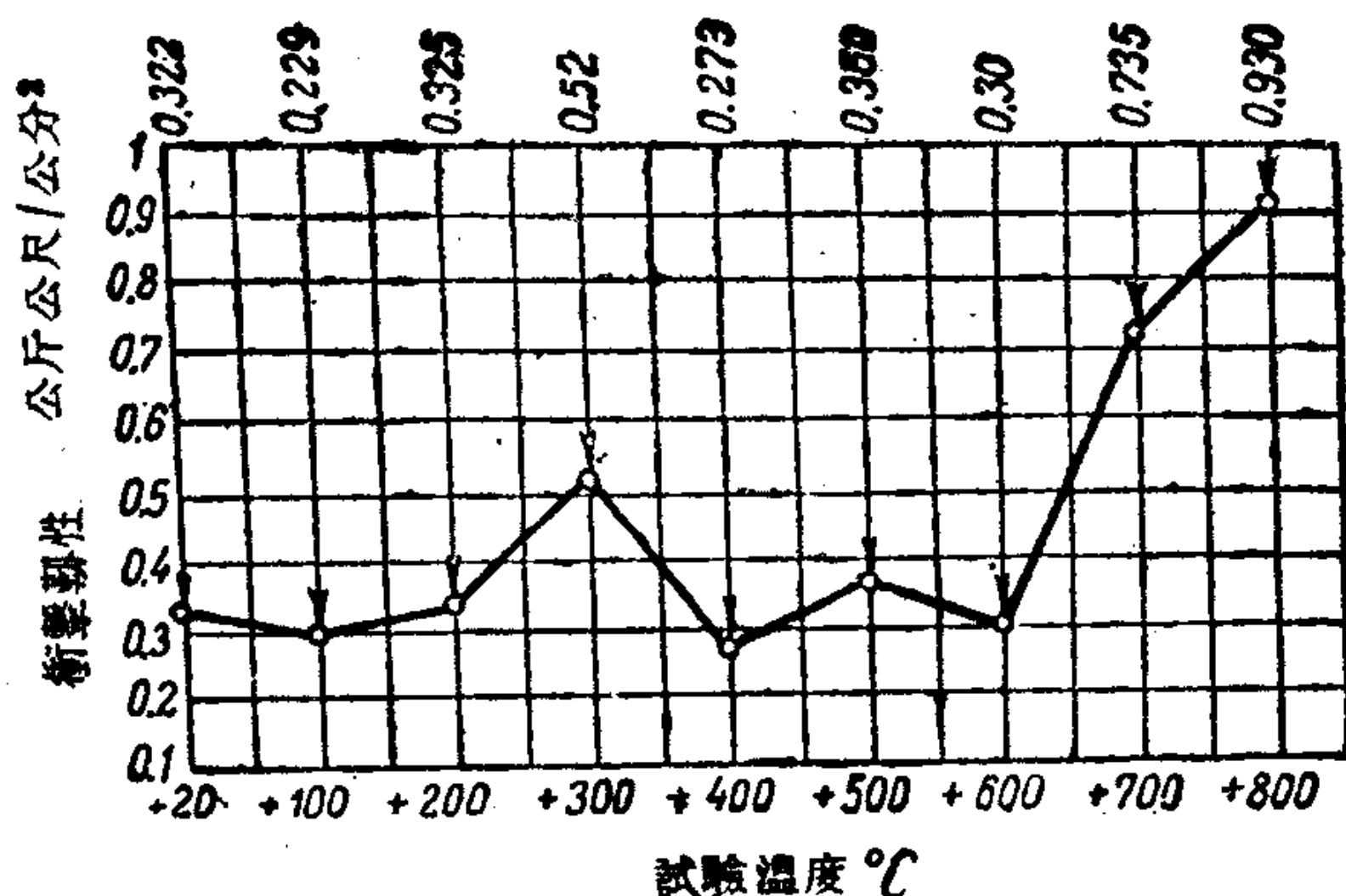


圖 12

時，衝擊韌性就降至 0.3 公斤公尺/公分²。從 600°C 繼續加熱到 800°C 時，衝擊韌性又增高到 0.93 公斤公尺/公分²，即比常溫時(20°C)增高

了 2 倍左右。

因此，如果在 700~800°C 進行切削時，硬質合金的脆性便顯著的降低了。

圖13表示溫度或切削速度對於硬質合金 C2 的硬度 H_B 、抗彎強度極限 σ_u 、衝擊韌性 α_k 以及切削力 P_z 與切屑收縮度 ζ 的理論變化圖。

車刀的溫度或切削速度增高時，切屑收縮度和切削力按同一規律變化，

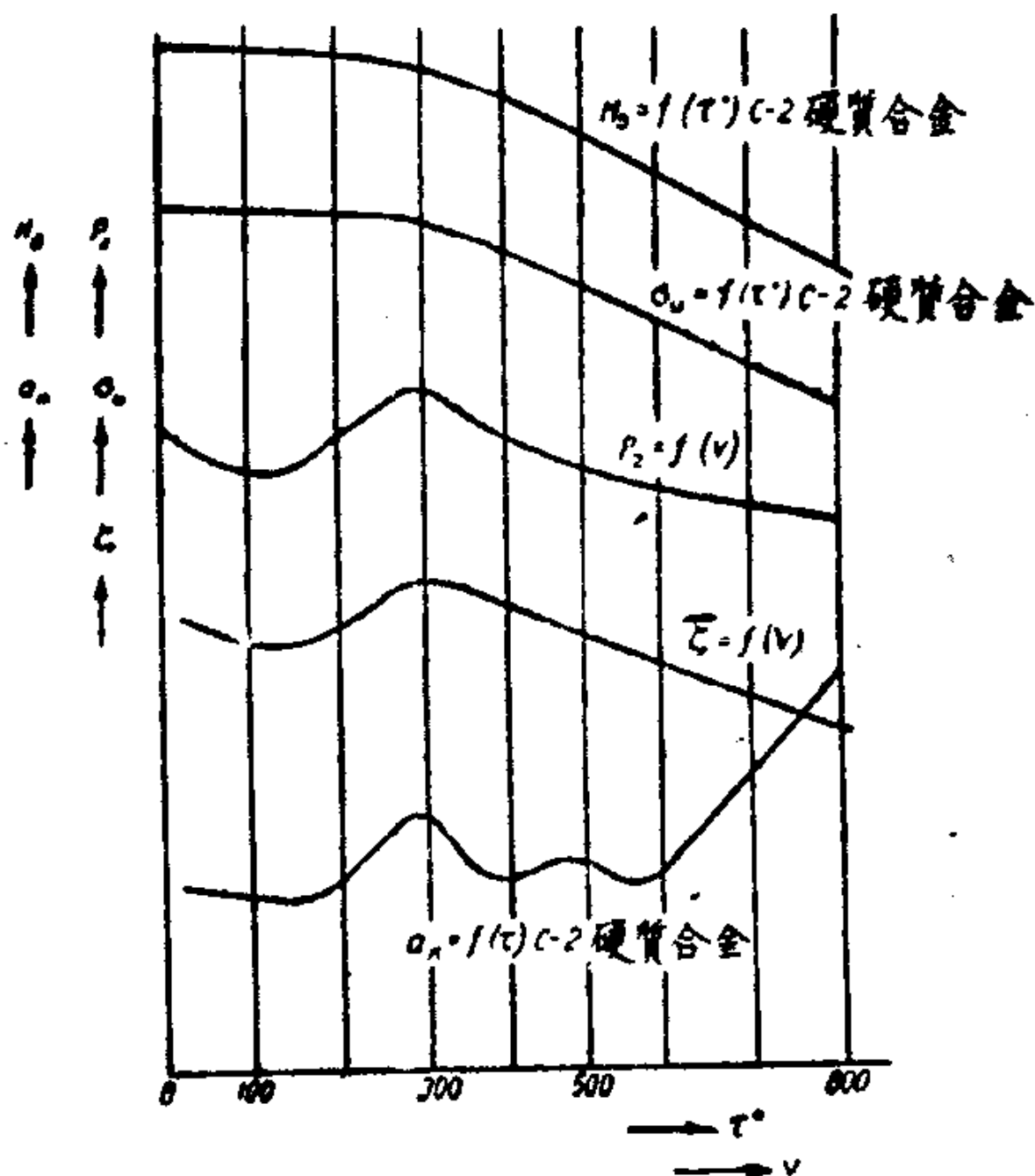


圖 13

至於硬質合金 C2 的衝擊韌性，則在加熱到 800°C 時，便顯著的增高。

機械性質變化的臨界點和曲線特性的變化，可能會受到金屬切削時所發生的切削力的影響，但是，很顯然的，理論關係將維持不變。

切削速度和硬質合金刀具壽命的關係

切削時，切屑壓向刀具的前面，因此發生了法線力 P_N (圖 14)，又在切屑移動時發生摩擦力 F 。在材料母體彈力作用下，發生一個向車刀後面作用的法線力 P_{N1} ，並在車刀推動時，沿着車刀的後面發生一個摩擦力 F_1 。

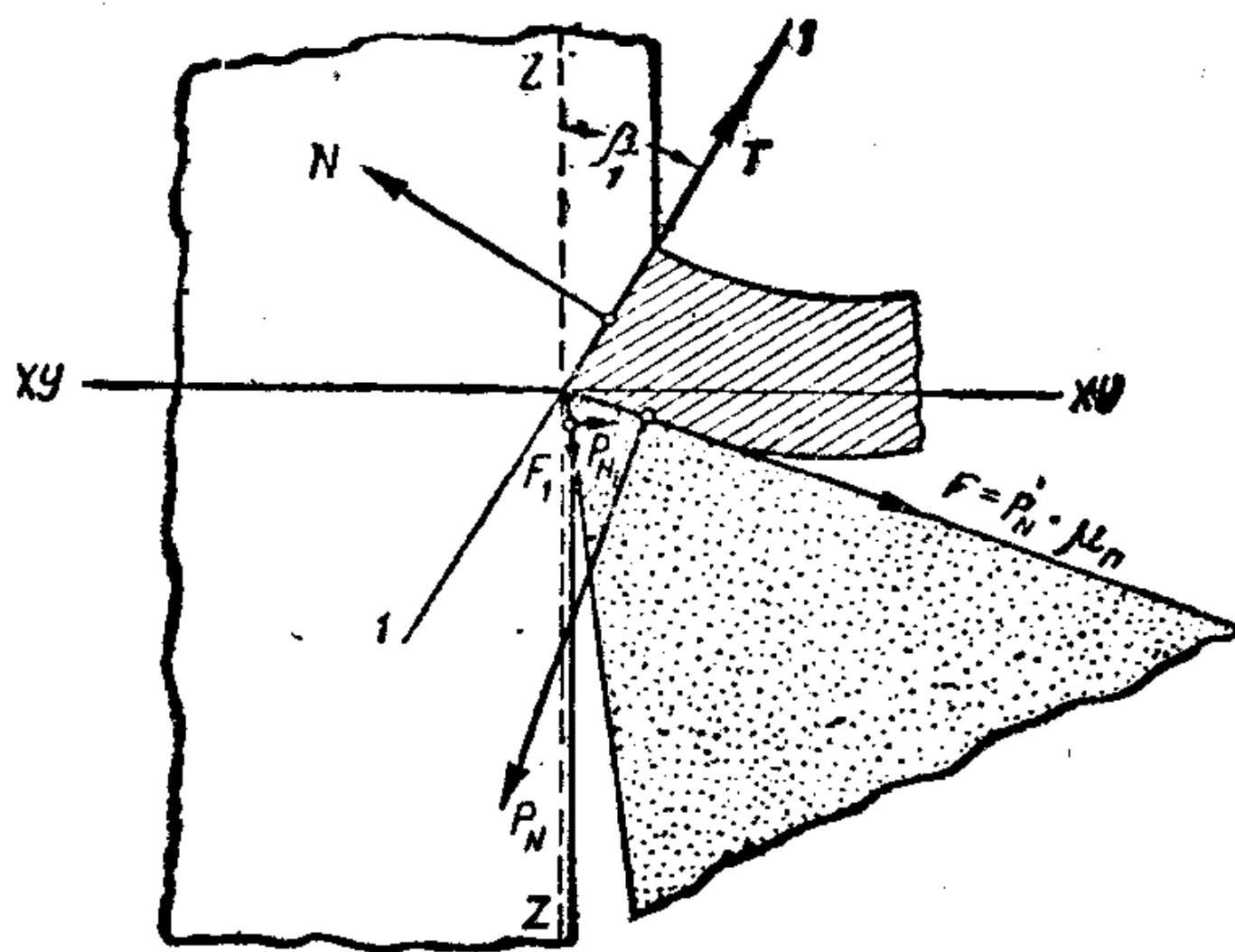


圖 14

將各力向 Z 軸投影，可得切線力 P_Z ：

$$P_Z = P_N \cos \gamma + F \sin \gamma - P_{N1} \sin \alpha + F_1 \cos \alpha \text{ (公斤)},$$

公式中 γ 為前角，以度計：

α 為後角，以度計。

將各力向 XY 平面投影時，則得出 R_1 ，它決定水平方向的吃力抗力 P_y 、走刀抗力 P_x 等。

$$R_1 = -P_N \sin \gamma + F \cos \gamma + P_{N1} \cos \alpha + F_1 \sin \alpha \text{ (公斤)}。$$

假如刀具尖銳，後角大，則作用於後面之力將較作用於前面之力為小。因此 P_Z 和 R_1 的近似方程式可寫作：