全国中小学教师继续教育网
www.teacher.com.cn

东北师范大学网络教育学院学历教育系列教材

SHUXUE

数学建模

JIANMO

东北师范大学网络教育学院 组编

李佐锋 /编著

东北师范大学出版社
Northeast Normal University Press

目　录

第一部分　绪　论

1.1　网络课堂简介

通俗地讲,“数学建模”网络课程研究的主要内容是,如何利用数学的方法和工具将一个需要解决的实际问题转化为其定量化的替代物——数学模型,然后通过求解和分析运用该数学模型,使实际问题获得定量化的解决.在生产和生活中遇到的许多实际问题都是希望给出其定量化的解决方案,这是因为定量化的解决方案,其科学性、数量化的确定性以及可操作性等,都是其他任何解决方案无法比拟的最佳方案.也恰恰是这个优越性,使“数学模型”与“数学建模”这两个词语使用的频率日渐增长,其应用的学科和领域日趋广泛,创造的价值则越来越大.数学建模的思想和方法几乎渗透到了所有的领域.因此,在网络课堂上开这门课程具有重要意义,期望它的开设能让网络教育培养出一批高素质的人才.

1.2　课程定位

“为什么要学习数学?”这是许多学生都感到困惑的问题.调查表明,绝大多数学生毕业后,在从事相关专业的实际工作中才明白这个道理.这对学生有效提高学习数学的积极性、学好数学都是十分不利的,理应说清楚.

首先,须要明确的是“数学是什么”.大家知道,数学是研究现实世界中的数量关系和空间形式的科学,因而与生产活动和其他学科有着密不可分的关系,是认识世界和改造世界不可或缺的工具.综观数学发展的历史,以建立形式化的演绎系统为特征的纯粹数学和以建立数学模型为标志的应用数学,总是相互交织进行的.从原始的结绳计数和丈量土地到古希腊的论证数学,从牛顿为建立物体运动模型而创立微积分到希尔伯特建立形式主义学派,从爱因斯坦的相对论推动了微分几何的研究到量子力学为泛函分析催生,从拓扑学为基因工程服务,抽象代数使通信编码更为合理到数学控制论将卫星准确送入轨道等,都离不开数学模型.而计算机技术的迅速发展,使得数学模型成为一种数学技术并直接产生经济效益,也使数学的发展获得了巨大的推动力.可以说,数学是数学模型及其理论拓展的总和,是来源于实践又反过来服务于实践,并在服务于实践中推动自身的进一步发展的学科.没有实际需求的数学是苍白的,没有应用意识的数学同样是苍白的,而应用数学解决实际问题的必由之路就是数学建模.

其次,随着素质教育的实施,通过学习数学来提高人的素质成为一个十分重要

的手段.这主要是因为,数学教育在培养人的空间想象能力、逻辑思维能力和抽象思维能力等方面都有其他学科不可替代的重要作用,而通过建立实际问题的数学模型来解决实际问题,不仅能在以上几个方面提高学生的能力,更能在培养学生的个性特征发展、团队精神、合作精神和创新精神等方面具有强大功能.这些恰恰也是参与现代化建设的人才不可缺少的优良素质.凡是学习过数学建模的学生都认为,“数学建模”不是一门一般的传统数学课程,他们所受的培养是前所未有的、有用的和卓有成效的.

最后,网络学院培养的学生大多数来自于中学教育界.作为培养现代化建设需要的全新人才的中学数学教师,必须懂得起码的数学建模的思想和方法.于是,数学建模课程便在网络数学教育中应需而出,成为一门重要的中学教师素质教育课程.

1.3 先修课程

本课程需要学员具有较为牢固的高等数学基础知识,其中包括单、多元微积分知识,简单的常微分方程知识,线性代数知识,简单的概率论与数理统计知识.课程涉及了差分方程模型和运筹学模型,考虑到大多数学员没有学过差分方程和运筹学,在处理这些内容时,给予了充分注意,不会影响学习效果.从培养学员具有善于学习和善于运用新知识解决实际问题的角度看问题,这恰恰是数学建模课程本身的特征和培养目标需要的.

1.4 课程概述

数学建模涉及的领域是极其广泛的.考虑到在职、业余、远程学习的网络学院的在职学员的特点,在课程内容和难度的定位上给予了以下几个方面的充分考虑:

1. 使学员形成一个意识,即通过数学建模解决实际问题的意识,摆脱传统数学教育中存在的忽视数学应用的错误倾向.

2. 使学员领会数学建模的基本思想、基本方法和基本步骤.

3. 为他们今后的教学积累一些有用的数学建模方面的资料.

1.5 学习者入门导言

正如课程定位所述,数学建模是一门值得学习和掌握的课程.数学建模课程又是一门以学习解决实际问题的思路和方法为主要目的的课程,因而不下点工夫就不会有较大收获.那么,该怎样学习本课程呢?下面给出以下几点学习建议以供参考.

1. 一定要亲身去做,去实践.学习建模就像学习游泳一样,必须亲身实践,只是欣赏别人的数学模型的人,永远不会拥有让别人欣赏的数学模型.只有亲身参与了数学建模活动,才能感到自己数学知识或数学思想方法上的不足,激发起自己探究数学的积极性.数学本领提高了,参与数学建模就会更加得心应手.

有人说，数学建模是一门艺术，而艺术在某种意义下是无法归纳出几条准则或方法的. 一名出色的艺术家需要大量的观摩和前辈的指教，更需要亲身的实践，最终青出于蓝而胜于蓝. 完全类似地，掌握建模这门艺术，培养自己解决实际问题的能力，不仅要大量阅读、思考别人做过的模型，而且要亲自动手，认真地做上几个实际题目. 出于这个目的，本课程主要采用了实例研究法，即给出各个应用领域采用不同数学方法建模的大量实例供读者研读，并提供若干题目供大家自己练习.

2. 适时地与附近的厂矿、企业等实际生产单位取得联系，不妨无偿地为他们服务，解决点他们需要解决的生产、生活实际，在帮助他们解决问题的同时提高自身的建模能力. 这也是最好的学习数学建模的方法.

1.6 教学实施与评价方式

数学建模课程的学习，一方面要学习和领会数学建模的基本思想、基本方法和基本步骤，另一方面要善于动手去解决实际问题. 根据这个基本思想，我们有以下教学实施与评价的具体要求和做法：

1. 在网络学院的整体学习安排和要求框架下，按照本课程的基本要求完成网上学习任务，弄清学习内容，记学习笔记，并用自己的语言(不是课程内容的剪裁)总结：

(1)学习内容中的重点.

(2)理解上感到困难的难点.

(3)对每一章、节主要内容的理解和认识.

我们将定期进行检查，并作为平时成绩给予记录，同时作为总成绩的重要调整量.

2. 认真完成每一章后的每一个习题，要求按照数学建模的程序或者思路完成，以养成良好的数学建模思想.

3. 特别要注意完成好课程中每一个建模实例后的思考与练习题目.

4. 在学期中，将进行一次考核，内容是撰写一篇数学建模论文，题目都是来自生产和日常生活中的实际问题. 提倡就近与 2～3 名同学(最多 3 个人)组成建模小组一起合作完成问题，组内成员每个人的成绩相同，要求：

(1)分工明确，并在论文中指明每个人所做的具体工作.

(2)按照数学建模以及论文写作的要求进行撰写(具体要求见关于论文的写作要求).

这部分成绩占总成绩的 40%.

5. 期末考核采用闭卷笔试方式. 主要题型及其内容如下：

(1)填空题，内容是课程内容中某些重要结论的直接运用，一般为 4 个小题，每题 5 分.

(2)分析判断题，内容是给定一个实际问题，或者要求分析出问题涉及的相关因素是什么，或者给出问题模型后，在适当的假设下，进行一定的模型简化，或者给

定问题的结论后，用数学建模的方法判断结论的正确性和合理性等，一般为2个小题，每题10分.

(3)计算题，内容是给定一个简单的实际问题，要求首先建立模型，而后进行求解，一般为2个小题，每题20分.

(4)综合应用题，内容是建立一个简单的实际问题，但要求写出建模的全过程. 这类问题通常是很简单的问题，且与上述(2)，(3)中的要求密切相关，本类题20分.

1.7 参考教材简介

1. 申大维，方丽萍，叶其孝等. 数学的原理与实践. 北京：高等教育出版社，1998.

本书是由美国在大学及中学数学教育方面颇有影响的数学及其应用联合会(COMAP)组织并指导编写的一本改革教材，出版前在美国许多大学进行试教，并且作了多次修改. 它是一门全新设计的大学数学入门教材，内容涉及数学的诸多分支. 书中介绍了数学在日常生活和现代科学技术中的广泛应用，以引起学生学习数学的兴趣和动力. 在内容的展开上，不追求理论的全面与完整，而重视背景与原理……

2. 袁震东，蒋鲁敏，束金龙编著. 数学建模简明教程. 上海：华东师范大学出版社，2002.

《数学建模简明教程》是全国中小学教师继续教育用教材，是鉴于已经出版的数学建模教材大多为高等数学模型，与中学数学教学实际相距较远而特地结合中学数学教师的需要编写的数学建模教材. 本书的起点较低，坡度较小，涵盖了数学建模的主要内容，着眼于数学建模思路的阐述，强调了建模中计算机的应用.

3. 王尚志主编. 北京高中数学知识应用竞赛试题及解析. 长春：东北师范大学出版社，2002.

本书搜集了自第一届至第五届的北京高中数学知识竞赛的试题(包括初赛与决赛的全部试题)，并给出了试题的解析. 在开头部分，还转载了中国科学院院士、北京大学教授姜伯驹在"开展高中数学知识应用竞赛，推动数学教育改革动员会"上的讲话(题目是"让普通大众了解数学对世界的意义").

4. 徐全智等. 数学建模. 北京：高等教育出版社，2003.

本书内容包括绪论、数学与现实世界、建模方法论、量纲分析法、机理分析建模法、数据处理、模拟模型和科技论文等，还编入了丰富的模型范例及建模练习题，登载了近年来电子科技大学组织大学生数学建模活动的经验和体会.

5. 王尚志，李延林主编. 中学生研究性学习案例. 长春：东北师范大学出版社，2003.

本书是在北京高中数学知识竞赛活动中收集到的论文的一小部分，是由学生完成得比较优秀的研究性小论文. 论文内容涉猎了日常生活中方方面面的实际问

题及其数学解决方案.

6. 姜启源，谢金星，叶俊编. 数学模型. 北京：高等教育出版社，2003 年 8 月.

本书第二版包括初等数学模型、确定性连续模型、确定性离散模型、随机模型等内容. 第三版考虑到计算机技术与数学软件的发展和普及，在大体保持原貌的基础上，作了较大的修改和补充，增加了数学规划模型和统计回归模型，以及若干模型求解的数值计算、图形演示、灵敏度分析等内容.

7. 谢兆鸿，范正森，王艮远编著. 数学建模技术. 北京：中国水利水电出版社，2003.

本书共有 9 章，前 3 章介绍了数学建模的概念、模型建立的基本方法、模型开发的步骤和如何进行模型的检验. 从第 4 章开始，按照离散模型、连续模型、微分与积分模型和概率统计模型的分类，详细叙述了根据不同对象采用的相应数学建模的方法. 第 9 章对建模过程中常用的几种数学软件的用法进行了简明扼要的介绍.

8. 李佐锋等. 数学建模(修订版). 北京：中央广播电视大学出版社，2003.

本书主要介绍了最常见的四类基本数学模型的建立方法及相关学科知识，包括初等数学模型、微分方程模型、运筹学模型和概率统计模型. 考虑到本书的教育对象是电大学生，具有在职、业余和远程自学的特点，主要介绍这四类数学模型中的较基本、较简单的部分，采取低起点、细分析、深入浅出又通俗易懂的方法，达到了基本上能够无师自通的目的. 在讲授这四类模型之前，专设一章介绍数学建模的基本方法、基本原理和基本步骤，并通过一些典型实例加以详尽说明.

第二部分　教学内容

第一章　数学建模方法论

作为整个数学建模课程的基础章，本章将介绍数学建模方法论的基本内容.

应该指出，数学建模是一门纯粹的应用数学分支，它的开设不是为了学习新的数学知识，而是试着运用已有的数学知识、数学思想和数学方法去解决完全来自于现实世界的实际问题. 那么，应该如何运用数学知识解决实际问题呢？这便是本章试图解决的主要问题.

自然地，要想清楚这些问题，首先必须清楚为什么要开设数学建模这门课程. 有了明确的学习目的，该如何进行学习，方法论自然是首要的. 于是，数学建模的概念、性质(特点)、基本步骤的介绍又成为必需……具体内容从下面的“教学内容”可见一斑.

应该指出的是，关于数学建模方法论的提法肯定是大了些. 实际上，本章主要是介绍了数学建模的方法中的机理分析方法中常用的某些技能和技巧. 但是，这些常用建模技巧对初学者来说确实具有很强的指导性，理解好了，运用恰当了，常常能比较容易地建立起一些不错的数学模型，从而带给我们一种成就感，一种继续学习下去的勇气和决心，一个走向数学建模纵深领域而有所成就的台阶. 从这个意义上讲，称本节为数学建模方法论更是可以理解的，更是编者的初衷.

一、带着问题学习

1. 为什么学习数学建模？其实际意义以及对于从事的数学教学上的意义何在？

2. 什么是数学模型？数学建模又是怎么回事？它与数学应用类题目的区别是什么？其定义为什么那么烦琐？

3. 数学建模的基本步骤有哪些？它与数学应用类题目的区别在这里是如何体现的？

4. 数学建模的特点有哪几条？为什么要说明数学建模的特点，而且在实例研讨之前给出？假如不是在这里给出，是否会对后面的学习产生影响？

5. 数学建模的基本方法是什么？在建模过程中常用的基本原理和手段都有哪些？不妨进行较为详尽的体会性总结. 是否还有其他的知识或者法则可资利用？

6. 详尽总结问题分析、模型假设、模型建立、模型求解、模型分析这五个基本步骤的内涵和外延，并且使用自己的、可以运用于教学设计中的语言给予总结和说明.

7. 这一章中的哪些实例最有意思？不妨分成两个部分说明：其一是不大适合于中学教学内容，但值得研究探讨的具有建模味道的实例；其二是比较适合于现行中学教学内容的实例，以及稍加修改即可适合于中学教学内容的实例. 假如各位读者愿意，欢迎将你修改后的建模实例和原有材料拿出来，和学友们交流，与教师切磋.

二、学习目标

理解数学模型与数学建模的概念、特点和作用，掌握数学建模的基本方法与步骤.

三、重点、难点与学习建议

数学建模方法不仅是本章，也是整个课程的重点、难点所在. 为此，我们建议：

1. 学习过程中，随时翻阅可能已经有些淡忘的相关数学专业知识方面的书籍，不能因为这方面知识欠牢而影响用它们去解决实际问题这一主题. 特别是《数学分析》、《高等代数》、《应用概率统计》、《微分方程》和《运筹学》这五本专业书籍，应放在身边以随时备查.

2. 认真弄懂每一个具体实例的内容和步骤，以及用到了什么建模方法，特别是要知晓它是怎样从实际问题转化为数学模型的.

3. 每一章、节下来，只要是布置的思考题和练习题，就一定要一个不漏地试着用学过的方法和步骤解决掉.

4. 建议就近与 2～3 名同学组成学习小组，以便在争论中求得知识的互补与问题的成功解决.

总之，勤于动脑思考，勤于动手，敢于创新，不怕出错，善于不断弥补自己的不足，是学好本课程的关键，务求落实.

四、教学内容

1.1　序　论

1.1.1　数学建模课程开设的目的

1.1.2　本书学习的主要内容

1.1.3　数学建模课程习题配置问题的说明

1.2 数学建模方法概论

1.2.1 数学模型与数学建模

1.2.2 数学建模基本流程

1.2.3 数学建模的特点

1.2.4 数学建模常用的方法和原理

1.3 数学建模方法分论

1.3.1 问题分析与模型假设

1.3.2 模型的建立

1.3.3 模型的求解

1.3.4 模型的分析

1.3.5 建模实例

1.3.6 初等数学建模问题

五、正　文

1.1 序　论

1.1.1 数学建模课程开设的目的

1.数学的应用已经进入了人们生产和生活的众多领域，诸如经济、人口、生态、医学、社会等领域.下面看几个实例：

问题1　合理捕捞问题

老王承包了一个很大的鱼塘，成了养殖专业户.过了一段时间，他想，该进行捕捞了，可是如何捕捞才能获得最大收益呢？请你协助老王制定一个捕捞计划.

问题2　生产规划问题

工人老张下岗后想利用自己的一技之长生产一些产品以维持生计.目前，他手头仅有1万元钱的积蓄可供支配，他希望你能帮他设计一个生产计划，使所获利润最大.

问题3　传染病流行控制问题

如今的传染病是越来越多了，“非典”刚过又来了禽流感.该如何对它们进行有效的控制呢？

类似的问题不胜枚举，而其解决都无一例外地要通过建立数学模型才能给出圆满回答.那么，作为(应用)数学工作者，建立数学模型就是沟通摆在他们面前的实际问题与他们掌握的数学工具之间联系的一座必不可少的知识之桥.因此，我们必须学会这种“沟通”的方法，而这个方法就是“数学建模”.

2.数学建模课程的开设不是让我们去学习数学，而是试着去用数学解决实际问题.从这个意义上讲，本课程尚有其另一个十分重要的功能，即通过学习和实践，全面提高学员的综合素质，培养创新能力和良好的数学思维品质，获得分析和解决

实际问题的能力. 这是本课程独有的、其他任何数学课程都不可替代的重要的和基本的作用.

3. 马克思说过：一门科学的发展水平可以用数学被应用于该门科学的水平作为标志. 从这个意义上讲，数学建模领域是我们数学工作者自由驰骋的最广阔天地.

1.1.2 本书学习的主要内容

1. 通过一些典型实例介绍数学建模的基本概念、特点、作用、基本方法与基本步骤. 这一部分内容是学好数学建模课程的基础.

2. 介绍最常见的初等数学模型、微分(差分)方程模型、运筹学模型、概率统计模型等这几类基本数学模型的建立方法及相关学科知识，并通过一些典型实例加以详尽说明.

3. 介绍一个常用的建模方法——层次分析法. 由于这个方法简单而使用面较广，根据学员的意见，安排在了最后一章，为选学内容.

1.1.3 数学建模课程习题配置问题的说明

一般的数学课程的练习题，可以说大部分内容应是与该章节有关的概念、定理和公式的具体运用，以熟悉和掌握相关的内容为训练目的. 数学建模课程与之不同，其习题尽管也是为该章内容服务的，但几乎每道题目都需要重新考虑和建构. 具体说来，几乎每一道题的做法都无固定公式和定理可套用. 也就是说，学员只能循着该章介绍过的模型的建立和分析的基本原理、基本思想与基本方法去面对每一道练习题，重新去分析、假设后再建立该题目的模型，并自行选择相应的数学工具加以求解和检验等，从中去体会和了解本章讲述的各种数学模型的基本建模思想和方法. 这样，数学建模课程习题的配置就有以下两个特点：一是量少，二是几乎每一道题都必须有创新之处. 同一题目，各人做法和结果可以完全不同. 作为习题的参考答案则只能是提供一些思路或提示，很少再有具体的答案. 而评判一个习题做的水平高低主要依据对问题的分析与假设的合理性，模型的创新性，求解与分析检验的到位情况，叙述的清晰性等. 这也从一个侧面说明，数学建模课程不是“学数学”，而是试着去“用数学”解决实际问题.

1.2 数学建模方法概论

1.2.1 数学模型和数学建模

应该说数学模型与数学建模是大家早已十分熟悉的概念. 早在中学的时候，我们就已经用建立数学模型的方法来解决实际问题了，只不过这些问题是老师为教会学生相关知识而事先人为设置好了的，我们也没有充分注意到它们就是数学模型罢了，譬如说下述这类“实际”问题.

设某厂投产一种新型家用轿车，第一年生产了 4 万辆，第二年、第三年产量持

续增长，计划到第三年末，市场共拥有 19 万辆这种品牌的轿车，那么后两年的增长率是多少？

这是中学代数中的一道应用题——增长率问题. 设平均增长率为 x，则易得 $4x^2+12x-7=0$，解之即可.

实际上，这里的一元二次方程就是上述增长率问题的数学模型. 一旦给出这个模型，这个现实问题便转化为纯粹的数学问题，而求解这个数学问题得到的 x 的值 $x_1=\frac{1}{2}$，$x_2=-\frac{7}{2}$ 便给出了这个现实对象的一个解答. 当然，经检验 $x_2=-\frac{7}{2}$ 不符合题意（实际），应舍去. 至此，这个现实对象经过这种数学的处理后获得解决.

诚然，真正实际问题的数学模型与建立数学模型的过程通常要比这复杂得多，但其基本内容与过程已经包含在建立和求解这个代数应用题的过程中了，即有以下建模基本过程：

第一步，根据现实对象的背景和要求进行**问题分析**.

若增长率为常数 x，根据题意，第二年的产量为 $4(1+x)$，第三年的产量为 $4(1+x)^2$，从而到第三年末的总产量为

$$4+4(1+x)+4(1+x)^2$$

第二步，根据问题的要求和建模目的作出**合理的简化假设**.

本例中，设增长率为常数 x 并不合理，因为实际中的增长率通常不会是常数，但在中学阶段，这个假设就是合理的. 换句话说，假设的合理性与研究者使用的工具和研究范围有关.

第三步，根据问题分析与假设，利用相应的物理或其他有关规律建立起现实对象的数学表达式——**建立数学模型**.

本例经整理后的数学模型是

$$4x^2+12x-7=0$$

第四步，使用相应的数学方法求解数学模型，以给出现实对象的数学解决——**模型求解**.

本例使用一元二次方程的因式分解法（或公式法）解得

$$x_1=\frac{1}{2},x_2=-\frac{7}{2}$$

第五步，对模型的解给予检验和解释——**模型分析**（包括检验、修改、应用和评价等）.

本例中，$x_2=-\frac{7}{2}$ 不合实际应舍去，而 $x_1=\frac{1}{2}$ 符合实际应保留，于是根据现实对象所提的问题获得解决.

注意，若所得两解均不符合实际，则所建数学模型有错误，应推倒重建. 这是数

学建模完全可能出现的情况,其原因往往是问题分析错误或假设不合理所致.

综上分析,我们可以给出数学模型与数学建模的较为严格的定义:**对于现实世界的一个特定对象,为了一个特定目的,根据对象特有的内在规律,在做出问题分析和一些必要、合理的简化假设后,运用适当的数学工具得到的数学结构,就称为该特定对象的数学模型. 依据上述几个基本步骤建立数学模型的全过程称为数学建模. 为方便起见,数学模型和建立数学模型常简称为"模型"和"建模".**

1.2.2 数学建模基本流程

我们已经给出或者更确切地说向大家推荐了一个数学建模的基本流程,即"问题分析⇒合理的简化假设⇒建立模型⇒模型求解⇒对模型解的分析、检验、修改与推广". 用框图描述如图 1 - 1 所示.

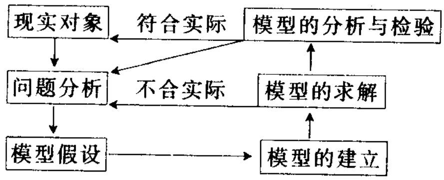

图 1 - 1

当我们面临新的建模问题时,这个流程是极具指导意义的. 应当注意的是,这个流程的目的是指导我们更好地进行建模实践,其应用是可以有弹性的,切勿生搬硬套. 也就是说,不是每个建模问题都要一个不差地经过这五个步骤,其顺序也不是一成不变的. 一个具体建模问题要经过哪些步骤并没有固定的模式,通常与实际问题的性质、建模的目的等有关. 在后面的内容中,我们将结合实例对这个流程详加说明.

1.2.3 数学建模的特点

在学习后续的建模实例时务请充分注意以下特点:

1. 数学建模不一定有唯一正确的答案. 这一点很重要. 事实上,对于一个实际问题,不同的人、不同的建模目的、不同的建模方法、不同的时间场合、不同的分析假设都可能导致完全不同的结果. 因此,数学建模的结果无所谓"对"与"错",但有优与劣的区别,评价一个模型优劣的唯一标准是实践检验.

2. 数学建模没有统一的方法. 对同一个问题,各人因其特长和偏好等方面的差别,采取的方法可以不同. 使用近代数学方法建立的模型不一定就比采用初等数学方法建立的模型好,因为我们建模的目的是为了解决实际问题.

3. 模型的逼真性与可行性. 尽管人们总是希望模型尽可能逼近研究对象,但是一个非常逼真的模型在数学上通常是难于处理的,因而达不到通过建模解决实际问题的目的,即实际上不可行. 因此,在建模时不必追求模型的完美无缺,而只要符

合实际问题的基本要求即可.

4. 模型的渐进性. 稍复杂一些的实际问题的建模通常不可能一次成功,往往要反复几次建模,包括由简到繁,也包括由繁到简,以期获得越来越满意的模型,这也符合人们认识问题的规律性.

5. 模型的可转移性. 模型是对现实对象进行抽象化和理想化的产物,常常不为对象的所属领域独有,完全可能转移到另外的领域中去. 充分利用它,会取得意外的收获,这个特点也是使用类比法建模的基础.

1.2.4 数学建模常用的方法和原理

常用的建模方法有机理分析法和测试分析法等. 一般地,若问题的内部机理比较清楚,并且容易识别,则常用机理分析法. 用这种方法建立的模型常有明确的物理或现实意义. 若不清楚研究对象的内部机理,也无法直接寻求,即所谓黑箱系统,并且模型也不是用于分析内部特性,譬如仅用来做输出预报,则常用测试分析法. 另外,将两种方法结合起来也是常用的建模方法.

本课程将重点放在机理分析法上. 在将机理分析法具体运用于建模时常常还要借助于一些带有规律性的方法与原理. 为此,我们再简述几个常用的原理与技巧:

1. 利用各种定律建模. 例如,物理定律、化学定律、经济学定律、医学定律和数学本身的各种定律等.

2. 利用平衡原理建模. 所谓平衡原理是指自然界的任何物质在其变化的过程中一定受到某种平衡关系的支配. 注意发掘实际问题中的平衡原理是从物质运动机理的角度组建数学模型的一个关键问题,就像中学的数学应用题中等量关系的发现是建立方程的关键一样.

3. 利用类比方法建模. 类比法是建立数学模型的一个常见而有效的方法,做法是把问题归结或转化为我们熟知的模型上去给以类似的解决:这个问题与我们熟悉的什么问题类似? 如果有类似的问题曾被解决过,建模工作就可省去许多麻烦. 实际上,许多来自不同领域的问题在数学模型上看,确实具有相类似的,甚至相同的结构.

4. 利用几何图示法建模. 有不少实际问题的解决只要从几何上给予解释和说明就足够了,这时只须建立其图模型即可. 这种方法建立的模型既简单又直观,且其应用面也很宽.

值得说明的是,这些方法或原理在应用中也没有严格界限,往往是交织在一起使用.

在下面的叙述中,我们将结合建模的基本步骤把这些方法揉合于其中介绍,并在后续的四类模型的建立过程中具体介绍和加以强化训练.

1.3 数学建模方法分论

1.3.1 问题分析与模型假设

“问题分析”与“模型假设”是前述五步建模法的头两步，也是整个数学建模最关键的两步，这两步成功与否将决定整个数学建模过程的成败.

问题分析也称为“模型准备”或“问题重述”. 由于数学模型是建立数学与实际现象之间的桥梁，因此，首要的工作是要设法用数学的语言重述实际现象. 所谓问题重述是指把实际现象尽量地使用贴近数学的语言进行重新描述. 为此，要充分了解问题的实际背景，明确建模的目的，尽可能弄清对象的特征，并为此搜集必需的各种信息或数据，捕捉对象特征中隐含的数学因素，并将其一一列出(此时我们是不怕多的，只怕一个也列不出). 至此，我们便有了一个很好的开端. 这个良好的开端，不仅可以决定建模方向，初步确定用哪一类模型，而且对下面的各个步骤都将产生影响.

模型假设是与问题分析紧密衔接的一个重要步骤. 根据对象的特征和建模目的，在问题分析基础上对问题进行必要的、合理的取舍简化，并使用精确的语言作出假设，是建模至关重要的一步. 因为一个实际问题往往是复杂多变的，如不经过合理的简化假设，将很难转化成数学模型，即便转化成功，也可能是一个复杂的难于求解的模型，从而使建模失败. 于是，必须舍去次要因素，抓住主要因素，进行必要的筛选. 如果还是觉得认定的主要因素多，为了能顺利建模，也必须舍弃，或者说至少是暂时不予以考虑，等到最后在模型分析时再给予考虑，或者在本模型建立中根本不予考虑. 当然，假使做得不合理或过于简单也同样会因为与实际相去甚远而使建模归于失败. 一般地，作出假设时要充分利用与问题相关的有关学科知识，充分发挥想象力和观察判断力，分清问题的主次，抓住主要因素，舍弃次要因素.

在我们选定的因素里，为建模需要，也常常要进行合理的简化，诸如线性化、均匀化、理想化等近似化处理，这也是满足建模所用数学方法必须的前提条件. 当然，假设不能违背实际问题的主要特征和建模目的. 有人说，进行假设的目的就在于在第一步中列出的各种因素中选出主要因素，忽略非本质因素，既使问题简化以便进行数学处理，又要抓住问题的本质. 这不无道理. 另外，为建模顺利，写假设时，语言要准确，就像做习题时写出已知条件一样. 所有这些就是模型假设这一步要做的工作. 易见，问题分析与模型假设的重要地位. 下面结合具体例子给予说明.

例 1 方桌问题

日常生活中经常碰到这样的事情：把方桌置于地面上时，常常是只有三只脚着地而放不稳，通常须要调整几次方可将方桌放稳，试用数学语言对此问题给以重述，并用数学工具给予说明：方桌能否在地面上放稳？若能，请证明，并给出做法；否则，说明理由.

我们来看看这个似乎与数学毫无关系的实际问题是怎样一步步地转化为数学问题,并用数学工具给以证明的.

问题分析

所谓方桌能否在地面放稳是指方桌的四个脚能否同时着地,而四个桌脚能否同时着地是指四个桌脚与地面的距离是否同时为 0. 于是,可以转而研究四个桌脚与地面的距离是否同时等于 0. 这个距离显然是变化的,于是可视为函数,那么作为函数,它随哪个量的改变而改变呢? 构造这个距离函数就成了主要建模目的.

为了构造函数和设定相关参数,让我们实际操作一下,从中搜集信息,弄清其特征(这也是建模中常用的策略). 要想四个桌脚同时着地,通常有两种方法,一是将方桌搬离原地,换个位置试验;二是在原地进行旋转试验. 第一种做法需要研究的范围可能要很大,这里采取第二种做法(请读者一定做一下:沿逆时针或顺时针慢慢旋转几个小角度即可). 易得出结论:**只要地面相对平坦,没有地面大起大落情况**,那么随着旋转角度的不同,三只脚同时落地后,第四只脚与地面距离也不同(即旋转中总有两个脚同时着地,而另两个脚不稳定). 也就是说,这个距离与旋转角度有关,是旋转角度的函数,于是一个确定的函数关系就找到了. 不仅如此,问题也顺其自然地转化为:是否存在一角度,使四个距离函数同时为 0?

综上分析,问题可以归结为证明函数的零点的存在性,遂决定用函数模型予以处理.

请注意上述内容中的黑体字,它实际上蕴涵了使方桌放稳的一些前提条件,而这些往往是下一步要做出的假设的部分内容. 就此,我们给出本问题的模型假设如下:

模型假设

1. 桌子的四条腿同长(这个假设显然合理,而且避免了问题与桌腿长度有关使问题变复杂,但在问题分析中没有注意到).

2. 将方桌的桌脚与地面接触处看成一个几何点,四脚连线为正方形(这是因为问题本身考虑的是能否四脚着地而与桌腿样式、粗细、质地等无关. 像这样将问题抽象化,将易于在数学上进行处理).

3. 地面相对平坦,即在旋转所在地面范围内,方桌在任何位置至少有三只脚同时着地(这是符合实际的合理假设,也是在问题分析中注意到了的).

4. 地面高度连续变化,即可视地面为数学上的连续曲面(这样,所设的高度函数便成为角度的连续函数).

在上述假设之下,所设的高度函数就成了定义在角度区间$[0,2\pi]$上的连续函数. 若设角度为 θ,则可写高度函数为 $f(\theta)$. 至于其模型建立就不在话下了.

例 2 走步问题

考虑如下问题:人在匀速行走时,步长多大才能最省力?

问题分析

所谓省力是指走步做的功最少.走步时，步长过大或过小都不省力，因而必有一个合适的步长，使做功最少(做功大小应是步长的函数).当然，做功还与许多因素有关，譬如提高人体重心所需势能，两腿运动所需动能(可由数学公式表达)；所穿衣物多少，是否负有重物，穿的鞋子是否轻便，行走地面是否平坦与干燥，走路时腿的运动形式(可否都用数学语言表达)等.建模目标:求一个功函数.它应该是步长的函数.

模型假设

为了简化问题，先做如下假设：

1.人行走时做的功由两部分组成:抬高人体重心所需势能与两腿前后运动所需动能.暂不考虑负重(划定主要因素).

2.运动与所穿鞋子、衣服情况无关，地面是相对平坦而干燥的(舍弃次要因素).

3.人的行走可视为腿(直杆)绕腰部的转动(理想化表达).

4.设定下列参量:M——人的体重，m——人的腿重，l——人的腿长，v——人行走的速度，n——单位时间行走的步数，x——步长.

有了以上分析和假设，只须根据物理中的势能公式和动能公式计算出运动所需的势能和动能(它们是步长的函数)，然后求其最小值即可.

例3　热传导问题

在比较寒冷的北方城镇，双层玻璃密封窗使用的十分普遍.这种窗户上的玻璃是双层的，两层玻璃中间有一定空隙，是利用橡胶制品将中间的空气与外界隔离而制成.据说，这种窗户保暖效果比过去沿用多年的单层玻璃窗要好，试建立其数学模型以描述双层玻璃密封窗的保温功能.

问题分析

1.建模目的是分析双层玻璃密封窗的保温功能.所谓窗户的保温效果是指室内的热量通过玻璃窗散发出去的量的分析，它与室内、室外的温度有关系，与窗户的密封情况，玻璃材料，以及房间大门的保温情况也有关.

2.双层玻璃密封窗保温效果的优与劣是相对于单层玻璃窗保温效果来说的，故可以通过对比方式来研究保温效果.

3.关于热量扩散问题，应查阅相关物理资料以备用.

模型假设

1.两层玻璃的密封性能很好，即其中间的空气是不流动的.这样，热量的传播过程只有传导而没有对流，故此属热传导问题(抓住主要因素).

2.设室内温度 T_1、室外温度 T_2 均为常数，即沿热传导方向，单位时间通过单位面积的热量是常数.

3.玻璃材料均匀，热传导系数为常数(此与假设2同为均匀化和理想化处理，