XIAOXUE SHUXUE QUTI JIEYI

小学数学趣题解疑

（六年级用）

杨春宏　主编

★河北科学技术出版社

小学数学趣题解疑

（六年级用）

河北科学技术出版社

主　编　杨春宏

副主编　杨亚伶　张生春

编　委　李勇惠　乔春美　任立志
成华菊　刘　亮　李金宇
李秀花　苏喜秀　郝国密
栾维华　池秀娟　赵秀平
张会娟

图书在版编目(CIP)数据

小学数学趣题解疑. 六年级/杨春宏编. —石家庄:
河北科学技术出版社,2001
ISBN 7-5375-2535-8

Ⅰ. 小… Ⅱ. 杨… Ⅲ. 数学课-小学-解题
Ⅳ. G624.505

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2001)第 076033 号

小学数学趣题解疑
(六年级用)
杨春宏　主编

河北科学技术出版社出版发行(石家庄市和平西路新文里8号)
保定市印刷厂印刷　新华书店经销

850×1168　1/32　5.75 印张　144000 字　2002 年 1 月第 1 版
2002 年 1 月第 1 次印刷　印数:1-3000　定价:8.00 元

前　言

七百多年前，英国伟大的哲学家、思想家罗吉尔·培根曾说："数学是科学大门的钥匙。"时至今日，数学更是各门科学发展的基础，而且现代科学技术的巨大进步主要得益于数学的发展。因此，在小学阶段形成一定的数学能力和数学素养就成为发展儿童科学文化素质的前提。《小学数学趣题解疑》丛书的编写，定位于小学生的第二课堂读物，目的是使小学生在掌握课本基础知识的前提下，拓宽他们的知识视野，挖掘他们的数学潜力，为将来升学及进一步发展作好充分的准备。在编写中力图体现如下三个特色：

1. 本丛书以拓展与深化课堂内容，适当兼顾小学数学奥林匹克为着眼点，恰当处理课本内容与课外内容、知识与能力、广度与深度的关系，使其既便于学生独立学习，又便于教师讲授和家长辅导，真正成为高质量的小学课外读物。

2. 本丛书按专题写作，所涉及内容相对独立，一步到位，各专题一般包括"基本概念与知识"、"典型例题分析"和"强化训练"三部分内容。编写中注重突出基础知识的概括性和指导性、选材的典型性和实效性、解题分析的思想性和启发性、例题与习题的新颖性和多样性，使小

学生通过阅读本书能够学会学习，学会思考，掌握基本的数学思维方法和解题技能，提高运用数学知识的能力。

3. 本丛书分三册编写，分别适合小学四、五、六年级使用。编写过程中注意通俗与趣味相结合，深入浅出，力图对具有中等学力以上的学生均有所裨益。

本丛书在编写过程中参考了一些专家学者的著述，在此一并致谢。由于时间仓促，书中不免有疏漏之处，敬请各位读者不吝指正。

编　者

2001 年 8 月 10 日

目　录

第一讲　不定方程

一、基本概念和知识

在一次新年联欢会上，老师提出让大家做一个游戏："请你们把自己生日的月份数乘 31，日期数乘 12，相加后的结果告诉我，我就能猜出你的生日。"其实，这是个不定方程的问题。某同学算出结果为 347。若设生日月份为 x，日期为 y，可得方程：$31x+12y=347$。

这种含有两个或两个以上的未知数的方程叫不定方程。若方程组中未知数的个数多于方程的个数，往往最后化成含有两个或两个以上未知数的方程，所以也可以看成是不定方程的问题。

以二元一次不定方程为例：一般形式为 $ax+by=c$，只要 a、b 不同时为 0，方程必有无穷多组解；若 $a\neq0$，则 y 每取一个数都可以求出相应的 x 值，构成方程的一组解；若 $a=0$，则 x 可取任意值，$y=\frac{c}{b}$，仍然有无穷多组解。

在小学阶段，我们主要研究整系数二元一次不定方程的正整数（自然数）解，而且我们求不定方程的正整数解的方法，一般用试验法。

二、典型例题分析

例 1 求不定方程 $3x+4y=23$ 的正整数解。

分析 此题用试验法逐一试验，但较复杂，范围大了些，想办法缩小范围。

解 将原方程变形为（即用其中一个未知数表示另一个未知数） $y=\frac{23-3x}{4}$。

因为 $x>0$，且 $23-3x>0$，

所以 $0<x<7\frac{2}{3}$。

因为 x、y 必须都是正整数，所以 $23-3x$ 是 4 的倍数，x 必为不大于 7 的奇数，取 $x=1$，3，5，7，列表如下：

x	1	3	5	7
y	5	$3\frac{1}{2}$	2	$\frac{1}{2}$

所以 $\begin{cases}x_1=1\\y_1=5\end{cases}$ 和 $\begin{cases}x_2=5\\y_2=2\end{cases}$ 是原方程的正整数解。

说明 试验法的基本步骤是：将二元一次不定方程变形，用其中一个未知数表示另一个未知数。根据未知数的取值范围列表，筛选出符合条件的全部解。

例 2 现有 3 米长和 5 米长钢管各 6 根，安装 31 米长的管道，问怎样接用最省料？

分析 最省料也就是尽可能的整根整根地用料。

此题实际上是关于解不定方程 $3x+5y=31$（$x\leqslant 6$，$y\leqslant 6$）的整数解问题。

解 设 3 米长钢管用 x 根，5 米长钢管用 y 根，列成不定方程 $3x+5y=31$，分两种思路求解。

$$x=\frac{31-5y}{3}$$

首先 $y\leqslant 6$，$y=6,5,4,3,2,1,0$。变形为 $x=10-\frac{5y-1}{3}$

试 y 值，使 $5y-1$ 是 3 的倍数，得

$$\begin{cases}y=5\\x=2\end{cases}\quad\begin{cases}y=2\\x=7\end{cases}$$

但每种管子各 6 根，所以有惟一解 $x=2$，$y=5$。

$$y=\frac{31-3x}{5}$$

首先 $x\leqslant 10$，$x=10,9,\cdots\cdots,2,1$。变形 $y=6-\frac{3x-1}{5}$，管子各 6 根，所以 $x=6,5,\cdots\cdots,0$。只有 $x=2$，$\frac{3x-1}{5}$ 为整数，所以有惟一解

$x=2$，$y=5$。

答：用 3 米长的 2 根，5 米长的 5 根。

例 3 55 人去游园划船，小船每只能坐 4 人，大船每只坐 7 人，问要租用大、小船各多少只？

[redacted]求不定方程的整数解时，利用同余的知识可以表达得简明清楚些。

解 依题意，设大船 x 只，小船 y 只，列出不定方程 $7x+4y=55$。变形，解出 $y=\frac{55-7x}{4}$，因此 $x\leqslant 7$，且得到

$55-7x\equiv 0\ (mod 4)$；

因此　$7x \equiv 55 \pmod{4} \equiv 3 \pmod{4}$，

但 $7 \equiv 3 \pmod{4}$，所以　$x \equiv 1 \pmod{4}$，而 $x \leqslant 7$，因此　$x=1$，或 $x=5$。

所以有　$x=1$，$y=12$ 以及 $x=5$，$y=5$ 两组解。

答：要租用大、小船各 1 只、12 只或 5 只、5 只。

例 4　六年级两班学生共 109 人，已知甲班男生占 $\frac{6}{11}$，乙班女生占 $\frac{4}{9}$，则两班共有男生多少人？

[redacted]此题乍一看是分数应用题，其实也是一道不定方程问题。因为只有知道甲班、乙班各有多少人，才能求出两班男生共多少人。而两班人数通过已知不能直接求出，缺少条件。由题意可知，甲班男生占 $\frac{6}{11}$，说明甲班人数一定是 11 的倍数。乙班女生占 $\frac{4}{9}$，说明乙班人数一定是 9 的倍数。甲、乙班共有 109 人，这样 11 的若干倍加上 9 的若干倍等于 109，就构成了不定方程。

解　设甲班有 $11x$ 人，乙班有 $9y$ 人。依题意有：$11x+9y=109$，将方程变形为 $x=\frac{109-9y}{11}$，可知 $y \leqslant 12$，$x \leqslant 9$，解这个不定方程，求得正整数解为 $x=5$，$y=6$。也就是甲班有 $11 \times 5=55$ 人，乙班有 $9 \times 6=54$ 人。

甲、乙两班男生共有 $55 \times \frac{6}{11}+54 \times \left(1-\frac{4}{9}\right)=60$ 人。

答：两班共有男生 60 人。

例 5　某人用 100 元买油菜籽、西红柿种子和萝卜籽共 100 包。油菜籽每包 3 元，西红柿种子每包 4 元，萝卜籽 1 元钱 7 包，问他每种各买了多少包？

[redacted]此题中出现了三种未知量，数量关系也较为复杂，但也能列出一个二元一次不定方程，然后按已学知识解出。

解 设买油菜籽 x 包，西红柿种子 y 包，则萝卜籽 $(100-x-y)$ 包，列不定方程：

$3x+4y+\frac{100-(x+y)}{7}=100$。求整数解，两边同乘以 7，得到 $21x+28y+100-(x+y)=700$。整理方程得到 $20x+27y=600$。将方程变形解出

$x=\frac{600-27y}{20}$，因此 $y\leqslant 22$，由于 $600\equiv 0\ (mod 20)$，所以有 $27y\equiv 0\ (mod 20)$；但 $(27,20)=1$，所以 $y\equiv 0\ (mod 20)$。所以 $y=20$，$x=3$，$100-x-y=77$。

答：购油菜籽 3 包，西红柿种子 20 包，萝卜籽 77 包。

例 6 100 匹马驮 100 筐物品，一匹大马驮 3 筐，一匹中马驮 2 筐，两匹小马驮 1 筐。问大、中、小马各多少匹？

解 设大马有 x 匹，中马有 y 匹，则小马有 $(100-x-y)$ 匹。由题意，列不定方程为：

$$3x+2y+\frac{100-x-y}{2}=100$$

两边都乘以 2 得到 $6x+4y+(100-x-y)=200$

即 $6x+4y+100-x-y=200$，

$$5x+3y+100=200,$$

也就是 $5x+3y=100$，将方程变形 $x=\frac{100-3y}{5}$，因此 $y\leqslant 33$。由 x、y 为整数，$5|100$，所以有 $5|3y$。那么 $y=0$，5，10，……，25，30。相应可以得到 x 及小马的数量，把结

果列出如下：

中马数 y：0，5，10，15，20，25，30。

大马数 x：20，17，14，11，8，5，2。

小马数量：80，78，76，74，72，70，68。

答：大、中、小马分别是 0 匹、20 匹、80 匹或 5 匹、17 匹、78 匹或 10 匹、14 匹、76 匹或 15 匹、11 匹、74 匹或 20 匹、8 匹、72 匹或 25 匹、5 匹、70 匹或 30 匹、2 匹、68 匹。

例 7 a、b、c 三个自然数，b、c 之和比 a 的 2 倍多 1，a、b 之和比 c 的 3 倍多 1，为使 a、b、c 三个数之和尽量小，b 是多少？

[redacted]由题意可知 a、b、c 三个自然数之间有如下关系 $b+c=2a+1$，$a+b=3c+1$。要求 b 是何数时，a、b、c 三数之和最小，显然关系复杂。要使其数量关系简化成二元不定方程才可求解。

解 由题意可知

$$\begin{cases} b+c=2a+1 \\ a+b=3c+1 \end{cases} \quad \text{变形为} \begin{cases} b=2a+1-c \\ b=3c+1-a \end{cases}$$

于是得到 $2a+1-c=3c+1-a$

整理得到 $3a=4c$，即有 $a=\frac{4}{3}c$。

由于 a、b、c 都是自然数，所以 c 是 3 的倍数时，a 才能得到自然数值。又因为要 a、b、c 三数之和最小，那么 c 取最小值，a 就取最小值，而 $b=2a+1-c$（或 $b=3c+1-a$）也就取最小值。所以 c 最小值是 $c=3$ 时，$a=4$。这时，$b=2\times4+1-3=6$ 也是最小值。

例 9 求不定方程$\frac{1}{6}=\frac{1}{x}+\frac{1}{y}$的全部整数解。

[redacted]对于方程$\frac{1}{6}=\frac{1}{x}+\frac{1}{y}$整理变形为：$\frac{1}{6}-\frac{1}{x}=\frac{1}{y}$，通分$\frac{x-6}{6x}=\frac{1}{y}$，则有 $y=\frac{6x}{x-6}$。这时不能像已学过的不定方程解法那样去试验了，因为 $x-6>0$，找起来漫无边际。为了使其简化，我们不妨把 $x-6$ 看成一个整体，令 $t=x-6$，那么 $x=t+6$。因此 $y=\frac{6\times(6+t)}{t}=\frac{6\times 6}{t}+6$，由于 y 是大于 0 的整数，所以$\frac{6\times 6}{t}$必须也是整数，这样我们推知：t 是 6^2 的因数（约数）。

由此，求不定方程$\frac{1}{6}=\frac{1}{x}+\frac{1}{y}$的整数解时，找两个未知数 x、y 的困难问题，就转化成找简单的 6^2 的因子 t 的问题了。

一个完全平方数的因子必然是奇数个，如 6^2 有因子 6、1 和 36、2 和 18、3 和 12、4 和 9。6 称为自补的因子，后面的 2 和 18 等都称为互补因子，这样，不妨记为：

$t_0=6$，$t_1=1$，$t_1'=36$；$t_2=2$，$t_2'=18$；$t_3=3$，$t_3'=12$；$t_4=4$，$t_4'=9$ 也即$\frac{6^2}{t_1}=t_1'$；……，$\frac{6^2}{t_4}=t_4'$。

由于 $x=t+6$，那么 $y=\frac{6^2}{t}+6=t'+6$。

$\frac{1}{6}=\frac{1}{x}+\frac{1}{y}$的所有解，表示成$\frac{1}{6}=\frac{1}{6+t}+\frac{1}{6+t'}$，这里 t 和 t' 是 $36=6^2$ 的互补因子（当 $t=t'=6$ 时自补因子也包括在内），所以$\frac{1}{6}=\frac{1}{x}+\frac{1}{y}$的全部整数解为：

$t_0=t_0'=6 \quad \frac{1}{6}=\frac{1}{12}+\frac{1}{12}$；$\left(\frac{1}{6+6}+\frac{1}{6+6}\right)$

$t_1=1$，$t_1'=36$，$\frac{1}{6}=\frac{1}{7}+\frac{1}{42}$；$\left(\frac{1}{6+1}+\frac{1}{6+36}\right)$

$t_2=2$，$t_2'=18$，$\frac{1}{6}=\frac{1}{8}+\frac{1}{24}$；$\left(\frac{1}{6+2}+\frac{1}{6+18}\right)$

$t_3=3$，$t_3'=12$，$\frac{1}{6}=\frac{1}{9}+\frac{1}{18}$；$\left(\frac{1}{6+3}+\frac{1}{6+12}\right)$

$t_4=4$，$t_4'=9$，$\frac{1}{6}=\frac{1}{10}+\frac{1}{15}$。$\left(\frac{1}{6+4}+\frac{1}{6+9}\right)$

由于 x、y 地位对等，$\frac{1}{x}=\frac{1}{7}$，$\frac{1}{y}=\frac{1}{42}$的解与$\frac{1}{x}=\frac{1}{42}$，$\frac{1}{y}=\frac{1}{7}$的情况我们都看成一种了。

解 将不定方程$\frac{1}{6}=\frac{1}{x}+\frac{1}{y}$变形为：

$\frac{1}{6}=\frac{1}{6+t}+\frac{1}{6+t'}$（$t$、$t'$是 6^2 的因子），而 6^2 的因子有1、2、3、4、6、9、12、18、36。逐一代入得到$\frac{1}{6}=\frac{1}{12}+\frac{1}{12}=\frac{1}{7}+\frac{1}{42}=\frac{1}{8}+\frac{1}{42}=\frac{1}{9}+\frac{1}{10}=\frac{1}{10}+\frac{1}{15}$。这样（$x$，$y$）的解为（12，12）、（7，42）、（8，24）、（9，18）、（10，15）、（42，7）、（24，8）、（18，9）、（15，10）。

答：略。

小结 以上情况推广到一般情况，求不定方程 $\frac{1}{n}=\frac{1}{x}+\frac{1}{y}$的整数解，只要找到 n^2 的全部成组互补因子 t 和 t'，则$\frac{1}{n}=\frac{1}{n+t}+\frac{1}{n+t'}$，就可得到全部解。

例如，求不定方程$\frac{1}{12}=\frac{1}{x}+\frac{1}{y}$（即 $n=12$）的整数解。首先分解 $12^2=(2^2\cdot 3)^2=2^4\cdot 3^2$，可知 12^2 共有 $(4+1)\times(2+1)=15$ 个因子。

按照互补或自补因子配对有：(1，144)，(2，72)，(3，48)，(4，36)，(8，18)，(16，9)，(12，12)。

所以$\frac{1}{12}=\frac{1}{x}+\frac{1}{y}$共有8种解（$\frac{12^2\text{的因子个数}+1}{2}=8$），如下：$\frac{1}{13}+\frac{1}{156}$；$\frac{1}{14}+\frac{1}{84}$；$\frac{1}{15}+\frac{1}{60}$；$\frac{1}{16}+\frac{1}{48}$；$\frac{1}{18}+\frac{1}{36}$；$\frac{1}{20}+\frac{1}{30}$；$\frac{1}{21}+\frac{1}{28}$；$\frac{1}{24}+\frac{1}{24}$。

习题 1

1. 求不定方程 $x+y=9$ 的所有整数解。

2. 某人 1991 年的年龄等于出生年份各位数字之和，请求出他的出生年份。

3. 甲种铅笔 7 分钱一支，乙种铅笔 3 分钱一支，张明用 6 角钱恰好买两种不同铅笔各多少支？

4. 大汽车能容纳 54 人，小汽车能容纳 36 人，现在有 378 人，问大、小汽车各要几辆才能使每个人都上车且每辆车上无空座？

5. 新发行的一套邮票共 3 枚，面值分别为 80 分、150 分和 250 分，小明花 19.8 元买了 14 枚。问：其中三种面值的邮票各多少张？

6. 有 100 名同学去操场踢足球、打排球和打篮球，每个足球场地 22 人，每个排球场地 12 人，每个篮球场地 10 人，他们共占了 8 个场地。问：三种场地各几个？

7. 求不定方程 $\frac{1}{5}=\frac{1}{x}+\frac{1}{y}$ 的全部整数解。

8. 求不定方程 $\frac{1}{30}=\frac{1}{x}+\frac{1}{y}$ 的整数解中，使 $x+y$ 为最小以及最大的两组解。

答案与提示

1. 有10组解：

$\begin{cases}x=0\\y=9\end{cases}$，$\begin{cases}x=1\\y=8\end{cases}$，$\begin{cases}x=2\\y=7\end{cases}$，$\begin{cases}x=3\\y=6\end{cases}$，$\begin{cases}x=4\\y=5\end{cases}$，$\begin{cases}x=5\\y=4\end{cases}$，$\begin{cases}x=6\\y=3\end{cases}$，$\begin{cases}x=7\\y=2\end{cases}$，$\begin{cases}x=8\\y=1\end{cases}$，$\begin{cases}x=9\\y=0\end{cases}$。

2. 1977年。

3. 共16支或12支。

4. 共有4组解：大车 x 辆，小车 y 辆，$y=10-x-\frac{x-1}{2}$，$x=1$，3，5，7。所以 x 只可取 $x=1$，3，5，7。

①只需7辆大车即可。

②需5辆大车，3辆小车。

③需3辆大车，6辆小车。

④需1辆大车，9辆小车。

5. 80分的6枚，150分的5枚，250分的3枚。

6. 足球场1个，排球场4个，篮球场3个。

7. $\frac{1}{5}=\frac{1}{10}+\frac{1}{10}=\frac{1}{6}+\frac{1}{36}$。

8. $\frac{1}{30}=\frac{1}{60}+\frac{1}{60}$时，$x+y$ 最小值为120。

$\frac{1}{30}=\frac{1}{31}+\frac{1}{930}$时，$x+y$ 最大值为961。