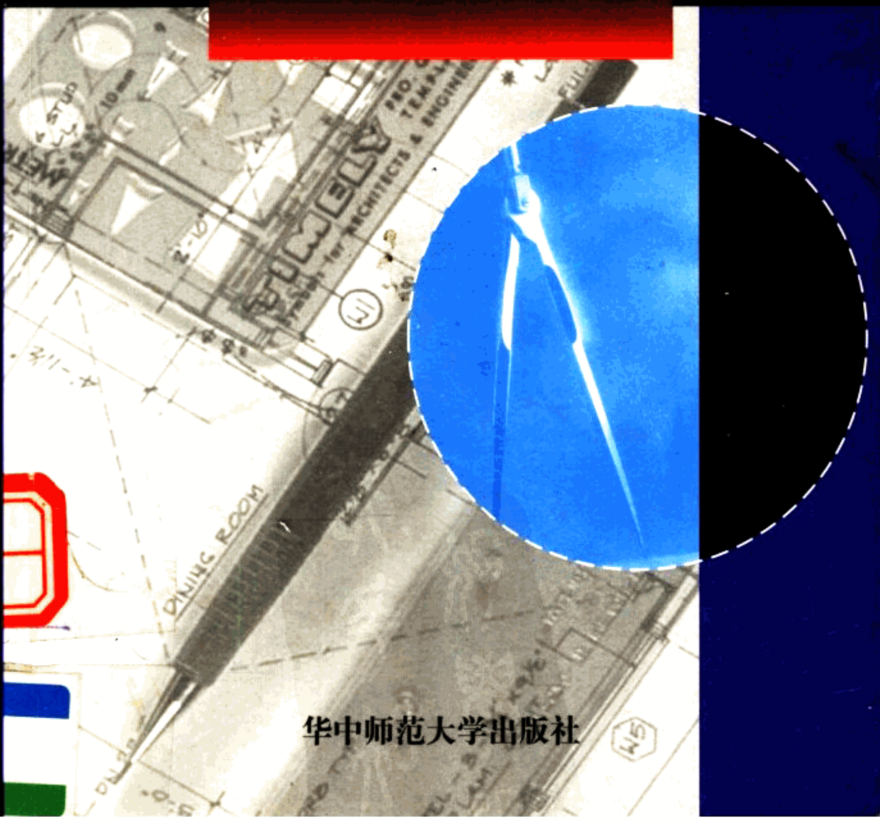
江高文 编著

数学新思维

中学数学思维策略与解题艺术



华中师范大学出版社

钻研思维方法，

提高数学水平.

王梓坤

2001.8.25.

通过各种途径，在数学教学中提高学生思维能力，从而提高科学素质，是数学教学的一个重要目的。

祝贺

江高文同志新著

“数学新思维”

出版！

武汉大学路见可

2001年9月

再版前言

本书的前身是《中学数学思维策略与解题艺术》(1993年由华中师范大学出版社出版),自出版以来,受到了全国广大中学师生的一致好评,虽经多次印刷仍供不应求。这次修订主要是为了反映教育研究的新成果,适应教育改革的新形势。

新的时代对数学教育提出了新的要求,作为基础教育工具学科的数学,在培养学生创新精神和实践能力、提高学生素质方面起着重要作用。就中学数学教学而言,提高学生素质的核心任务是培养、发展和提高学生的数学思维能力。

问题是数学的心脏,思维是数学的灵魂。数学教学应该是数学思维活动的教学,必须作为"思维过程"来进行。笔者经过多年的探索与实践,博采众长、独辟蹊径,运用全新的数学观念、创造性的思维方式、风趣幽默的教学语言,开创了生动活泼、富有魅力的数学课堂教学局面,把数学课堂变成了精彩纷呈、神奇迷人的数学风景区。学生在尽情领略数学大自然的美妙风光、亲身经历探求数学宝藏的发现活动中,思维能力悄然快速提高。

本书是笔者教学风格的一个缩影,也是众多数学教育工作者集体智慧的结晶。笔者用细腻的手法侧重描写"思维过程",突出"思维是数学的灵魂",为教师实施创新教育、指导学生进行探索发现活动提供了很好的案例。

我国著名数学家、中国科学院院士、原北京师范大学校长王梓坤教授以及原武汉大学校长、著名数学教育家、博士生导师路见可教授为本书亲笔题词。我国著名数学教育家、首都师范大学周春荔教授亲自为本书作序,对本书给予了充分肯定和高度赞誉,并热情向读者推荐。借本书再版之际,谨向他们表示崇高的敬意和衷心的感谢!

愿本书能够真正成为学生的良师,教师的益友,数学爱好者的珍品。

江高文

2002年6月于武汉

序　言

进入21世纪,人类跨入一个新的时代;有人说是信息网络化的知识经济时代,也有人说是数字化时代。不管如何为这个时代命名,科学技术飞速发展的成就总是举世公认的,这些成就都是人类思维的伟大功绩,其中数学的思维占据重要的地位。时代的发展,科技的进步,对人的素养提出了更高的要求,对基础教育提出了更高的要求,对中小学的数学教育也提出了新的更高的要求。从国家研制面向21世纪数学课程标准、启动各项数学教学改革实验的力度,可以感到形势喜人,又非常催人奋进。

中学数学教师是数学教改第一线的生力军。一般来说,数学教育实验改革的周期比较长,如果教师在初中或高中任教,3年一个小循环,到退休时也就是12个小循环;如果是初中到高中的大循环,一般也就是6个大循环。因此,将每一节课都看作是一次数学教学的实验,认真积累经验,点点滴滴,积少成多,将这些经验用新的理念去审视,由这些经验中提炼、概括出新的认识,丰富数学教育的理论与实践,这就是对数学教育事业的贡献。事实上,每个数学教师的工作是既要培养人才,又要出理论成果。教学与科研相结合,这也是新时代对数学教师的基本要求。

古语云:师者,传道、授业、解惑也。如果说过去认为解惑只是解答疑难,那么今天,解惑也应意味着启迪思维方法。作为数学教师,要启迪学生领悟数学思维和学会数学的思维方式;在日常的教学中以"润物细无声"的方式渗透数学的精神、思想和方法。既可以提高学生的人文修养,又可以收到育人的积极成效。应该说,江高文教师的新作《中学数学思维策略与解题艺术——数学新思维》,正是体现上述精神的有益的尝试。

全书包括"数学思维策略"八讲,"数学思想观念"八讲,"数学解题

方法”八讲,“数学典型示例”八讲。书中结合解题实际,语言生动活泼,是广大中学数学教师和中学数学爱好者的一本有价值的参考读物。对于研究数学思维的同志,也可以从中找到许多闪烁着学生思维火花的实例,受益良多。

从认识角度讲,学生是认知的主体。但也要看到,中小学生这个主体是尚不成熟的主体,是需要教师帮助引导和规范管理的主体。在十几年的时间内,要学生继承人类几千年的文化精华,为以后认识和改造世界打下良好的基础,不应该也不允许让学生花大量的时间盲目地去摸索,因此教师的主导作用是极端重要的。人们到自然保护区去旅游,要在规定的时间内顺利完成旅游任务,游客是主体,但导游的主导作用极端重要。好的导游,经验丰富,谈笑风生,人文内涵丰富,张弛有致,使游客将景物览全看够且不感劳累。这是引导游客平安、顺利、满意地完成旅游任务的保证。在一定意义下,数学教师正是数学大花园中的“导游”。可以毫不过分地说,教师与学生同是数学教学活动中的主体。教师的主导作用,有如行船的舵手,起着掌握、调控课堂教学思维方向的作用。学生的主体作用发挥得如何,主要是看在教师(主导者)的启迪下学生思维活动的程度和效果。教师的启发式教学是主导的根本,学生的思维受到启迪,领悟了思维的真谛是目的。这样一来,学生的主体地位才真正地得到了尊重。没有思维启发性的教学实质是“满堂灌”。在课堂上学生积极主动的思维活动是主体地位的集中体现。

专家们说:数学教学是数学思维活动的教学。未来社会的人应是“学会数学思维方式”的人。数学教学应是展示数学思维活动过程的教学。这恰恰说明,数学是思维的科学,数学是锻炼思维的体操。数学思维能力是数学诸项能力的核心。我们每位数学教师都把数学思维研究作为己任,在研究数学思维上下功夫,这是提高学生数学创新能力、应用数学解决实际问题能力的基础。因此,坚持深入地发展学生数学思维能力的理论与实验研究,必将会推动我国的中小学数学教育在新世纪提高到一个全新的水平。

首都师范大学数学系　周春荔

2001年7月25日

目　　录

第一章　数学思维策略

数学思维就是数学活动中的思维，是以数学问题为载体，通过发现问题、解决问题的形式，达到对现实世界的空间形式和数量关系的本质的一般性认识的思维过程．

一　宏观思维

宏观思维是高层次的思维活动．对于数学问题，不是着眼于它的局部特征，而是着眼于它的整体结构；善于从整体上去把握，善于运用战略的眼光去看待；运用辩证的观点去认识，运用灵活机智的战略战术去处理；全方位、多角度地进行观察、分析、类比和联想，充分挖掘和认识问题的实质，优先考虑解决问题的"大政方针"，力求找出解决问题的最佳方案．这就是数学思维中的宏观策略思想，这种思想往往是多种数学思想的综合体现．

具有宏观思维品质的人，在研究数学问题时，能够"胸怀祖国，放眼世界"．其思维往往具有创造性，对数学问题的解决常常会有一些不同寻常、美妙绝伦的方法，让人在赏心悦目的同时，自然感悟到"数学世界真奇妙，风景这边独好"．

【例 1】*(全国高考题)* 求 $\sin^2 20° + \cos^2 50° + \sin 20° \cos 50°$的值．

【分析 1】 欲求这个三角式的值，我们可以把这个式子的整体看成一个未知数 x，即

$$x = \sin^2 20° + \cos^2 50° + \sin 20° \cos 50°. \quad ①$$

那么，与这个式子最"亲密"的常数值是什么呢？我们很自然地会想到公式 $\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$，于是引进

$$y = \cos^2 20° + \sin^2 50° + \cos 20° \sin 50°. \quad ②$$

①＋②得
$$x + y = 2 + \sin 70°. \quad ③$$

①－②得
$$x - y = \cos 100° - \cos 40° - \sin 30° = -\frac{1}{2} - \sin 70°. \quad ④$$

③＋④得
$$2x = \frac{3}{2}, \qquad \therefore \quad x = \frac{3}{4},$$

即 $$\sin^2 20^\circ+\cos^2 50^\circ+\sin 20^\circ\cos 50^\circ=\frac{3}{4}.$$

【分析 2】 如果我们把 $\sin 20^\circ$ 看成未知数，而把 $\cos 50^\circ$ 看成它的系数，那么整个式子就可以看成是一个关于 $\sin 20^\circ$ 的二次三项式，由此我们很容易联想到 $ax^2+bx+c=a\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2+\frac{4ac-b^2}{4a}$ 这种常用的配方变形手段，于是有

$$\begin{aligned}
\text{原式}&=\left(\sin 20^\circ+\frac{1}{2}\cos 50^\circ\right)^2+\frac{3}{4}\cos^2 50^\circ\\
&=\left[\sin(50^\circ-30^\circ)+\frac{1}{2}\cos 50^\circ\right]^2+\frac{3}{4}\cos^2 50^\circ\\
&=\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\sin 50^\circ\right)^2+\frac{3}{4}\cos^2 50^\circ=\frac{3}{4}.
\end{aligned}$$

【分析 3】 从宏观角度去观察三角式的结构特征，我们会发现它与余弦定理 $a^2+b^2-2ab\cos C=c^2$ 相类似，从而触发解决问题的新构想：构造三角形，用正、余弦定理来解之.

设$\triangle ABC$ 的外接圆直径 $2R=1$，用$\angle A=20^\circ$，$\angle B=40^\circ$则$\angle C=120^\circ$.

由正弦定理可知 $a=\sin 20^\circ$，$b=\sin 40^\circ=\cos 50^\circ$，$c=\sin 120^\circ=\frac{\sqrt{3}}{2}$，

代入余弦定理 $a^2+b^2-2ab\cos C=c^2$ 得

$$\sin^2 20^\circ+\cos^2 50^\circ+\sin 20^\circ\cos 50^\circ=\frac{3}{4}.$$

【注】 上述三种思路均体现了数学思维中的宏观策略，就是从整体上去把握，用辩证的观点去认识，善于进行类比和联想，从而使问题解决得巧妙而简捷. 很明显，本题的解法并不止这些，聪明的读者也许会有更多更妙的方法.

【例 2】 已知 α、β 为锐角，$\alpha+\beta\neq\frac{\pi}{2}$，且满足

$$3\sin\beta=\sin(2\alpha+\beta),$$

求证：$\tan(\alpha+\beta)=2\tan\alpha$.

【分析】 条件等式的证明过程，就是通过恒等变形将题设与题断化异为同的过程. 因此，思考应从识别题设与题断中的差异开始.

在三角恒等变换中，题设与题断可能存在如下三类差异：

(1) 角的差异；(2) 函数名称的差异；(3) 运算结构的差异.

关于角的差异. 一般来说，两个互不相关的角之间的差异是不能消除的，

但是由于要证的恒等式在客观上总是成立的，因而题设与题断中的各项差异都只有形式上的不同．只要注意到题设与题断中角的特定关系，总可以运用加法运算来达到消除角的差异的目的．比如，在本例中，就可以将题设中的两个角 β、$(2\alpha+\beta)$ 直接用题断中的两个角 $(\alpha+\beta)$、α 分别表示成 $(\alpha+\beta)-\alpha$ 及 $(\alpha+\beta)+\alpha$，这样就消除了角的差异．

关于函数名称的差异．由于同一个角的不同函数之间总是可以互化的，因此它们之间的差异总可以通过同角三角函数变换公式来消除．

关于运算结构的差异．对于同一角的同一函数的表达式，可以看成代数式，它们在运算结构上的差异总可以通过代数变换来消除．

可见，在上述三种差异中，角的差异是第一位的，应该首先消除，进而消除函数名称的差异和运算结构的差异．

据此，本例有如下证法：

【证明】 由已知得

$$3\sin[(\alpha+\beta)-\alpha]=\sin[(\alpha+\beta)+\alpha]$$

$$\left.\begin{aligned}\Longrightarrow &3\sin(\alpha+\beta)\cos\alpha-3\cos(\alpha+\beta)\sin\alpha\\ &=\sin(\alpha+\beta)\cos\alpha+\cos(\alpha+\beta)\sin\alpha\end{aligned}\right\}\boxed{\text{消除角的差异}}$$

$$\left.\begin{aligned}\Longrightarrow &\sin(\alpha+\beta)\cos\alpha=2\cos(\alpha+\beta)\sin\alpha\\ \Longrightarrow &\tan(\alpha+\beta)=\frac{\sin(\alpha+\beta)}{\cos(\alpha+\beta)}=\frac{2\sin\alpha}{\cos\alpha}=2\tan\alpha\end{aligned}\right\}\boxed{\text{消除函数名称和运算结构的差异}}$$

【注】 本例直接用结论等式中的两个角 $(\alpha+\beta)$、α 的和与差来替换条件等式中的两个角 $(2\alpha+\beta)$、β，体现了很强的目标意识，同时把 $(\alpha+\beta)$ 和 $(2\alpha+\beta)$ 均看成是一个角，也体现了宏观思维意识的作用．

【例 3】 已知 $f(x)$ 是定义在 $(-\infty,0)\cup(0,\infty)$ 上的奇函数，且在 $(-\infty,0)$ 上是增函数，若 $f(1)=0$，$a>1$，解关于 x 的不等式：$f[\log_a(1-x^2)+1]>0$．

【分析】 宏观思维意识指导我们，对不等式左端中括号内的 $\log_a(1-x^2)+1$ 应视为一个整体，把它看成是函数 $f(x)$ 的自变量 x 所取的一个值（当然，这样理解还具有一定的辩证思想），这样，就可把不等式左端视为 $f(x)$ 的一个函数值．同时，也可将不等式右端的 0 看成是一个函数值，如 $f(1)$．于是站在宏观的高度来看要解的不等式，实际上是已知一个函数的两个函数值的大小关系，来确定它们所对应的两个自变量的值的大小关系，这可以利用函数的单调性来解决．

【解】 $\because$ $f(x)$是奇函数,且在$(-\infty,0)$上是增函数, $\therefore$ $f(x)$在$(0,+\infty)$上也是增函数.

又 $\because$ $f(1)=0$,

$\therefore$ $f(-1)=-f(1)=0$.

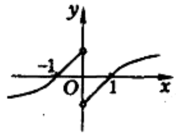


图 1-1

如图 1-1,由图易知,不等式

$$f[\log_a(1-x^2)+1]>0$$

$\iff$ $\log_a(1-x^2)+1>1$, 或 $-1<\log_a(1-x^2)+1<0$.

即 $\log_a(1-x^2)>0$, ① 或 $-2<\log_a(1-x^2)<-1$, ②

$\because$ $x\in(-\infty,0)\cup(0,+\infty)$, $\therefore$ $x^2\neq 0$, $\therefore$ $0<1-x^2<1$,

又 $\because$ $a>1$, $\therefore$ $\log_a(1-x^2)<0$, $\therefore$ 不等式①无解.

由不等式②得 $a^{-2}<1-x^2<a^{-1}\Longrightarrow 1-\frac{1}{a}<x^2<1-\frac{1}{a^2}$

$\Longrightarrow -\frac{\sqrt{a^2-1}}{a}<x<-\sqrt{\frac{a-1}{a}}$ 或 $\sqrt{\frac{a-1}{a}}<x<\frac{\sqrt{a^2-1}}{a}$.

$\therefore$ 原不等式的解集为 $\left(-\frac{\sqrt{a^2-1}}{a},-\frac{\sqrt{a-1}}{a}\right)\cup\left(\frac{\sqrt{a-1}}{a},\frac{\sqrt{a^2-1}}{a}\right)$.

【例 4】 设对所有实数 x,不等式

$$x^2\log_2\frac{4(a+1)}{a}+2x\log_2\frac{2a}{a+1}+\log_2\frac{(a+1)^2}{4a^2}>0$$

恒成立,求实数 a 的取值范围.

【分析】 观察这个不等式的整体结构可以发现,式中的三个对数能够通过对数运算转化为同一形式,从而可将原不等式通过恒等变形而简化.

【解】 对原不等式进行恒等变形:

$$x^2\left[\log_2 8\left(\frac{a+1}{2a}\right)\right]-2x\log_2\frac{a+1}{2a}+2\log_2\frac{a+1}{2a}>0$$

$$\iff x^2\left[3+\log_2\frac{a+1}{2a}\right]-2x\log_2\frac{a+1}{2a}+2\log_2\frac{a+1}{2a}>0$$

$$\iff 3x^2+[(x-1)^2+1]\log_2\frac{a+1}{2a}>0.$$

这个不等式对所有实数 x 恒成立的充要条件是:

$$\log_2\frac{a+1}{2a}>0\iff\frac{a+1}{2a}>1\iff 1+\frac{1}{a}>2\iff 0<a<1.$$

因此,a 的取值范围是$(0,1)$.

【注】 本题如果利用二次函数的性质来解,不仅运算较繁,而且容易忽略二次项系数等于 0 的特殊情况,造成解答不严密.

【例 5】 设 a、$b\in \mathbf{R}^+$, 且 $a\neq b$,求函数

$$f(x)=(a\sin^2 x+b\cos^2 x)(a\cos^2 x+b\sin^2 x)$$

的最大值.

【分析】 从整体结构上看,我们可以把 $f(x)$看成是两个正数之积,而这两个正数之和恰为定值.于是,根据平均值不等式有

$$f(x)\leqslant\left(\frac{a\sin^2 x+b\cos^2 x+a\cos^2 x+b\sin^2 x}{2}\right)^2=\frac{(a+b)^2}{4}.$$

当且仅当 $a\sin^2 x+b\cos^2 x=a\cos^2 x+b\sin^2 x$,即 $\tan^2 x=1$ 时(因 $a\neq b$),亦即 $x=\frac{k\pi}{2}+\frac{\pi}{4}$ $(k\in\mathbf{Z})$时,$f(x)$取最大值$\frac{(a+b)^2}{4}$.

【例 6】 复数 z 满足 $2|z-3-3\mathrm{i}|=|z|$,求$|z|$的最大值和最小值.

【分析】 从宏观角度考虑,只要能构造出关于$|z|$的不等式并解之,即可确定$|z|$的取值范围,进而确定$|z|$的最大值和最小值.怎样依据条件等式来构造不等式呢?这让我们自然地想起 z 的模的三角不等关系:

$$\big||z_1|+|z_2|\big|\leqslant|z_1\pm z_2|\leqslant|z_1|+|z_2|.$$

【解】 $\because$ $\big||z|-3\sqrt{2}\big|\leqslant|z-3-3\mathrm{i}|\leqslant|z|+3\sqrt{2}$,

$\therefore$ $|z|=2|z-3-3\mathrm{i}|\geqslant2\big||z|-3\sqrt{2}\big|$

$\Longrightarrow -\frac{|z|}{2}\leqslant|z|-3\sqrt{2}\leqslant\frac{|z|}{2}$

$\Longrightarrow 2\sqrt{2}\leqslant|z|\leqslant6\sqrt{2}$.

当$|z|=2\sqrt{2}$时,$|z-3-3\mathrm{i}|=\sqrt{2}$,两圆外切于点$(2,2)$,此时,$z=2+2\mathrm{i}$;

当$|z|=6\sqrt{2}$时,$|z-3-3\mathrm{i}|=3\sqrt{2}$,两圆外切于点$(6,6)$,此时,$z=6+6\mathrm{i}$.

故当 $z=2+2\mathrm{i}$ 时,$|z|$取最小值 $2\sqrt{2}$;当 $z=6+6\mathrm{i}$ 时,$|z|$取最大值 $6\sqrt{2}$.

【例 7】 求多项式$(x^2+x-1)^9(2x+1)^4$ 的展开式中 x 的奇次项系数之和.

【分析】 从研究这个多项式的展开式的整体结构入手考虑,展开式中最高次项为 x^{22},为此,可设

$$(x^2+x-1)^9(2x+1)^4=a_0+a_1x+a_2x^2+\cdots+a_{22}x^{22}. \qquad ①$$

其奇次项系数之和为 $a_1+a_3+\cdots+a_{21}$, 偶次项系数之和为 $a_0+a_2+\cdots+a_{22}$.

如果我们用整体观念把$(a_1+a_3+\cdots+a_{21})$和$(a_0+a_2+\cdots+a_{22})$看成两个未知数，只要能构造出关于它们的方程组并解之即可.很明显，我们只需对恒等式①实施赋值法.在①中，分别令 $x=1$ 和 $x=-1$，得

$$a_0+a_1+a_2+\cdots+a_{22}=3^4, \qquad ②$$

$$a_0-a_1+a_2-\cdots+a_{22}=-1. \qquad ③$$

(②-③)÷2 得 $a_1+a_3+\cdots+a_{21}=41$.

故多项式$(x^2+x-1)^9(2x+1)^4$ 的展开式中 x 的奇次项系数之和为 41.

【例 8】 设 P 为椭圆上除长轴端点外的任意一点，F_1、F_2 为焦点，$\angle PF_1F_2=\alpha$，$\angle PF_2F_1=\beta$，e 为椭圆离心率(图 1-2).求证：

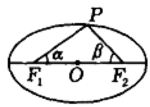


图 1-2

$$\tan\frac{\alpha}{2}\tan\frac{\beta}{2}=\frac{1-e}{1+e}.$$

【分析】 从宏观意义上说，欲证结论就是要寻求一个 α、β 与 a、c 之间的关系式$\left(因\ e=\frac{c}{a}\right)$.而在$\triangle PF_1F_2$ 中，有 $|F_1F_2|=2c$，$|PF_1|+|PF_2|=2a$，由于三角形的两角与三边之间的关系可直接根据正弦定理来建立，所以，解题的思路也就应运而生.

【证明】 在$\triangle PF_1F_2$ 中，据正弦定理、等比定理及椭圆定义可得

$$\frac{2c}{\sin(\alpha+\beta)}=\frac{|PF_2|}{\sin\alpha}=\frac{|PF_1|}{\sin\beta}=\frac{2a}{\sin\alpha+\sin\beta}.$$

(从宏观意义上说，此式的建立已经大功告成，剩下的任务只是对其进行适当地变形而已)变形得：

$$e=\frac{c}{a}=\frac{\sin(\alpha+\beta)}{\sin\alpha+\sin\beta}=\frac{2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha+\beta}{2}}{2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2}}=\frac{\cos\frac{\alpha+\beta}{2}}{\cos\frac{\alpha-\beta}{2}}$$

$$=\frac{\cos\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\beta}{2}-\sin\frac{\alpha}{2}\sin\frac{\beta}{2}}{\cos\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\beta}{2}+\sin\frac{\alpha}{2}\sin\frac{\beta}{2}}\Longrightarrow\frac{1-e}{1+e}=\frac{2\sin\frac{\alpha}{2}\sin\frac{\beta}{2}}{2\cos\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\beta}{2}}$$

$$=\tan\frac{\alpha}{2}\cdot\tan\frac{\beta}{2}.$$

【例 9】*(全国高考题)* 如图 1-3 所示，定长为 3 的线段 AB 的两个端点在抛物线 $y^2=x$ 上移动，记线段 AB 的中点为 M，求点 M 到 y 轴的最短距离，并

求此时点 M 的坐标.

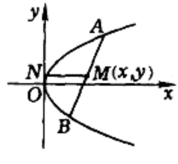


图 1-3

【分析】 点 M 到 y 轴的距离就是点 M 的横坐标 x. 欲求 x 的最小值,可以考虑求 x 的范围. 为求 x 的范围,可建立一个关于 x 的不等式,并据此不等式来解出 x 的范围. 因此,寻求关于 x 的不等式应该是本题获解的关键所在,也是本题解答的中心思想. 当然,这个不等式只能通过题设中的等量关系来间接地建立. 考虑到 M 是 AB 的中点,M 的坐标可以用 A、B 两点的坐标来表达,而 A、B 两点在抛物线上,且 $|AB|=3$,以此为突破口,可得如下解法:

【解】 设 $A(x_1,y_1)$、$B(x_2,y_2)$、$M(x,y)$,则

$$x_1=y_1^2,\quad x_2=y_2^2,\quad x=\frac{x_1+x_2}{2}=\frac{y_1^2+y_2^2}{2},$$

$$\begin{aligned}3^2&=(x_1-x_2)^2+(y_1-y_2)^2\\&=x_1^2+x_2^2-2x_1x_2+y_1^2+y_2^2-2y_1y_2\\&=(x_1+x_2)^2-4x_1x_2+(x_1+x_2)-2y_1y_2\\&=4x^2-4(y_1y_2)^2+2x-2y_1y_2.\end{aligned}$$

这里的指导思想是,尽可能地用 x 来代替式中的其它的字母,将未知量的个数减少到最低限度.

整理得

$$4(y_1y_2)^2+2(y_1y_2)+9-4x^2-2x=0 \qquad (*)$$

$\because$ y_1y_2 为实数, $\therefore$ $\Delta=4-16(9-4x^2-2x)\geqslant 0$

(从宏观意义上说,问题已获得解决) $\Longrightarrow 16x^2+8x-35\geqslant 0$

$\Longrightarrow (4x+7)(4x-5)\geqslant 0 \Longrightarrow x\geqslant\frac{5}{4}$. ($\because$ $x>0$, $\therefore$ $x\leqslant-\frac{7}{4}$应舍去).

当 $x=\frac{5}{4}$时,$\Delta=0$,由方程($*$)解得 $y_1y_2=-\frac{1}{4}$,于是

$$\begin{aligned}(y_1+y_2)^2&=y_1^2+y_2^2+2y_1y_2\\&=x_1+x_2-\frac{1}{2}=2x-\frac{1}{2}=\frac{5}{2}-\frac{1}{2}=2.\end{aligned}$$

$$\therefore\quad y_1+y_2=\pm\sqrt{2},\ y=\frac{y_1+y_2}{2}=\pm\frac{\sqrt{2}}{2}.$$

故点 M 到 y 轴的最短距离为$\frac{5}{4}$,此时点 M 的坐标为$\left(\frac{5}{4},\pm\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$.

【注】 例 9 是当年高考中得分率较低的一道试题,而缺乏数学思维中的

宏观意识不能不说是造成学生思维受阻的重要原因之一.

思维训练 1-1

1. 已知 $f(x)=a\sin x+b\sqrt[3]{x}+4$ (a、$b\in\mathbf{R}$), $f(\lg\lg 3)=3$,则$f(\lg\log_3 10)$的值是(　　).

A. 5　　B. -5

C. -3　　D. 随 a、b 取值的不同而不同

2. *(河南省高二数学竞赛题)* 在等差数列$\{a_n\}$中,$a_4+a_6+a_8+a_{10}+a_{12}=120$,则 $2a_9-a_{10}=$(　　).

A. 20　　B. 22　　C. 24　　D. 28

3. 已知二次函数 $y=ax^2+bx+c$ 的图象如图 1-4 所示,则下列 6 个代数式 $ab,ac,a+b+c,a-b+c,2a+b,2a-b$ 中,其值为正的式子有且只有(　　).

A. 1个　　B. 2个　　C. 3个　　D. 4个

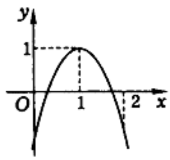


图 1-4

4. 已知 $a\neq b$,且 $a^2\sin\theta+a\cos\theta-1=0$, $b^2\sin\theta+b\cos\theta-1=0$,则两点$(a,a^2)$,$(b,b^2)$的连线与单位圆的位置关系是(　　).

A. 相交　　B. 相切　　C. 相离　　D. 不能确定

5. *(全国高考题)* 设复数 $z_1=2\sin\theta+\mathrm{i}\cos\theta$ $\left(\frac{\pi}{4}<\theta<\frac{\pi}{2}\right)$在复平面上对应向量为$\overrightarrow{OZ_1}$,将$\overrightarrow{OZ_1}$按顺时针方向旋转$\frac{3\pi}{4}$后得到向量$\overrightarrow{OZ_2}$,$\overrightarrow{OZ_2}$对应的复数为 $z_2=r(\cos\varphi+\mathrm{i}\sin\varphi)$,则 $\tan\varphi$ 等于(　　).

A. $\dfrac{2\tan\theta+1}{2\tan\theta-1}$　　B. $\dfrac{2\tan\theta-1}{2\tan\theta+1}$　　C. $\dfrac{1}{2\tan\theta+1}$　　D. $\dfrac{1}{2\tan\theta-1}$

6. 已知 $5\sin\beta=\sin(2\alpha+\beta)$,则$\dfrac{\tan(\alpha+\beta)}{\tan\alpha}=$________.

7. 已知 $f(x)=\log_a(x+1)$,当点 $P(x,y)$在函数 $y=\log_a(x+1)$的图象上时,点 $Q\left(\frac{x}{3},\frac{y}{2}\right)$在曲线 $y=g(x)$上,则 $g(x)=$________.

8. 数列$\{a_n\}$是等比数列,且 $a_1+a_2+a_3=18,a_2+a_3+a_4=-9$,则该数列各项的和为________.

9. 已知 $\cos\left(\alpha-\frac{\beta}{2}\right)=-\frac{1}{3}$，$\sin\left(\frac{\alpha}{2}-\beta\right)=\frac{1}{4}$，且 $\frac{3\pi}{2}<\alpha<2\pi$，$\frac{\pi}{2}<\beta<\pi$，求 $\cos(\alpha+\beta)$ 的值.

10. 椭圆 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$ 的两顶点为 $A(a,0)$、$B(0,b)$，右焦点为 F，且 F 到直线 AB 的距离等于 F 到原点的距离，求证：其离心率 $e<\sqrt{2}-1$.

二　微观思维

有些数学题目，表面看来好像条件不足，难以入手. 其实，这些题目往往在题设的背后巧妙地隐藏着含而不露的已知条件，只是刻意作了一番伪装，使我们不便轻易识破其庐山真面目. 而另有一些题目，则是在条件中暗设陷阱，解题时稍有不慎，便会误入歧途. 对于这些问题，克敌制胜的最好方略是微观思维. 思维具有严谨性是微观思维的显著特征. 在对众多信息的加工、处理过程中，能够做到细致、缜密、无微不至，不放过任何蛛丝马迹. 通过对题设乃至题断进行认真、细致、全面、深入的考查，通过去伪存真、沙里淘金的技术处理，以求抓住问题的本质而不被表面现象所迷惑.

【例 1】 已知某除法运算如图 1-5 所示，试求被除数、除数和商.

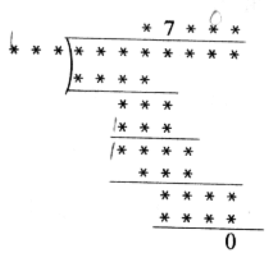


图 1-5

【分析】 这是一个似乎不可求解然而又十分有趣的问题，因为除了已知商的第二数字是 7 之外，其它数字一概未知. 我们可以考虑集中攻克一点，这样也许会对整个问题的解决有所启示.

首先注意到在试商最后一个商数之前，是将被除数的末两位数字同时移下来的，这表明若仅移一个数字，则所有三位数必小于除数，所以商的第四个数字必定是 0.

下面继续"顺藤摸瓜"，问题即可得到解决. 因为商的首、尾两个数字与除数的积都是四位数，而商的第三个数字与除数的积是三位数，所以商的首、尾两个数字都大于第三个数字. 又因商的第二个数字 7 与除数的积也是一个三位数，且此三位数与一个三位数之和仍是一个三位数，而商的第三个数字与除数相乘所得的三位数与一个二位数之和却是一个四位数，所以商的第三个数