名师考案丛书
MINGSHI KAOAN CONGSHU

（复旦·第二版）

数学分析

考研教案

胡晓敏　李承家　编著

西北工業大學出版社

名师考案丛书

MINGSHIKAOANCONGSHU

数学分析

（复旦·第二版）

考研教案

胡晓敏　李承家　编著

西北工业大学出版社

【内容简介】 本书为数学分析课程学习及考研辅导书.按数学分析课程的内容整合为7章,各章又按内容细化,分为知识脉络图解,重点、难点解读,课程考试、考研要点点击和典型例题、习题精选详解等四部分,并安排了章节自测题、课程考试题及考研真题等内容.

本书适合于理工科院校课程考试、考研的学生复习备考,也适于讲授本课程的教师参考.

图书在版编目(CIP)数据

数学分析考研教案/胡晓敏,李承家编著.—西安:西北工业大学出版社,2006.7
(名师考案丛书)
ISBN 7-5612-2093-6

Ⅰ.数… Ⅱ.①胡… ②李… Ⅲ.数学分析—研究生—入学考试—自学参考资料 Ⅳ.O17

中国版本图书馆CIP数据核字(2006)第077253号

出版发行:西北工业大学出版社
通信地址:西安市友谊西路127号　　**邮编**:710072
电　　话:(029)88493844　88491757
网　　址:www.nwpup.com
印 刷 者:陕西东江印务有限责任公司
开　　本:787 mm×960 mm　1/16
印　　张:17.75
字　　数:481千字
版　　次:2006年7月第1版　2006年7月第1次印刷
定　　价:24.00元

前　言

数学分析课程是高等理工科学校、师范院校有关专业的一门重要的基础理论课，也是数学、物理等专业硕士研究生入学考试的考试科目之一．在学习数学分析课程时，目前学生参考较多的是吉米多维奇的《数学分析习题集》．这本习题集内容经典，涵盖全面，但其题目量大，且成书较早，非常有必要精简，以适应当前教学改革的需要．在多年的教学实践中，我们先后采用过华东师范大学、复旦大学等高校编写的数学分析教材，也试用过其他工科数学分析教材，深知这门课程的难度，也能充分了解和估计到学生在学习过程中所遇到的难点．为了满足广大读者课程学习和考研复习的需要，我们主要参考了复旦大学数学系主编《数学分析》(第二版)的内容体系和课程教学要求编写了本书，以期对广大读者学习数学分析这门课程、复习考研有所帮助．

本书将数学分析课程的主要内容整合成七大章，并参考了多种使用较为广泛的数学分析、工科数学分析类教材．在组织安排上，各章又按内容加以细化，每章分为知识脉络图解，重点、难点解读，课程考试、考研要点点击和典型例题、习题精选详解四个部分，并设计了章节自测题，供读者检验、巩固所学，书末附有课程考试题及最新考研真题等内容．

一、知识脉络图解：根据数学分析教学大纲，列出小节核心内容，需要重点掌握的概念、定义及定理．

二、重点、难点解读：按知识脉络体系分述各基本内容，帮助读者抓住重点，更详尽地把握章节内容．

三、课程考试、考研要点点击：参考数学分析教学大纲、研究生入学考试大纲等，简要指出章节应掌握要点及考查点．

四、典型例题、习题精选详解：根据编者的教学实践，主要选解了数学分析教材中的典型例题以及学生不易完成或难度较大的题目，帮助读者理解和掌握难点内容．

本书旨在指导帮助读者学习数学分析课程，编写内容没有求全、求难，希望通过重点突出

的例题选解，帮助读者理解概念和理论，开拓解题思路，逾越难点，提高数学基本素养，以期读者独立思考，积极尝试，参考解答而不依赖于解答，最终掌握数学分析这门课程的教学内容．

本书由李承家负责编写第1～3章，胡晓敏负责编写第4～7章，全书由胡晓敏负责统稿．

由于作者水平所限，书中疏漏与不妥之处，恳请读者指正．

编著者

2006年5月

目　录

第 1 章　极限理论

1.1　初等函数

一、　知识脉络图解

- (1) 函数
  - 自变量(逆象)、因变量(象)
  - 定义域、值域
  - 函数与反函数
  - 隐函数及其显化
  - 函数的复合
- (2) 函数的几何特性
  - 有界性
  - 单调性
  - 奇偶性
  - 周期性
- (3) 初等函数
  - 基本初等函数
    - 幂函数
    - 指数函数与对数函数
    - 三角函数与反三角函数
  - 初等函数

二、　重点、难点解读

1. *基本初等函数*

基本初等函数由幂函数、指数函数、对数函数、三角函数及反三角函数构成.

2. *初等函数的基本性质*

由基本初等函数经有限次四则运算及有限次复合运算而获得的函数,称为初等函数.

双曲函数是一类重要的初等函数.常用的双曲函数有:双曲正弦、双曲余弦、双曲正切及双曲余切,定义如下.

$$\sinh x=\frac{e^x-e^{-x}}{2},\quad \cosh x=\frac{e^x+e^{-x}}{2},\quad \tanh x=\frac{\sinh x}{\cosh x},\quad \coth x=\frac{\cosh x}{\sinh x}$$

初等函数的基本特性：有界性、单调性、奇偶性和周期性.

设 $f(x)$ 在 D 上有定义，则

有界性：$|f(x)| \leqslant M, \forall x \in D$

单调性：

(1) 单调增加：$f(x_1) \leqslant f(x_2)$，$x_1 < x_2, \forall x_1, x_2 \in D$；

(2) 单调减少：$f(x_1) \geqslant f(x_2)$，$x_1 < x_2, \forall x_1, x_2 \in D$.

奇偶性：

(1) 奇函数：$f(-x) = -f(x), \forall x \in D$；

(2) 偶函数：$f(-x) = f(x), \forall x \in D$.

周期性：$f(x+T) = f(x), \forall x \in \mathbf{R}$.

3. 重要的非初等函数

(1) 符号函数 $\mathrm{sgn}x$：

$$\mathrm{sgn}(x) = \begin{cases} 1, & \text{当 } x > 0 \text{ 时} \\ 0, & \text{当 } x = 0 \text{ 时} \\ -1, & \text{当 } x < 0 \text{ 时} \end{cases}$$

显然，$|x| = x\mathrm{sgn}x$.

(2) 取整函数 $[x]$ 和尾数函数 (x)：

$[x]$ 为 x 最大整数部分，(x) 为 x 非负小数部分，其中 $x = [x] + (x)$，显然 $x - 1 < [x] \leqslant x, 0 \leqslant (x) < 1$.

(3) Dirichlet 函数：

$$D(x) = \begin{cases} 1, & x \text{ 为有理数} \\ 0, & x \text{ 为无理数} \end{cases}$$

(4) Riemann 函数（定义在 $[0,1]$）：

$$R(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{q}, & \text{当 } x = \dfrac{p}{q}\left(p, q \text{ 为正整数}, \dfrac{p}{q} \text{ 为既约分数}\right) \\ 0, & \text{当 } x = 0, 1, \text{无理数} \end{cases}$$

4. 反函数

设 $y = f(x)$ 与 $y = f^{-1}(x)$ 互为反函数，则

(1) $y = f(x)$ 与 $y = f^{-1}(x)$ 图形关于直线 $y = x$ 对称；

(2) $y = f(x)$ 与 $y = f^{-1}(x)$ 具有一致的严格单调性.

三、 课程考试、考研要点点击

(1) 掌握基本初等函数的性质和图形特点；

(2) 理解初等函数的概念及其基本性质；

(3) 掌握重要的分段函数的形式及其性质；

(4) 熟练掌握函数的复合运算及反函数的求解.

四、　典型例题、习题精选详解

例 1.1－1　求下列函数的定义域和值域：

(1) $y=\ln(\sin\frac{\pi}{x})$　　(2) $y=\arcsin(\ln\frac{x}{2})$

【解】　(1) $\sin\frac{\pi}{x}>0$，且 $x\neq 0$，即 $2k\pi<\frac{\pi}{x}<(2k+1)\pi$.

$$D:\frac{1}{2k+1}<x<\frac{1}{2k},k\in\mathbf{Z},(k=0,x>1),\quad \text{值域 } W:(-\infty,0]$$

(2) $\frac{x}{2}>0$，$\left[\ln\frac{x}{2}\right]\leqslant 1$，即 $\frac{2}{\mathrm{e}}\leqslant x\leqslant 2\mathrm{e}$.

$$D:[\frac{2}{\mathrm{e}},2\mathrm{e}],\quad W:[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}]$$

例 1.1－2　求下列函数的周期：

(1) $y=\sin x+\frac{1}{2}\cos^2 x$　　(2) $y=|\sin x|+|\cos x|$

(3) $y=\sqrt{\tan x}$　　(4) $y=\sin x^2$

【解】　(1) $y=\sin x+\frac{1}{4}\cos 2x+\frac{1}{4}$，最小正周期 $T=2\pi$.

(2) $y=|\sin x|+|\cos x|\geqslant 0$，与 $y^2(x)=1+|\sin 2x|$ 具有相同的周期，故最小正周期 $T=\frac{\pi}{2}$.

(3) $y=\tan x$ 的周期为 $k\pi$，故 $y=\sqrt{\tan x}$ 在其定义域内为周期函数，最小正周期为 $T=\pi$.

(4) $y=\sin x^2$ 为非周期函数，否则设存在常数 $T>0$，满足 $\sin(x+T)^2=\sin x^2$. 取 $x=0$，$\sin T^2=\sin 0$，于是 $T^2=k\pi$，$(k\in\mathbf{N})$.

取 $x=\sqrt{(k+1)\pi}$，由周期性假设，则

$$\sin(\sqrt{(k+1)\pi}+T)^2=\sin(\sqrt{(k+1)\pi}+\sqrt{k\pi})^2=\sin(\sqrt{(k+1)\pi})^2=0$$

而
$$\sin(\sqrt{(k+1)\pi}+\sqrt{k\pi})^2=\sin((k+1)\pi+2\sqrt{k(k+1)}\pi+k\pi)$$

其中 $k^2<k(k+1)<(k+1)^2$，因此 $2\sqrt{k(k+1)}$ 不可能为整数．故 $\sin(\sqrt{(k+1)\pi}+T)^2\neq 0$，矛盾产生．

例 1.1－3　研究 Dirichlet 函数的基本特性.

【解】
$$D(x)=\begin{cases}1, & \text{当 } x \text{ 为有理数时}\\ 0, & \text{当 } x \text{ 为无理数时}\end{cases}$$

单调性：$D(x)$ 不具有单调性.

对于无理数 x_1，有理数 x_2，无论 x_1,x_2 的大小关系，始终成立 $D(x_1)<D(x_2)$.

有界性：$|D(x)|\leqslant 1,x\in\mathbf{R}$.

周期性：任意的有理数 r 都是 $D(x)$ 的周期.

因为
$$x+r=\begin{cases}\text{有理数}, & \text{当 } x \text{ 为有理数}\\ \text{无理数}, & \text{当 } x \text{ 为无理数}\end{cases}$$

于是 $D(x+r)=D(x)$，故 $D(x)$ 没有最小正周期.

注意：无理数不是 $D(x)$ 的周期. 对于无理数 α，令 $x=-\alpha$，则 $D(x+\alpha)\neq D(x)$.

奇偶性：$D(-x)=D(x)$，$D(x)$ 为偶函数.

例 1.1-4 设 $f(x)$ 在 $[-a,a]$ 上有定义，证明 $f(x)$ 在 $[-a,a]$ 上可表示为奇函数与偶函数的和.

【证】 设 $f(x)=G(x)+H(x)$，其中 $G(x)$，$H(x)$ 分别为奇、偶函数，于是

$$f(-x)=G(-x)+H(-x)=-G(x)+H(x)$$

而

$$f(x)=G(x)+H(x)$$

由之可得

$$G(x)=\frac{f(x)-f(-x)}{2},\quad H(x)=\frac{f(x)+f(-x)}{2}$$

这里 $G(x)$，$H(x)$ 分别是奇函数和偶函数.

例 1.1-5 证明

$$\max\{f(x),g(x)\}=\frac{1}{2}\{f(x)+g(x)+|f(x)-g(x)|\}$$

$$\min\{f(x),g(x)\}=\frac{1}{2}\{f(x)+g(x)-|f(x)-g(x)|\}$$

【证】 仅证

$$\max\{f(x),g(x)\}=\frac{1}{2}\{f(x)+g(x)+|f(x)-g(x)|\}$$

当 $f(x)\geqslant g(x)$ 时，$\max\{f(x),g(x)\}=f(x)$.

$$\frac{1}{2}\{f(x)+g(x)+|f(x)-g(x)|\}=\frac{1}{2}\{f(x)+g(x)+f(x)-g(x)\}=f(x)$$

当 $f(x)<g(x)$ 时，$\max\{f(x),g(x)\}=g(x)$.

$$\frac{1}{2}\{f(x)+g(x)+|f(x)-g(x)|\}=\frac{1}{2}\{f(x)+g(x)+g(x)-f(x)\}=g(x)$$

同理可证后者.

由此还可得等式

$$|f(x)-g(x)|=\max\{f,g\}-\min\{f,g\}$$

例 1.1-6 设 $f(x)$，$g(x)$ 和 $h(x)$ 为单调递增函数，证明若 $f(x)\leqslant g(x)\leqslant h(x)$，则 $f(f(x))\leqslant g(g(x))\leqslant h(h(x))$.

【证】 由 $f(x)\leqslant g(x)$，故 $f(f(x))\leqslant f(g(x))$，$f(g(x))\leqslant g(g(x))$

即

$$f(f(x))\leqslant g(g(x))$$

同理可证

$$g(g(x))\leqslant h(h(x))$$

例 1.1-7 设 f，g 为区间 (a,b) 上单调递增函数，证明 $\varphi(x)=\max\{f(x),g(x)\}$ 和 $\psi(x)=\min\{f(x),g(x)\}$ 均为 (a,b) 上的递增函数.

【证】 (1) $\varphi(x)=\max\{f(x),g(x)\}$ 为单调递增函数.

设 $x_1<x_2$，$\varphi(x_1)=\max\{f(x_1),g(x_1)\}$，而

$$\varphi(x_2)=\max\{f(x_2),g(x_2)\}\geqslant f(x_2)\geqslant f(x_1)$$

$$\varphi(x_2)=\max\{f(x_2),g(x_2)\}\geqslant g(x_2)\geqslant g(x_1)$$

故

$$\varphi(x_2)\geqslant\max\{f(x_1),\quad g(x_1)\}=\varphi(x_1)$$

(2) $\psi(x)=\min\{f(x),g(x)\}$ 为单调递增函数.

设 $x_1<x_2$，

$$\psi(x_1)=\min\{f(x_1),g(x_1)\}\leqslant f(x_1)\leqslant f(x_2)$$

$$\psi(x_1)=\min\{f(x_1),g(x_1)\}\leqslant g(x_1)\leqslant g(x_2)$$

故 $$\psi(x_1) \leqslant \min\{f(x_2), g(x_2)\} = \psi(x_2)$$

例 1.1-8 设 $f(x)$ 定义在数集 D 上，证明 $f(x)$ 在 D 上严格单调的充要条件是：$\forall x_1, x_2, x_3 \in D, x_1 < x_2 < x_3$，成立

$$[f(x_1) - f(x_2)][f(x_2) - f(x_3)] > 0$$

【证】 （必要性）设 $f(x)$ 在 D 上严格单调，$\forall x_1, x_2, x_3 \in D, x_1 < x_2 < x_3$.

当 $f(x)$ 在 D 严格单调增加，$f(x_1) - f(x_2) < 0, f(x_2) - f(x_3) < 0$；

当 $f(x)$ 在 D 严格单调减少，$f(x_1) - f(x_2) > 0, f(x_2) - f(x_3) > 0$.

总之，$[f(x_1) - f(x_2)][f(x_2) - f(x_3)] > 0$.

（充分性）对于 $x_1 < x_2 < x_3$，$[f(x_1) - f(x_2)][f(x_2) - f(x_3)] > 0$.

(1) $f(x_1) - f(x_2) < 0, f(x_2) - f(x_3) < 0, \forall x_1 < x_2 < x_3, f(x)$ 严格单调增加.

(2) $f(x)_1 - f(x_2) > 0, f(x_2) - f(x_3) > 0, \forall x_1 < x_2 < x_3, f(x)$ 严格单调减少.

例 1.1-9 作出下列函数图形：

(1) $y = \operatorname{sgn}\cos x$　　　　(2) $y = [x] - 2[\frac{x}{2}]$

【解】 (1) $$y = \operatorname{sgn}\cos x = \begin{cases} 1, & 2k\pi - \frac{\pi}{2} < x < 2k\pi + \frac{\pi}{2} \\ 0, & x = k\pi + \frac{\pi}{2} \\ -1, & 2k\pi + \frac{\pi}{2} < x < 2k\pi + \frac{3}{2}\pi \end{cases}$$

图形见图 1-1.

(2) $$y = [x] - 2\left[\frac{x}{2}\right] = \begin{cases} 0, & 2k \leqslant x < 2k+1 \\ 1, & 2k+1 \leqslant x < 2(k+1) \end{cases}$$

图形见图 1-2.

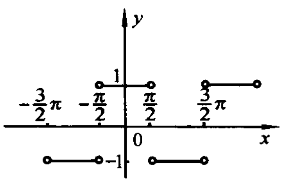

图 1-1

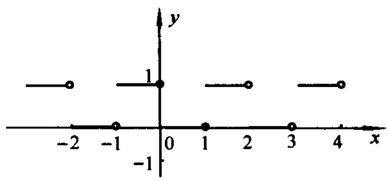

图 1-2

例 1.1-10 证明下列绝对值不等式：

(1) $|x - y| \geqslant ||x| - |y||$

(2) $|x_1 + x_2 + \cdots + x_n| \leqslant |x_1| + |x_2| + \cdots + |x_n|$

(3) $|x + x_1 + x_2 + \cdots + x_n| \geqslant |x| - (|x_1| + |x_2| + \cdots + |x_n|)$

【证】 假定已证得三角不等式：$|x + y| \leqslant |x| + |y|$.

(1) $|x| = |x - y + y| \leqslant |x - y| + |y|$

即 $$|x| - |y| \leqslant |x - y|$$

交换 x,y 位置,可得:$|y|-|x|\leqslant|y-x|=|x-y|$.

综合两式,即得,$|x-y|\geqslant||x|-|y||$.

(2) $|x_1+x_2+x_3|\leqslant|x_1+x_2|+|x_3|\leqslant|x_1|+|x_2|+|x_3|$

有限次使用三角不等式,可证得结论.

(3) $|x|=|x+x_1+\cdots+x_n-(x_1+\cdots+x_n)|\leqslant|x+x_1+\cdots+x_n|+|x_1+x_2+\cdots+x_n|$

移项,可得结论.

例 1.1-11 证明:对任何实数 a,b 成立不等式

$$\frac{|a+b|}{1+|a+b|}\leqslant\frac{|a|}{1+|a|}+\frac{|b|}{1+|b|}$$

【证】 由 $|a+b|\leqslant|a|+|b|$,可推知

$$\frac{|a+b|}{1+|a+b|}\leqslant\frac{|a|+|b|}{1+|a|+|b|}\leqslant\frac{|a|}{1+|a|+|b|}+\frac{|b|}{1+|a|+|b|}\leqslant\frac{|a|}{1+|a|}+\frac{|b|}{1+|b|}$$

例 1.1-12 证明不等式$\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{4}\cdots\frac{2n-1}{2n}<\frac{1}{\sqrt{2n+1}}$.

【证】 由 $2n=\sqrt{(2n)^2}>\sqrt{(2n)^2-1}=\sqrt{2n-1}\cdot\sqrt{2n+1}$,

$$\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{4}\cdots\frac{2n-1}{2n}<\frac{1}{\sqrt{1}\cdot\sqrt{3}}\cdot\frac{3}{\sqrt{3}\cdot\sqrt{5}}\cdot\frac{5}{\sqrt{5}\cdot\sqrt{7}}\cdots\frac{2n-1}{\sqrt{2n-1}\cdot\sqrt{2n+1}}=\frac{1}{\sqrt{2n+1}}$$

例 1.1-13 设 $f(x)=x+1,\varphi(x)=x-2$,试解方程

$$|f(x)+\varphi(x)|=|f(x)|+|\varphi(x)|$$

【解】 若 $|f(x)+\varphi(x)|=|f(x)|+|\varphi(x)|$ 成立,则 $f(x)$ 与 $\varphi(x)$ 同号,即 $f(x)\varphi(x)\geqslant0$. 于是

$$(x+1)(x-2)\geqslant0$$

解得 $x\geqslant2$ 或 $x\leqslant-1$.

例 1.1-14 设 $f(x)=(|x|+x)(1-x)$,求满足以下各式的 x 值:

(1) $f(x)=0$　　(2) $f(x)<0$

【解】 (1) $f(x)=0$,解得 $x=1$ 或 $x\leqslant0$.

(2) $f(x)<0$,解得 $x>1$.

例 1.1-15 将下列函数表示成奇、偶函数之和:

(1) $y=a^x$　　(2) $y=(1+x)^n$

【解】 设 $y=F(x)+G(x)$,其中 $F(x),G(x)$ 分别是奇、偶函数.

(1) $y=a^x$,其中　$F(x)=\frac{a^x-a^{-x}}{2},G(x)=\frac{a^x+a^{-x}}{2}$

(2) $y=(1+x)^n$,其中

$$F(x)=\frac{(1+x)^n-(1-x)^n}{2}=\sum_{k奇}C_n^kx^k$$

$$G(x)=\frac{(1+x)^n+(1-x)^n}{2}=\sum_{k偶}C_n^kx^k$$

例 1.1-16 若 $f(x)=x^2,\varphi(x)=2^x$,求 $f(\varphi(x))$ 及 $\varphi(f(x))$.

【解】

$$f(\varphi(x))=(2^x)^2=4^x$$

$$\varphi(f(x))=2^{x^2}$$

例 1.1-17　若 $\varphi(x)=x^3+1$，求 $\varphi(x^2)$，$(\varphi(x))^2$，$\varphi(\varphi(x))$.

【解】
$$\varphi(x^2)=x^6+1$$
$$(\varphi(x))^2=(x^3+1)^2=x^6+2x^3+1$$
$$\varphi(\varphi(x))=(x^3+1)^3+1$$

例 1.1-18　设 $f(x)=\dfrac{1}{1-x}$，求 $f(f(x))$，$f(f(f(x)))$，$f(\dfrac{1}{f(x)})$.

【解】
$$f(x)=\frac{1}{1-x},\quad x\neq 1$$
$$f(f(x))=\frac{1}{1-\dfrac{1}{1-x}}=\frac{x-1}{x},\quad x\neq 0,x\neq 1$$
$$f(f(f(x)))=\frac{1}{1-\dfrac{x-1}{x}}=x,\quad x\neq 0,x\neq 1$$
$$f(\frac{1}{f(x)})=\frac{1}{1-(1-x)}=\frac{1}{x},\quad x\neq 0,x\neq 1$$

例 1.1-19　求下列函数的反函数及反函数的定义域.

(1) $y=\sin x\quad(\dfrac{\pi}{2}\leqslant x\leqslant\dfrac{3}{2}\pi)$

(2) $y=\begin{cases}x, & -\infty<x<1\\ x^2, & 1\leqslant x\leqslant 4\\ 2^x, & 4<x<+\infty\end{cases}$

【解】　(1) $y=\pi-\arcsin x, x\in[-1,1]$

(2) $y=\begin{cases}x, & -\infty<x<1\\ \sqrt{x}, & 1\leqslant x\leqslant 16\\ \log_2 x, & 16<x<+\infty\end{cases}$

例 1.1-20　把下列在 $[0,+\infty)$ 上定义的函数延拓到整个实轴上去，分别使它们成为奇函数和偶函数.

(1) $y=x^2$　　(2) $y=\sin x$

【解】　(1) 奇函数：$y=\begin{cases}x^2, & x\geqslant 0\\ -x^2, & x<0\end{cases}=x^2\operatorname{sgn}x$

偶函数：$y=x^2, x\in(-\infty,+\infty)$

(2) 奇函数：$y=\sin x, x\in(-\infty,+\infty)$

偶函数：$y=\sin x\quad\operatorname{sgn}x, x\in(-\infty,+\infty)$

例 1.1-21　对于定义在 $[0,\pi]$ 上的函数 $y=x$，先把它延拓到 $[0,2\pi]$，使它关于 $x=\pi$ 对称，然后再把已延拓到 $[0,2\pi]$ 上的函数延拓到整个实轴上，使函数成为以 2π 为周期的函数.

【解】　在 $[0,2\pi]$ 上：
$$y_1=\begin{cases}x, & 0\leqslant x\leqslant\pi\\ 2\pi-x, & \pi<x\leqslant 2\pi\end{cases}$$
在 $(-\infty,+\infty)$ 上：
$$y_2=\begin{cases}x-2n\pi, & 2n\pi\leqslant x\leqslant(2n+1)\pi\\ -x+2n\pi, & (2n-1)\pi\leqslant x\leqslant 2n\pi\end{cases}$$

1.2 极限与连续

一、知识脉络图解

(1) 数列极限
- 数列极限的定义
- 数列极限的性质
- 数列极限的运算法则
- 单调有界准则

(2) 函数极限
- 函数极限的定义
  - 自变量趋于定点
  - 自变量趋于无穷
- 单侧极限
- 函数极限的性质和运算
- 函数值趋于无穷大
- 两个重要极限

(3) 无穷小与无穷大
- 无穷小(大)量的定义
- 无穷小的比较
- 无穷小(大)量的阶

(4) 连续
- 连续的定义
- 连续的性质及运算
- 初等函数的连续性
- 间断点的类型
  - 第一类间断点
  - 第二类间断点
- 闭区间上连续函数的性质

二、重点、难点解读

1. 数列极限

数列极限的定义：$x_n \to a$：$\forall \varepsilon > 0, \exists N > 0$，当 $n > N$ 时，成立 $|x_n - a| < \varepsilon$.

收敛数列具有唯一性、有界性、保序性与保号性，分述如下.

当 $x_n \to a$ 时，数列具有下列特性：

(1) 唯一性：极限唯一存在.

(2) 有界性：存在 M，$|x_n| \leqslant M$.

(3) 保序性：设 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$，$\lim\limits_{n\to\infty} y_n = b$.