王振宇教授论文集

清华大学出版社

徐宝文 编

王振宇教授论文集

清华大学出版社
北京

图书在版编目(CIP)数据

王振宇教授论文集/徐宝文编．—北京：清华大学出版社，2006．3
ISBN 7-302-12551-1

Ⅰ．王…　Ⅱ．徐…　Ⅲ．①王振宇—文集 ②函数论—文集　Ⅳ．O174-53

中国版本图书馆 CIP 数据核字（2006）第 010857 号

出 版 者：清华大学出版社　　地　址：北京清华大学学研大厦
http://www.tup.com.cn　　邮　编：100084
社 总 机：010-62770175　　客户服务：010-62776969
责任编辑：索　梅
印 装 者：三河市春园印刷有限公司
发 行 者：新华书店总店北京发行所
开　本：203×280　印张：27　插页：3　字数：707 千字
版　次：2006 年 3 月第 1 版　2006 年 3 月第 1 次印刷
书　号：ISBN 7-302-12551-1/TP·8030
印　数：1～500
定　价：140.00 元

作者像

自　　序

从 1956 年我大学毕业到这个所工作算起，从事科研工作有 50 年了。成就说不上，自己感觉算得上成绩的，也屈指可数。到现在，虽时有志向再做点什么，也偶尔做出点什么，但更多的时候知道 20＋50 意味着什么。

承徐宝文、孙潮义、曹万华等君的盛意，出版了这本论文集。连同国防工业出版社出过的《树枚举与算法复杂性分析》、《程序复杂性度量》和《Ada 软件开发技术》，大致能反映走过的路、喝过的水、摔过的跤，以及偶有的所得。整理过程中，常自觉浅陋，但那已是历史。倘若能重来，有些事是不会那么做的，有些文章也是不会那么写的。不过，“倘若”，只能是“倘若”，这一段历史只能这么交代了。感谢论文集中收录的论文的合作者——其中的绝大多数曾是我的硕士生或博士生。我的面前常常浮现他们年轻、鲜活的面容，在搜集这些合作论文的时候就更加如此了。他们中间大多数和我仍有经常的联系，虽然有的远隔千万里，有的在我周围工作。做了二十多年研究生导师，交了这么多青年朋友，实乃一段人生值得回忆的经历和享受。

50 年前，我的老师、中国科学院学部委员、这个所的创建人——李国平教授召唤我来这里工作，而在这之前就把我引上了科学研究的道路。老前辈、数学家熊庆来教授也对我多有教诲与指导。在回首往事的时候，再次向这两位大师表示我由衷的敬意。

我的全部工作时间都在这个所。709 所要庆祝建所 50 周年了，衷心地祝愿 709 所兴旺发达，在王小非所长的带领下，为我国国防科学技术事业做出更大的贡献。

王振宇

2005 年 8 月于武汉

中船重工集团公司 709 研究所

目　　录

CONTENTS

第 1 部 分

理论数学(函数论)

全纯函数的某些性质*

在本文中,我们将主要研究$\wp_p$族的某些性质。我们说单位圆内之全纯函数$\in \wp_p$,那是要对于任何的r,$0<r<1$,成立着

$$\wp_p(f,r)=\frac{1}{\pi r^2}\iint\limits_{|z|<r}|f(z)|^p\mathrm{d}x\mathrm{d}y\leqslant 1$$

此处p为一正数。我们还把诸结果推广到非圆域的情况。

1. 以下给出$\wp_p$族函数的几点简单性质。

a. 若$f(z)\in\wp_p$,它在原点之 Taylor 展式为$f(z)=\sum\limits_{n=0}^{\infty}a_nz^n$,$p\geqslant 1$,则有

$$|a_n|\leqslant\sqrt[p]{\frac{np+2}{2}},\qquad n=0,1,2,\cdots$$

又,此估计是精确的,对于固定的n及p,等式由函数

$$f_{p,n}(z)=\sqrt[p]{\frac{np+2}{2}}\cdot e^{ia}\cdot z^n$$

a为实数达到。

这由关于解析函数系数的 Cauchy 公式及 Minkowski 不等式,可立即得出:

设$f(z)$为单位圆内之全纯函数,p为一正数,又

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}|f(re^{i\theta})|^p\mathrm{d}\theta\leqslant 1,\qquad 0<r<1$$

则称$f(z)\in H_p$,这时有

b. $H_1\subset\wp_2$。

这是因为任何长度不超过2π的可求是长曲线所范围的区域的面积不超过π。

c. 若$f(z)\in\wp_1$,则对于任意的非负整数p,成立着

$$\frac{1}{\pi r^2}\iint\limits_{|z|<r}|f(z)|^{2^p}\mathrm{d}x\mathrm{d}y\leqslant 1$$

当$r<\left(\frac{2}{3}\right)^p$时。

证　$p=0$时显然成立。今证$p=1$时成立。

设$f(z)$在原点之 Taylor 展式 为$\sum\limits_{k=0}^{\infty}a_kz^k$,则成立着

$$\frac{1}{\pi r^2}\iint\limits_{|z|<r}|f(z)|^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{|a_k|^2}{k+1}\cdot r^{2k}=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{|a_k|^2}{(k+1)(k+2)^2}\cdot r^{2k}\cdot(k+2)^2$$

---

* 本文摘要第一次发表于 1957 年 1 月的内部论文集《中国科学院武汉数学研究室函数论研究报告》第 1 期,93～97,全文发表于《数学进展》,1957(3):612～922。《中国科学院武汉数学研究室函数论研究报告》,1,1958 年由科学出版社正式出版。

但我们可以肯定$\sum\limits_{k=0}^{\infty}\frac{|a_k|^2}{(k+1)(k+2)^2}\leqslant\frac{1}{4}$。事实上，因 $f(z)\in\wp_1$，则容易证明 $\frac{2}{z^2}\int_0^z tf(t)\mathrm{d}t=\sum\limits_{k=0}^{\infty}\frac{2}{k+2}a_kz^k\in H_1$，设$\frac{2}{k+2}a_k=c_k$，则因$\sum\limits_{k=0}^{\infty}\frac{|c_k|^2}{k+1}\leqslant 1$，[1] 故

$$\sum_{k=0}^{\infty}\frac{4|a_k|^2}{(k+1)(k+2)^2}\leqslant 1$$

此即我们需要的。因此，

$$\frac{1}{\pi r^2}\iint\limits_{|z|<r}|f(z)|^2\mathrm{d}\sigma\leqslant\frac{1}{4}\max_{k\geqslant 0}r^{2k}\cdot(k+2)^2$$

为使上式$\leqslant 1$，只需$\max\limits_{k\geqslant 0}r^{2k}(k+2)^2\leqslant 4$，即对任意的 k 要求 r^{2k}。$(k+2)^2\leqslant 4$，故需 $r\leqslant\min\limits_{k\geqslant 0}\sqrt[k]{\frac{2}{k+2}}=\frac{2}{3}$。用归纳法，即得。

2. 本节中将给出$\wp_p$族函数的模及各级微商的模的一些估计式，但我们放宽条件，即只要求

$$\iint\limits_{|z|<1}|f(z)|^p\mathrm{d}x\mathrm{d}y<\infty$$

注意以下两点事实。

a. 若 $f(z)$为单位圆内之解析函数，且$|f(z)|\leqslant\frac{K}{(1-r^2)^\alpha}$，$|z|=r$，此处 α 为一非负实数，则

$$|f^{(n)}(z)|\leqslant\frac{K_n}{(1-r^2)^{\alpha+n}},\qquad |z|=r,\qquad n=1,2,\cdots$$

K_n 只与 n 及 K 有关。

由 Poisson 公式及 Cauchy 积分公式立即可得。

b. 设有闭曲线 Γ，它在点 z_0 的左右切线存在，且夹角(内向的)不为零，则可定义区域 $\Delta_\varepsilon(z_0)$如下：若 ε 为适当小的正数，自 z_0 向区域的内部作两条半射线，使它们与左、右切线之夹角为 ε，则由此二直线所夹的区域内的部分而又与 z_0 适当接近之部分称为 $\Delta_\varepsilon(z_0)$，如图 1 所示。

我们证明如下的引。

引 设 $f(z)$为单位圆内之解析函数，且

$$|f(z)|\leqslant\frac{K}{(1-r^2)^\alpha}$$

则必有

$$|f(z)|\leqslant\frac{K'}{|e^{i\theta}-z|^\alpha}$$

此处 $z\in\Delta_\varepsilon(e^{i\theta})$，$e^{i\theta}$为单位圆周上任何点，$\varepsilon$ 为固定正数，$K'=K'(K,\varepsilon)$。

设 $z=re^{i\varphi}$，今用图 2 来表示。设 A 为 $re^{i\varphi}$，D 为 $e^{i\varphi}$，B 为 $e^{i\theta}$，$E\hat{B}O=\frac{\pi}{2}-\varepsilon$，$DC$ 为$|z|=1$ 在 D 之切线，C 为 DC 与 AB 之交点，故

$$|re^{i\varphi}-e^{i\theta}|=AB\leqslant AC=AD/\cos D\hat{A}C=(1-r)/\cos D\hat{A}C$$

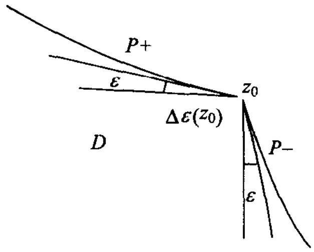

图 1

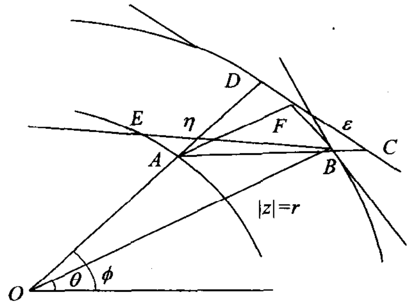

图 2

作 $AF \parallel OB$,则 $D\hat{A}C=\eta+F\hat{A}B\leqslant\eta+F\hat{C}B=\eta+E\hat{B}O=\eta+\left(\frac{\pi}{2}-\varepsilon\right)$,但当 $r\to 1$ 时,$\eta\to 0$,因此存在数 M,M 与 θ 及 r 无关,使得

$$|z-e^{i\theta}|\leqslant\frac{(1-r)M}{\cos\left(\frac{\pi}{2}-\varepsilon\right)}=\frac{(1-r)M}{\sin\varepsilon}$$

另一方面,又成立着$(1-r)\leqslant|z-e^{i\theta}|$,因此不管 α 为正还是为负,都有

$$|f(z)|\leqslant\frac{K}{|z-e^{i\theta}|^{\alpha}}\cdot\frac{M'}{(\sin\varepsilon)^{\alpha}}=\frac{K'}{|z-e^{i\theta}|^{\alpha}}$$

设 $f(z)$为单位圆内之全纯函数,又

$$\iint\limits_{|z|<1}|f(z)|^{p}\mathrm{d}x\mathrm{d}y=M<\infty$$

p 为一正数。但因$|f(z)|^{p}$ 为一次调和函数,故对任一 z,$|z|=r<1$,可作一以 z 为中心,以$(1-r)$为半径的圆 $c(z)$,使得

$$|f(z)|^{p}\leqslant\frac{1}{\pi(1-r)^{2}}\iint\limits_{c(z)}|f(z)|^{p}\mathrm{d}x\mathrm{d}y\leqslant\frac{1}{\pi(1-r)^{2}}\iint\limits_{|z|<1}|f(z)|^{p}\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

因此,得到

$$|f(z)|\leqslant\frac{K}{(1-r)^{\frac{2}{p}}}$$

此处 $K=\sqrt[p]{M/\pi}$。

由上面的讨论可得:

定理 1　若 $f(z)$为单位圆内之全纯函数,且

$$\iint\limits_{|z|<1}|f(z)^{p}|\mathrm{d}x\mathrm{d}y=M<\infty,\qquad p>0$$

则有

$$|f^{(n)}(z)|\leqslant\frac{K_n}{|e^{i\theta}-z|^{\frac{2}{p}+n}},\qquad n=0,1,2,\cdots,\ |z|=r,\text{当 } r>r_0 \text{ 时}$$

$\theta\in[0,2\pi]$,$z\in\Delta_{\varepsilon}(e^{i\theta})$,$\varepsilon>0$,$K_n=M\cdot 2^{\frac{n(n-1)}{2}+n\cdot\frac{2}{p}}\cdot A\cdot(\sin\varepsilon)^{-n-\frac{2}{p}}$,而 A 只与 r_0 有关。

3. 这里,我们将上面的结果推广到较一般的区域。

设 D 为由闭逐段光滑曲线 Γ 所范围的内域,$f(z)$在 D 内全纯,且

$$\iint\limits_{D}|f(z)|^{p}\mathrm{d}x\mathrm{d}y<\infty,\qquad p>0$$

下面分别来考虑。设 Γ 在 z_0 光滑，则可通过 z_0 作一与 p 相切之圆 $c(z_0)$，它完全含在 D 内，这时当然也有 $\iint\limits_{c(z_0)} |f(z)|^p dxdy < \infty$，但是由 $\Delta_\varepsilon(z_0)$ 的定义，对于适当的与 z_0 接近的 z，$\Delta_\varepsilon(z_0)$ 对于 Γ 及 $c(z_0)$ 是完全相同的，因此，由定理 1，

$$|f^{(n)}(z)| \leqslant \frac{K_n}{|z-z_0|^{n+\frac{2}{p}}}, \qquad n=0,1,2,\cdots$$

$z\in\Delta_\varepsilon(z_0)$，$\varepsilon>0$。

如果 Γ 在 z_0 之左右切线之内向夹角大于 π，则可以用通过 z_0 的几个圆 $c_1(z_0), c_2(z_0), \cdots, c_m(z_0)$（这中间的每个圆都属于 D，且有两个分别与 Γ 在 z_0 之左右切线相切，它们是互相衔接的，而且 $m=3$ 已足）来进行上面的讨论，即可证明对于这样的 z_0，上面的不等式仍然成立。

以下讨论内向夹角小于 π 的情况，我们从简单的情况做起。

设 $f(z)$ 在 $0<\arg z<\alpha$，$|z|<1$ 内解析，此区域记为 $D_{a,0<a<\pi}$，又有

$$\iint\limits_{D_a} |f(z)|^p \mathrm{d}x\mathrm{d}y < \infty$$

以 $z=z(w)=w^{\frac{a}{\pi}}$ 将 D'：$0<\arg w<\pi$，$|w|<1$ 映射为 D_a，则

$$\infty > \iint\limits_{D_a} |f(z)|^p \mathrm{d}x\mathrm{d}y = \iint\limits_{D'} |f[z(w)]|^p \cdot \left(\frac{a}{\pi}\right)^2 \frac{1}{|w|^{2\left(1-\frac{a}{\pi}\right)}} \mathrm{d}u\mathrm{d}v$$

$$= \left(\frac{a}{\pi}\right)^2 \iint\limits_{D'} \left| f[z(w)] \cdot \frac{1}{w^{\frac{2}{p}\left(1-\frac{a}{\pi}\right)}} \right|^p \mathrm{d}u\mathrm{d}v, \qquad w=u+iv$$

因为 D' 的边界在原点是光滑的，因此，在此点可用上面的讨论。

于是，

$$|F(w)| = \left| \frac{f[z(w)]}{w^{\frac{2}{p}\left(1-\frac{a}{\pi}\right)}} \right| \leqslant \frac{K}{|w|^{\frac{2}{p}}}, F(w) = \frac{f[z(w)]}{w^{\frac{2}{p}\left(1-\frac{a}{\pi}\right)}}$$

当 $w\in\Delta_\varepsilon(0)$ 时，

$$|f(z)| = |f[z(w)]| \leqslant \frac{K}{|w|^{\frac{2}{p}\cdot\frac{a}{\pi}}} = \frac{K}{|z|^{\frac{2}{p}}}$$

当 $z\in\Delta_\varepsilon(0)$ 时，又由上面的讨论：

$$|F'(w)| = \left| w^{-\frac{2}{p}\left(1-\frac{a}{\pi}\right)} f'[z(w)] \cdot \frac{a}{\pi} w^{\frac{a}{\pi}-1} - \frac{2}{p}\left(1-\frac{a}{\pi}\right) f[z(w)] w^{-\frac{2}{p}\left(1-\frac{a}{\pi}\right)-1} \right| \leqslant \frac{K_1}{|w|^{\frac{2}{p}+1}}$$

因此，计及已得的关于 $f(z)$ 的估计，得

$$|f'[z(w)]| \leqslant \frac{K_1}{|w|^{\frac{2}{p}+1-\frac{2}{p}\left(1-\frac{a}{\pi}\right)+\frac{a}{\pi}-1}} + \frac{K}{|w|^{\frac{2}{p}\cdot\frac{a}{\pi}+\frac{2}{p}\left(1-\frac{a}{\pi}\right)+1-\frac{2}{p}\left(1-\frac{a}{\pi}\right)+\frac{a}{\pi}+1}} = \frac{K_1'}{|w|^{\frac{a}{\pi}\left(1+\frac{2}{p}\right)}}$$

当 $w\in\Delta_\varepsilon(0)$ 时，有

$$|f'(z)| \leqslant \frac{K_1'}{|z|^{\frac{2}{p}+1}}$$

当 $z\in\Delta_\varepsilon(0)$ 时，继续进行演算，便可得到

$$|f^{(n)}(z)| \leqslant \frac{K_n'}{|z|^{\frac{2}{p}+n}}, \qquad n=0,1,2,\cdots$$

$z\in\Delta_\varepsilon(0)$，经过平移，旋转及适当处理，即可得：

定理2　设Γ为一闭逐段光滑曲线，且其每个角点之内向顶角都大于零，D为其内域，$f(z)$为D内之全纯函数，又

$$\iint\limits_{D} | f(z) |^{p} \mathrm{d}x\mathrm{d}y < \infty, \qquad p > 0$$

则对于Γ上任一点z_0，成立着

$$| f^{(n)}(z) | \leqslant \frac{K_n}{| z - z_0 |^{n+\frac{2}{p}}}, \qquad n = 0,1,2,\cdots$$

但$z \in \Delta_\varepsilon(e^{i\theta})$，$\varepsilon$为一固定正数，$K_n = K(n \cdot \varepsilon, f(z))$与$z_0$及$z$无关。

对于可求长简单连续曲线，只须改之以“z_0始遍于Γ上”，这时K_n与z_0有关，而与z无关。

可将Seidel及Walsh的结果推广到这里[2]。

4. 本节讨论Tsuji的结果[3]。我们先证明下述的引。

引　若$f(z)$为单位圆内之全纯函数，且在$|z|=1$上存在一个测度为零的集E，使得当$e^{i\theta}\in$时

$$| f(z) | \leqslant \frac{K_\theta}{| e^{i\theta} - z |^{\alpha}}, \qquad \alpha > 0$$

此处$z \in \Delta_\varepsilon(e^{i\theta})$，$\varepsilon > 0$，$K_\theta = K(\theta, \varepsilon)$，则对于任意的$\delta > 0$，必有

$$| f^{(n)}(z) | \leqslant \frac{K_n}{| e^{i\theta} - z |^{\alpha+n}}, \qquad n = 0,1,2,\cdots$$

当$z \in \Delta_{\varepsilon+\delta}(e^{i\theta})$时，$e^{i\theta} \in E$，$K_n = K(n, \theta, \varepsilon, \delta)$与$z$无关。

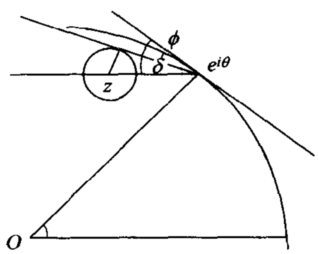

图3

事实上，在$\Delta_\varepsilon(e^{i\theta})$中任取一点$z$，$\overline{ze^{i\theta}}$与$\Delta_\varepsilon(e^{i\theta})$之两边所夹之较小的角记为$\delta$，则$\delta > 0$，自$z$向$\Delta_\varepsilon(e^{i\theta})$的这一夹边作垂线，设此长度为$c$，则$|z - e^{i\theta}| = c/\sin\delta$，如图3所示。

以z为中心，以c为半径的圆设为$c(z)$，则Cauchy积分公式，

$$| f'(z) | \leqslant \left| \frac{2!}{2\pi i} \right| \cdot \int_{c(z)} \frac{| f(s) |}{| z - s |^2} \, | \mathrm{d}s | \leqslant \frac{1}{\pi} \cdot \frac{1}{c^2} \cdot c \cdot \frac{K_\theta}{(| z - e^{i\theta} | - c)^{\alpha}} \cdot 2\pi$$

$$= \frac{2}{| z - e^{i\theta} | \cdot \sin\delta} \cdot \frac{K_\theta}{| z - e^{i\theta} |^{\alpha} (1 - \sin\delta)^{\alpha}}$$

$$= \frac{2 \cdot K_\theta}{\sin\delta (1 - \sin\delta)^{\alpha} \, | z - e^{i\theta} |^{\alpha+1}} = \frac{K_{\theta,\delta}}{| z - e^{i\theta} |^{\alpha+1}}$$

注意δ之任意性，更将如上之讨论用之于高级微商，则得此引。

由Tsuji的结果[3]立刻可得如下推论。

推论　设$f(z)$为单位圆内的全纯函数，且满足

$$\iint\limits_{|z|<1} | f(z) |^{p} \mathrm{d}x\mathrm{d}y < \infty, \qquad p > 0$$

则在$|z|=1$上存在一个测度为零的集E，使得若$e^{i\theta} \overline{\in} E$时，成立着

a. 若p为一正整数，则存在着$K_{n,\theta}$使得

$$| f^{(n)}(z) | \leqslant \frac{K_{n,\theta}}{| z - e^{i\theta} |^{n+\frac{1}{p}}}, \qquad n = 0,1,2,\cdots$$

b. 若p不为一正整数，则对任意的$\eta > 0$，存在着$K_{\theta,\delta}^{n}$，使得