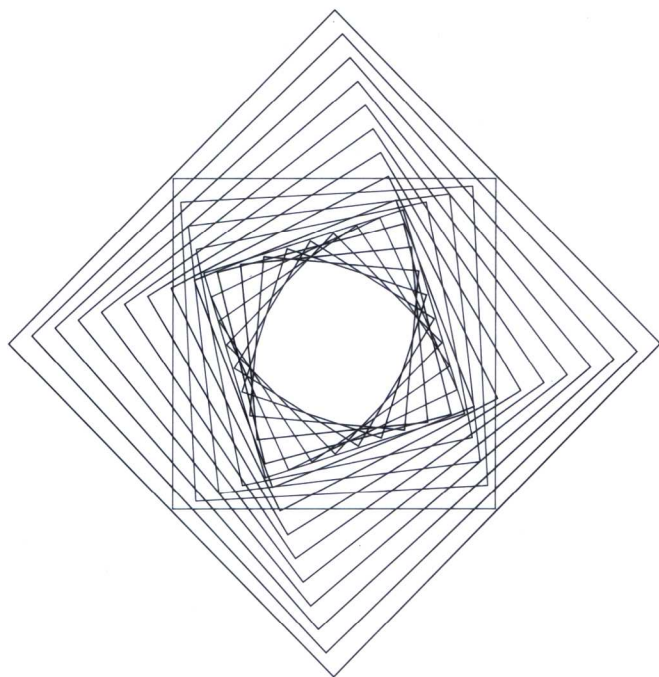


泛函分析 引论及其应用

Introduction to Functional Analysis
with Applications

时宝 王兴平 盖明久 张德存 编著



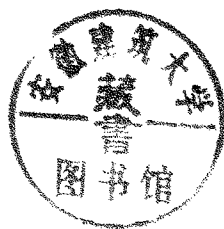
國防工業出版社

National Defense Industry Press

泛函分析引论及其应用

Introduction to Functional Analysis
with Applications

时宝 王兴平 盖明久 张德存 编著



国防工业出版社

· 北京 ·

内 容 简 介

本书在读者已有微积分学和线性代数等基础知识的基础上比较详细地介绍了泛函分析的基础理论及其应用,包括 Lebesgue 测度与 Lebesgue 积分的理论基础;度量空间的基本概念;赋范线性空间和 Banach 空间的基本概念;Banach 空间的基本理论;不动点定理及其应用;内积空间和 Hilbert 空间的基本概念和基本理论;线性算子谱理论基础;非线性算子的理论基础和 Banach 空间中的微分学;上下解方法及其应用和拓扑度理论及其应用。

本书适合高等院校数学类专业(包括军事院校数学类合训专业)高年级学生和理工专业硕士/博士研究生学习和研究之用,也可供高校教师教学和科研参考。

图书在版编目(CIP)数据

泛函分析引论及其应用 / 时宝等编著. —北京:国防
工业出版社, 2006. 8
ISBN 7-118-04573-X

I. 泛... II. 时... III. 泛函分析 IV. 0177

中国版本图书馆 CIP 数据核字 (2006) 第 069346 号

※

国防工业出版社出版发行

(北京市海淀区紫竹院南路 23 号 邮政编码 100044)

北京奥鑫印刷厂印刷

新华书店经售

*

开本 710×960 1/16 印张 24½ 字数 436 千字

2006 年 8 月第 1 版第 1 次印刷 印数 1—4000 册 定价 36.00 元

(本书如有印装错误,我社负责调换)

国防书店:(010)68428422

发行邮购:(010)68414474

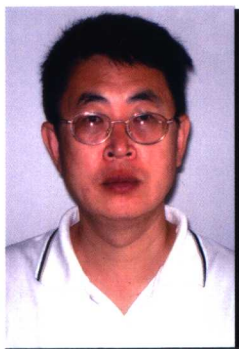
发行传真:(010)68411535

发行业务:(010)68472764



时 宝

1962年10月生，辽宁北票人。1982年毕业于海军工程学院；1993年在国防科技大学获硕士学位；1997年在湖南大学获博士学位。教授、博士生导师，海军航空工程学院应用数学研究所所长。2000年获山东省科技进步二等奖；2003年获第三届军队院校育才奖“金奖”；2004年获“全军优秀教师”称号。现主要从事泛函微分方程基础理论等方面的研究工作，已发表近60篇科学论文，其中被SCI收录25篇；出版学术专著2部。



王兴平

1962年12月生，河北玉田人。1987年研究生毕业于北京师范大学；2004年在山东大学获博士学位。副教授、硕士生导师。现主要从事非线性控制系统的理论及应用研究，已发表近20篇科学论文；出版学术专著1部。



盖明久

1965年9月生，山东莱阳人。1987年毕业于山东大学；2001年在海军航空工程学院获硕士学位。副教授、硕士生导师。一直从事泛函微分方程边值问题方面的研究工作，现为在读博士生，并转而从事数据融合的数学理论方面的研究工作，已发表近30篇科学论文，其中被SCI收录10篇；出版学术专著2部。



张德存

1967年4月生，山东费县人。1989年毕业于复旦大学；2001年在海军航空工程学院获硕士学位。副教授、硕士生导师，海军航空工程学院应用数学研究所副所长。硕士论文在2003年被评为第二届海军优秀硕士论文。2005年获第五届军队院校育才奖“银奖”。现主要从事非线性差分方程方面的研究工作，已发表近30篇科学论文，其中被SCI收录13篇；出版学术专著2部。

编著者的话

J Poincaré^① 在 1908 年指出:“如果要预见数学的未来,适当的途径就是研究这门科学的历史和现在”.陈省身^② 也指出:“了解历史的变化是了解这门科学的一个步骤”.

抽象化和形式化是 20 世纪数学的主要趋势或特征之一.这种趋势最初是受到了两大因素的推动,即 19 世纪末由 G Cantor^③ 所创立的集论和 1899 年由 D Hilbert^④ 在“Grundlagen der Geometrie”(几何基础)中所完善的现代公理化方法及运用,它们在 20 世纪逐渐成为数学抽象的典范,它们相互结合将数学的发展引向了高度抽象的道路.这方面的发展导致了 20 世纪上半叶实变函数论、泛函分析、拓扑学和抽象代数等具有标志性的四大抽象分支的崛起.这四大分支所创造的抽象语言、结构和方法又渗透到数论、微分方程、微分几何、代数几何、函数论和概率论等经典学科,推动它们在抽象的基础上革新提高,演化发展.而泛函分析就是研究拓扑线性空间到拓扑线性空间之间满足各种拓扑和代数条件映射的

^①Jules Henri Poincaré (1854—1912), 法国人,他被称为“数学全才”和“对于数学和其应用具有全面知识的最后一个人”.

^②陈省身 (Shiing-shen Chern) (1911—2004), 浙江嘉兴人, Euclid, J Gauss, G Riemann 与 E Cartan (1869—1951) 的继承者与开拓者; 1984 年获 Wolf 奖.

^③Georg Ferdinand Ludwig Philipp Cantor (1845—1918), 德国人, 他于 1879 年—1884 年间所创立的集论被誉为 19 世纪最伟大的数学创造, 由于结果太惊人, 连他本人都讲: “I see it, but I don't believe it!” (我看到了, 但是我不能相信它!)

^④David Hilbert (1862—1943), 德国人, 对 20 世纪数学有深刻影响的数学家之一, 有“无冕数学之王”之称; 他是一个乐观主义的数学家, 他说: “Wir müssen wissen, wir werden wissen.” (我们必须知道, 我们将会知道.)

学科.

泛函分析之所以能迅速发展以至成为独立的学科,乃是由于19世纪和20世纪之交数学史上发生了几件大事:

1. 分析学中问题的类似

由于分析学中新分支的形成,从而发现了代数学,几何学和分析学中不同领域中的许多概念和方法常常存在惊人的相似之处.例如,代数方程求根和微分方程求解都可以应用逐次逼近法,并且解的存在和唯一性条件也极相似.这种相似在积分方程中表现得就更为突出了.例如,1900年, E Fredholm^① [32] 创造了一种优美的方法来处理某类特殊的线性积分方程,即所谓 Fredholm 积分方程,它揭示了线性积分方程与线性代数方程组之间的相似性(即把线性积分方程看成“无限维”的线性代数方程组).随后, D Hilbert 和 E Hellinger^② 在1904年—1910年间开创了“Hilbert 序列空间 ℓ^2 ”的研究,这应该是历史上第一个具体的无限维空间.到了20年代, E Schmidt^③ 和 J Neumann^④ [83] 进一步研究,并正式确立了“Hilbert 空间”的概念,在数学界已经逐渐形成了泛函分析的基本概念.

以后数学家们又发现了其他无限维 Hilbert 空间的例子,特别是在1907年, F Riesz^⑤ 和 E Fischer^⑥ 几乎同时建立了平方可积空间 $L^2[a, b]$ 和 ℓ^2 之间的等价关系(Riesz-Fischer 定理).粗略地说,泛函分析就是在这种抽象函数空间上的微积分学. M Fréchet^⑦ [31] 在将普通的微积分演算推广到函数空间方面做了大量先驱性工作.因此, M Fréchet 是20世纪抽象泛函分析理论的奠基者之一.

1922年, S Banach^⑧ 在他的博士论文中提出了比 Hilbert 空间更一般的所谓 Banach 空间的概念,证明了一批后来成为泛函分析基础的重要定理,一般认为这标志着泛函分析的诞生. S Banach 无疑也是现代泛函分析的奠基者之一.

泛函分析的产生正是和这种情况有关,即有些乍看起来很不相干的东西,都存在着类似的地方.因此它启发人们从这些类似的东西中探寻一般的真正属于本质的东西,而这正是泛函分析的特征.

① Erik Ivar Fredholm (1866—1927), 瑞典人.

② Ernst David Hellinger (1883—1950), 波兰人.

③ Erhard Schmidt (1876—1959), 德国人, 现代抽象泛函分析的奠基者之一.

④ John von Neumann (1903—1957), 匈牙利人, A Turing (1912—1954), N Wiener (1894—1964) 和 J Neumann 被称为把计算机带上了路的“三驾马车”; A Turing: 计算机首先是一种思想模型, N Wiener: 然后它是一种程序, J Neumann: 最后它变成一台机器; J Neumann 被称为“计算机之父”.

⑤ Frigyes Frédéric Riesz (1880—1956), 匈牙利人, 1910年的工作标志着算子理论的开始; 1918年的工作^[100] 几乎建立了 Banach 空间的公理体系; 1952年与 B Szökefalvi-Nagy 合作的专著[99] 是泛函分析方面最值得阅读的著作之一.

⑥ Ernst Sigismund Fischer (1875—1954), 奥地利人.

⑦ Maurice René Fréchet (1878—1973), 法国人, 现代泛函分析奠基人之一.

⑧ Stefan Banach (1892—1945), 波兰人, 1932年的专著[4] 很快就成为经典著作.

2. 非 Euclid^① 几何的发现

D Hilbert 曾指出:“19 世纪最有启发性,最重要的数学成就是非 Euclid 几何的发现.”

由于对 Euclid 第五公设的研究, J Gauss^②, J Bolyai^③ 和 N Lobachevsky^④ 建立了非 Euclid 几何这门新的学科,以及几何对象之转变到具有更一般性质的空间,并与 G Cantor 的集论结合产生出了一般抽象的空间理论,后来, G Riemann^⑤ 的非 Euclid 几何为 50 年后的 1915 年 A Einstein^⑥ 的广义相对论提供了数学框架.

非 Euclid 几何的建立所产生的一个“最重要的影响是迫使数学家们从根本上改变了对数学性质的理解”. 历史学家通过数学这面镜子,不仅看到了数学的成就与应用,也看到了数学的发展如何教育人们去进行抽象的推理,发扬理性主义的探索精神,激发人们对理想和美的追求……在 19 世纪末及 20 世纪初发现了几何化新运河——函数被看成“函数”空间中的点或向量. 这样,就显示出了分析和几何之间相似的地方,同时存在着把分析几何化的一种可能性. 这种可能性要求把几何概念进一步推广,以至最后把 Euclid 空间扩充成无限维空间. 这种几何工具的使用乃是现代泛函分析的特征,并且在关于这门数学的各种著作中这个问题起着决定性的作用.

3. 实变函数论的诞生

集论的观点在 20 世纪初首先引起了积分学的变革,从而导致了实变函数论的建立.

19 世纪末,分析的严格化迫使数学家们认真考虑所谓“病态函数”,特别是不连续函数,如 Dirichlet^⑦ 函数和不可微函数,如 Weierstrass^⑧ 函数等,并研究这样

^①Euclid of Alexandria (公元前 325—公元前 265), 古希腊人,被称为“几何学之父”.

^②Johann Carl Friedrich Gauss (1777—1855), 德国人,与 Archimedes (公元前 287—公元前 212) 和 I Newton (1643—1727) 并称“三大数学家”; 1812 年第一次对级数的收敛性进行系统研究,开创了级数收敛性研究的新时代; 1801 年奠定近代数论的基础; 1809 年还提出正态分布; 1828 年奠定近代微分几何的基础; P Laplace (1749—1827) 认为他是世界上最伟大的数学家; 有“数学王子”之称.

^③János Bolyai (1802—1860), 罗马尼亚人.

^④Nikolai Ivanovich Lobachevsky (1792—1856), 俄罗斯人,区分了函数的可微性和连续性的概念,被誉为“几何学中的 Copernicus”.

^⑤Georg Friedrich Bernhard Riemann (1826—1866), 德国人,人们是这样评价的:“Riemann 把数学向前推进了几代人的时间”.

^⑥Albert Einstein (1879—1955), 德国人,人们称他为 20 世纪的“Copernicus”和“Newton”,对空间和时间这样一些基本概念作了本质上的变革,这一理论上的根本性突破,开辟了物理学的新纪元, 1921 年获 Nobel 物理学奖.

^⑦Johann Peter Gustav Lejeune Dirichlet (1805—1859), 德国人, 1828 年给出 Fourier 级数收敛的条件, 1837 年,他在解决 Gauss 的一个猜想中开创了解析数论.

^⑧Karl Theodor Wilhelm Weierstrass (1815—1897), 德国人,用序列极限定义无理数强烈地影响了

一个问题:如何将积分概念推广到更广泛的函数类上去.

作为近代分析的开端, H Lebesgue^① 在他的 1902 年的博士论文 “Intégrale, longueur, aire” (积分, 长度, 面积) 中, 利用 F Borel^② 于 1894 年引进的以集论为基础的 “Borel 测度” 概念建立了实变函数论的核心内容——Lebesgue 积分, 它是微积分学的重大推广, 它使微积分学的适用范围大大扩展, 引起微积分学的深刻变化和飞速发展. 因为他的工作已经做了太大的推广, 以致于 H Lebesgue 本人也害怕了如此大的推广, 他悲观地写到: “Reduced to general theories, mathematics would be a beautiful form without content. It would quickly die.” (推广到如此一般的理论, 数学将会变成没有内容的漂亮形式而已. 它很快就会死掉.) 当然, 后来数学的发展证明了并非如此.

4. 近世代数的发展

近世代数的发展, 是由 Galois^③ 群的概念开始的, 使其研究对象突破了数的范畴, 进而研究具有任意性质的对象的代数运算. 例如, 继 Galois 群之后, F Klein^④ 又提出了无限群, A Cayley^⑤ 于 1849 年—1854 年间首先指出群可以是一个普遍的概念, 从而引进了抽象群的概念, F Frobenius^⑥ 于 1895 年开始发展了研究抽象群的有力工具——群表示论, E Huntington^⑦ 和 L Dickson^⑧ 分别于 1902 年和 1905 年提出了抽象群的公理体系, J Dirichlet 于 1863 年提出理想的概念, J Dedekind^⑨ 分别于 1871 年和 1897 年引进了环和格的概念, H Weber^⑩ 于 1893 年提出域的抽象理论, 到了 20 世纪 20 年代, E Noether^⑪ 及其学派最终确立了公理化方法在代数学领域的统治地位, 人们提出把 E Noether 于 1921 年发表的 “Idealtheorie in Ringbereichen” (环中的理想论) 看成是现代抽象代数的开端.

如此合成了现代的泛函分析, 其根则生于数学物理的问题中 (例如, 边界值问题、变分问题、积分方程问题, 等等), 并且它还是现代几何的、函数的以及代数的观点的高度综合. 在泛函分析的发展中, 不管在理论上还是在方法上却为不

数学的未来, 这使他被称为 “现代分析之父”.

① Henri Léon Lebesgue (1875—1941), 法国人, 20 世纪法国最有影响的分析学家.

② Félix Édouard Justin Émile Borel (1871—1956), 法国人, 与 R Baire (1874—1932) 及 H Lebesgue 共同开创点集测度理论.

③ Evariste Galois (1811—1832), 法国人, 用群论改变了整个数学的面貌, 被称为 “数学奇才”.

④ Felix Christian Klein (1849—1925), 德国人, 1872 年提出 Erlanger 纲领.

⑤ Arthur Cayley (1821—1895), 英国人.

⑥ Ferdinand Georg Frobenius (1849—1917), 德国人.

⑦ Edward Vermilye Huntington (1874—1952), 美国人.

⑧ Leonard Eugene Dickson (1874—1954), 美国人.

⑨ Julius Wilhelm Richard Dedekind (1831—1916), 德国人.

⑩ Heinrich Martin Weber (1842—1913), 德国人.

⑪ Emmy Amalie Noether (1882—1935), 德国人, 迄今为止最伟大的女数学家.

同数学分支的公共问题起到了特殊的作用……泛函分析的精细方法结合着拓扑学代数学方法,在数学物理方程的古典问题中有着广泛的应用. L Hörmander^①在1959年得到一般变系数线性偏微分方程解的存在性、唯一性和正则性的条件就是偏微分方程应用泛函分析方法的典型成果,并为用泛函分析的观点和方法研究偏微分方程打开了全新的局面.

泛函分析的特点是它不但把古典分析的基本概念和方法一般化了,而且还把这些概念和方法几何化了.例如,不同类型的函数可以看做是“函数空间”的点或向量,这样最后得到了“抽象空间”这个一般的概念.它既包含了以前讨论过的几何对象,也包括了不同的函数空间.

正如研究有穷自由度系统要求 n 维空间的几何学和微积分学作为工具一样,研究无限自由度的系统需要无限维空间的几何学和分析学,这正是泛函分析的基本内容.因此,泛函分析也可以通俗地称为无限维空间的几何学和微积分学.古典分析中的基本方法,也就是用线性的对象去逼近非线性的对象,完全可以运用到泛函分析这门学科中.

半个多世纪来,泛函分析一方面以其他众多学科所提供的素材来提取自己研究的对象和某些研究手段,并形成了自己的许多重要分支,例如 Banach 代数,拓扑线性空间理论,广义函数论等;此外,它也强有力地推动着其他不少分析学科的发展.它在微分方程,概率论,函数论,计算数学,控制论,最优化理论等学科中都有重要的应用.今天,其观点和方法已经渗入到不少工程技术学科之中,已成为近代分析的基础之一.

在读者已有微积分学和线性代数等基础知识的基础上,本书比较详细地讨论泛函分析的基础理论及其应用.全书内容共10章,第1章介绍预备知识,包括测度与积分的理论基础;第2章介绍度量空间的基本概念;第3章介绍赋范线性空间和赋范线性空间的基本概念;第4章介绍 Banach 空间理论基础;第5章介绍不动点定理及其应用;第6章介绍内积空间和 Hilbert 空间的基本概念和基本理论;第7章介绍线性算子谱理论基础;第8章介绍非线性算子的理论基础;第9章介绍上下解方法及其应用;第10章介绍拓扑度理论及其应用.

本书整个内容的选取是由作者多年在科学研究、军事院校数学类合训专业和理工专业硕士/博士研究生教学过程中所获得的一些体会.由于作者水平有限,再加上时间比较仓促,谬误在所难免,并且只能挂一漏万,敬请读者和同行不吝以各种方式赐教.

本书适合高等院校数学类专业(包括军事院校数学类合训专业)高年级学生和理工专业硕士/博士研究生学习和研究之用,也可供高校教师教学和科研参考.

^①Lars Valter Hörmander (1931—), 瑞典人, 1962 年获 Fields 奖, 1988 年获 Wolf 奖.

本书第1章、第7章和第10章分别由张德存、王兴平和盖明久编撰,其余各章由时宝编撰,同时完成全书的统筹工作.

本书的出版得到海军航空工程学院专业技术拔尖人才基金(名师工程)、中青年学科带头人基金(尖子工程)和国防工业出版社的大力支持,在此一并表示感谢.

2006年3月24日于烟台

目 录

第 1 章 预备知识	1
1.1 Cantor 基数理论	1
1.2 Lebesgue 测度理论	6
1.2.1 外测度	6
1.2.2 可测集	8
1.2.3 可测函数	14
1.2.4 Luzin 可测函数结构定理	17
1.3 Lebesgue 积分理论	19
1.3.1 Lebesgue 积分概念及其性质	19
1.3.2 Lebesgue 控制收敛定理	30
1.4 习题	38
第 2 章 度量空间	41
2.1 度量空间的概念和例子	41
2.2 度量空间中的一些重要概念	49
2.3 度量空间的极限与完备性	52
2.4 度量空间的完备化	59
2.5 紧性	62
2.5.1 紧性概念	62
2.5.2 Ascoli-Arzelà 定理	64

2.6 习题	66
第3章 线性空间和赋范线性空间	69
3.1 线性空间	69
3.2 赋范线性空间	71
3.3 线性算子和线性泛函	80
3.3.1 线性算子	80
3.3.2 有界线性算子	83
3.3.3 线性泛函	88
3.3.4 有限维线性空间上的线性算子和线性泛函	92
3.4 对偶空间	95
3.5 习题	98
第4章 Banach 空间理论基础	104
4.1 Zorn 引理	104
4.2 Hahn-Banach 定理	105
4.3 伴随算子	117
4.3.1 伴随算子的概念	117
4.3.2 线性算子与其伴随算子之间的关系 *	119
4.4 自反空间	123
4.5 共鸣定理	127
4.6 弱收敛	131
4.6.1 赋范线性空间中的序列	131
4.6.2 有界线性算子序列	134
4.6.3 有界线性泛函序列	135
4.7 紧算子与全连续算子	138
4.7.1 紧算子与全连续算子的概念	138
4.7.2 紧算子与其伴随算子之间的关系 *	145
4.8 开映射定理	147
4.9 闭图像定理	149
4.10 习题	152
第5章 不动点定理及其应用	157
5.1 Banach 压缩映像原理及其应用	157
5.1.1 Banach 压缩映像原理	157
5.1.2 线性代数方程组解的存在唯一性定理	160

5.1.3	微分方程解的存在唯一性定理	163
5.1.4	积分方程解的存在唯一性定理	166
5.1.5	关于压缩型算子的比较 *	168
5.2	Brouwer 不动点定理及其应用	171
5.2.1	Brouwer 不动点定理	171
5.2.2	代数学基本定理	175
5.3	Schauder 不动点定理及其应用	176
5.3.1	Schauder 不动点定理	176
5.3.2	微分方程解的存在性定理	178
5.4	Krasnoselskii 不动点定理	180
5.5	习题	181
第 6 章	内积空间	185
6.1	内积空间的概念	185
6.2	直和	190
6.3	规范正交集	194
6.4	完全规范正交集	198
6.5	泛函表示	204
6.6	Hilbert 伴随算子	208
6.6.1	Hilbert 伴随算子的概念	208
6.6.2	伴随算子与 Hilbert 伴随算子之间的联系和区别 *	211
6.7	有界线性算子类	213
6.8	习题	216
第 7 章	线性算子谱理论基础	222
7.1	特征根和特征向量	222
7.2	有界线性算子的谱	223
7.3	有界 Hermite 线性算子的谱	232
7.4	Riesz-Schauder 理论	236
7.5	紧 Hermite 算子的谱性质及特征展开	246
7.6	习题	248
第 8 章	非线性算子理论基础	250
8.1	Nemetskii 算子	250
8.2	Hölder 不等式和 Minkowski 不等式	256
8.3	Urysohn 算子	258

8.4	Banach 空间中的微积分学	260
8.4.1	积分学	261
8.4.2	微分学	262
8.4.3	Fréchet 微分学	264
8.4.4	Gâteaux 微分学	274
8.5	隐函数定理和反函数定理	277
8.6	Banach 空间中微分方程的 Cauchy 问题	282
8.6.1	Grönwall-Bellman 不等式	282
8.6.2	Cauchy-Picard 解的存在唯一性定理	286
8.6.3	解的整体存在性定理	287
8.7	习题	288
第 9 章	上下解方法及其应用	290
9.1	锥理论和半序方法	290
9.1.1	锥理论	290
9.1.2	增算子和上下解方法	296
9.2	一阶微分方程的 Cauchy 问题	298
9.3	微分方程的周期边值问题	304
9.3.1	一阶微分方程的周期边值问题	304
9.3.2	二阶微分方程的周期边值问题	306
9.4	二阶微分方程的两点边值问题	309
9.5	拟上下解方法及其应用	313
9.6	Volterra 积分-微分方程	317
9.6.1	一阶 Volterra 积分-微分方程的 Cauchy 问题	317
9.6.2	二阶 Volterra 积分-微分方程的周期边值问题	320
9.7	泛函微分方程解的存在唯一性	324
9.7.1	有限时滞情形	325
9.7.2	无限时滞情形	327
9.8	习题	331
第 10 章	拓扑度理论及其应用	332
10.1	Brouwer 度	332
10.1.1	C^2 映像的 Brouwer 度定义	332
10.1.2	连续映像的 Brouwer 度定义	339
10.2	Brouwer 度的性质	341

10.2.1 Brouwer 度的基本性质	341
10.2.2 Brouwer 度的简化定理与乘积公式	344
10.2.3 Borsuk 定理	345
10.2.4 Brouwer 度的应用举例	346
10.3 Leray-Schauder 度	348
10.3.1 Leray-Schauder 度的建立	349
10.3.2 Leray-Schauder 度的性质	352
10.3.3 孤立零点的指数	353
10.3.4 Borsuk 定理的推广	355
10.4 不动点定理	356
10.5 习题	359
参考文献	361
术语索引	369
符号意义 (有特殊说明的除外)	376

第1章 预备知识

1.1 Cantor 基数理论

基数,也称为势,是集论的基本概念之一,是通常用以表示多少的数的概念的推广和发展.

定义 1.1.1 (1) 若存在一个从 A 到 B 的映射 φ , 记为 $\varphi: A \rightarrow B$, 使得对任意的 $x \in A$, 存在唯一的 $y \in B$, 使得 $y = \varphi(x)$, 反之亦然, 则称 A 和 B 是 1-1 的;

(2) 若 A 和 B 是 1-1 的, 则称 A 和 B 有相同的基数^①, 记为 $\text{card}A = \text{card}B$;

(3) 若 A 和 B 的某个真子集是 1-1 的, 则称 A 的基数不大于 B 的基数, 记为 $\text{card}A \leq \text{card}B$;

(4) 若 A 和 B 的某个真子集是 1-1 的, 而 A 和 B 不是 1-1 的, 则称 A 的基数小于 B 的基数, 记为 $\text{card}A < \text{card}B$.

记 $\text{card}\mathbb{N} = \aleph_0$. 称其为可数基数.

定理 1.1.1 (Cantor-Bernstein^② 定理, 1897) 若 $\text{card}A \leq \text{card}B$, 并且 $\text{card}B \leq \text{card}A$, 则 $\text{card}A = \text{card}B$.

证明 设 A 与 $B_1 \subset B$ 和 B 与 $A_1 \subset A$ 分别是 1-1 的, 并且对应关系分别是

^① 为了避免讨论的一般化, 我们在这里不给出一般的基数的概念.

^② Felix Bernstein (1878—1956), 德国人.