

王振宇教授  
论文集

清华大学出版社

徐宝文 编

# 王振宇教授

论文集

清华大学出版社 北京

版权所有,翻印必究。举报电话:010-62782989 13501256678 13801310933

**图书在版编目(CIP)数据**

王振宇教授论文集/徐宝文编. —北京:清华大学出版社,2006.3

ISBN 7-302-12551-1

I. 王… II. 徐… III. ①王振宇—文集 ②函数论—文集 IV. O174-53

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2006)第 010857 号

出版者:清华大学出版社 地 址:北京清华大学学研大厦  
http://www.tup.com.cn 邮 编:100084  
社 总 机:010-62770175 客户服务:010-62776969

责任编辑:索 梅

印 装 者:三河市春园印刷有限公司

发 行 者:新华书店总店北京发行所

开 本:203×280 印张:27 插页:3 字数:707千字

版 次:2006年3月第1版 2006年3月第1次印刷

书 号:ISBN 7-302-12551-1/TP·8030

印 数:1~500

定 价:140.00元



作者像

# 自序

从1956年我大学毕业到这个所工作算起,从事科研工作有50年了。成就说不上,自己感觉算得上成绩的,也屈指可数。到现在,虽时有志向再做点什么,也偶尔做出点什么,但更多的时候知道20+50意味着什么。

承徐宝文、孙潮义、曹万华等君的盛意,出版了这本论文集。连同国防工业出版社出过的《树枚举与算法复杂性分析》、《程序复杂性度量》和《Ada软件开发技术》,大致能反映走过的路、喝过的水、摔过的跤,以及偶有的所得。整理过程中,常自觉浅陋,但那已是历史。倘若能重来,有些事是不会那么做的,有些文章也是不会那么写的。不过,“倘若”,只能是“倘若”,这一段历史只能这么交代了。感谢论文集中收录的论文的合作者——其中的绝大多数曾是我的硕士生或博士生。我的面前常常浮现他们年轻、鲜活的面容,在搜集这些合作论文的时候就更加如此了。他们中间大多数和我仍有经常的联系,虽然有的远隔千万里,有的在我周围工作。做了二十多年研究生导师,交了这么多青年朋友,实乃一段人生值得回忆的经历和享受。

50年前,我的老师、中国科学院学部委员、这个所的创建人——李国平教授召唤我来这里工作,而在这之前就把我引上了科学研究的道路。老前辈、数学家熊庆来教授也对我多有教诲与指导。在回首往事的时候,再次向这两位大师表示我由衷的敬意。

我的全部工作时间都在这个所。709所要庆祝建所50周年了,衷心地祝愿709所兴旺发达,在王小非所长的带领下,为我国国防科学技术事业做出更大的贡献。

王振宇

2005年8月于武汉

中船重工集团公司709研究所

# 目 录

<b>第 1 部分 理论数学(函数论)</b> .....	1
全纯函数的某些性质.....	3
整函数的正规上升性及值的分布 .....	12
关于整函数的 Weierstrass 函数 .....	20
整函数的一个插补问题(英文) .....	25
无限级整函数的插补问题 .....	42
整函数系数的聚值方向及其对封闭性问题的应用 .....	49
<b>第 2 部分 计算数学</b> .....	55
$I_{01}$ 逼近与多项式计算中的系数舍入 .....	57
$I_{01}$ 逼近与多项式计算中的系数舍入(续) .....	71
<b>第 3 部分 树枚举与算法复杂性分析</b> .....	79
有序树的几个性质(英文) .....	81
有向树上的几个组合问题(英文) .....	83
关于树的带次数路径长度问题 .....	88
有序树上的几个组合问题(英文) .....	93
关于自由树的端点数(英文) .....	97
树上的可加枚举问题(英文).....	101
$t$ 叉树上的几个组合问题(英文) .....	108
$t$ 叉树上的一个计数问题(英文) .....	113
有序树上的一个计数问题(英文).....	117
树的几个计数问题.....	123
可加复杂性算法理论(英文).....	125
再论树上的可加枚举问题(英文).....	131
有序树上的几个等分问题(英文).....	137
树枚举与树算法复杂性计算(英文).....	145
有向树上的可加枚举问题.....	151
关于有序树的结点枚举与结点路径长度(英文).....	153
递归树的若干枚举特征(英文).....	158
BB 图的枚举特征 .....	169
<b>第 4 部分 Ada 语言、编译与工具</b> .....	173
Ada 语言分别编译及其实现.....	175
对抽象、封装和单元层次结构的基于 Ada 的支持(英文) .....	184

ρ 图:Ada 并发程序的会合次序图(英文) .....	198
领域专用的面向对象软件开发(英文).....	210
为 Ada95 引入 A 型对象 .....	215
并发对象 Ada95 代码的自动生成(英文) .....	222
关于 Ada 软件设计图元的优化(英文) .....	229
Ada 中分散化的基于事件的隐式调用(英文).....	236
Omega: 一个易于达到 Ada 目的的统一对象模型(英文) .....	248
提高 Ada 并发效率的一种途径 .....	273
程序树的快速定位算法.....	281
<b>第 5 部分 程序复杂性度量</b> .....	287
程序的结构路径复杂性度量.....	289
SSACC: 基于软件科学法的 Ada 并发复杂性度量 .....	301
基于会合关系的 Ada 并发复杂性度量(英文) .....	306
<b>第 6 部分 软件工程、工具与环境</b> .....	315
单一语言:通向集成化软件开发环境的一种途径(英文) .....	317
面向对象的可重用软部件库系统的设计与实现.....	321
PERTS: 一个实时软件原型建造环境的设计与实现 .....	328
关于软件标本重用技术的研究.....	338
并发软件的图形化设计方法研究.....	344
<b>第 7 部分 软件体系结构</b> .....	351
CHAM 的扩展与应用(英文) .....	353
软件体系结构在舰载指挥控制系统中的应用.....	362
基于体系结构模型检查分布式控制系统.....	367
可扩展和可配置事件通知服务体系结构的研究.....	381
TFSP: 一种分布式实时系统的形式化描述工具 .....	395
一种基于 ADL 规格说明的实时系统测试用例生成方法研究 .....	402
<b>王振宇教授的主要成就与贡献</b> .....	409
<b>王振宇教授的主要著作目录</b> .....	412
<b>感谢师恩——编者后记(徐宝文)</b> .....	420

# CONTENTS

<b>Part I Pure Mathematics (Theory of Functions)</b> .....	1
Some Properties of Holomorphic Functions (in Chinese, English Summary) .....	3
Normal Growth and Distribution of Values of Entire Functions (in Chinese) .....	12
Weierstrass Function of Entire Functions (in Chinese) .....	20
On an Interpolation Problem of Entire Functions .....	25
Interpolation Problems of Entire Functions of Infinite Order (in Chinese) .....	42
Cluster Directions of Entire Functions and Its Application in Closure Problems (in Chinese) .....	49
<b>Part II Computation Mathematics</b> .....	55
$I_{01}$ Approximation and Round-off Problem for Coefficients in Computation of Polynomials (in Chinese, English Summary) .....	57
$I_{01}$ Approximation and Round-off Problem for Coefficients in Computation of Polynomials (Continued) (in Chinese, English Summary) .....	71
<b>Part III Tree Enumeration and Algorithm Complexity Analysis</b> .....	79
Some Properties of Ordered Trees .....	81
Some Combinatorial Problems on Oriented Trees .....	83
On the Degree Path Length of Tree .....	88
Some Combinatorial Problems on Ordered Trees .....	93
On the Endpoint Number of Free Trees .....	97
Additive Enumeration Problems over Trees .....	101
Some Combinatorial Problems on $t$ -ary Trees .....	108
An Enumeration Problem on $t$ -ary Trees .....	113
An Enumeration Problem on Ordered Trees .....	117
Some Enumeration Problems of Trees (in Chinese) .....	123
Additive Complexity Algorithm Theory .....	125
More on Additive Enumeration Problems over Trees .....	131
Some Equal Divisions on Ordered Tree Set .....	137
Tree Enumeration and Tree Algorithm Complexity Computation .....	145
Additive Enumeration Problems on Oriented Trees (in Chinese) .....	151
On Node Enumeration and Node Path Length of Ordered Trees .....	153
Some Enumerative Characteristics of Recursive Trees .....	158
Some Enumerative Characteristics of BB Graphs (in Chinese) .....	169



<b>Part IV Ada Language, Compiling and Tools</b> .....	173
Separate Compilation in Ada and Its Implementation .....	175
Ada-Based Support for Abstraction, Encapsulation and Unit Hierarchy .....	184
$\rho$ Graph: Rendezvous Ordering Graph for Ada Concurrent Programs .....	198
Domain-Specific Object-Oriented Software Development .....	210
Introducing A-Object into Ada95 (in Chinese, English Summary) .....	215
Automatically Generating Ada95 Codes for Concurrent Objects .....	222
On Optimization of Ada Software Design Icons .....	229
Event-based Implicit Invocation Decentralized in Ada .....	236
Omega: A Uniform Object Model Easy to Gain Ada's Ends .....	248
An Approach of Improving Ada Concurrent Efficiency (in Chinese, English Summary) .....	273
A Fast Locating Algorithm for Program Tree (in Chinese, English Summary) .....	281
 <b>Part V Program Complexity Measure</b> .....	287
Program Complexity Measure Based on Structure and Path (in Chinese, English Summary) .....	289
SSACC: Ada Concurrent Complexity Metrics Based on Software Science (in Chinese, English Summary) .....	301
Ada Concurrent Complexity Metrics Based on Rendezvous Relations .....	306
 <b>Part VI Software Engineering, Tools and Environment</b> .....	315
Monolingual: One Way towards the Integrated Software Development Environment .....	317
The Design and Implementation of Reusable Component Base System (in Chinese, English Summary) .....	321
PERTS: Design and Implementation of a Real Time Prototyping Environment (in Chinese) .....	328
Researches on Software Pattern Reuse Techniques (in Chinese, English Summary) .....	338
Researches on Graphical Design Method of Concurrent Software (in Chinese, English Summary) .....	344
 <b>Part VII Software Architecture</b> .....	351
Expansion and Application of CHAM .....	353
Applications of Software Architecture in Shipborne Command and Control System (in Chinese) .....	362
Model Checking Distributed Control Systems Based on Software Architecture (in Chinese, English Summary) .....	367
Architecture for Extensible and Configurable Event Notification Services (in Chinese, English Summary) .....	381

---

TFSP: A Formalized Description Tool of Distributed Real-Time System (in Chinese, English Summary) .....	395
A Method to Generate Real-Time System Test Cases Based on ADL Specifications (in Chinese, English Summary) .....	402
<b>Academic Contribution of Wang Zhenyu (in Chinese) .....</b>	<b>409</b>
<b>List of Published Works of Wang Zhenyu (in Chinese) .....</b>	<b>412</b>
<b>Postscript, by Xu Baowen (in Chinese) .....</b>	<b>420</b>

# 第 1 部分

## 理论数学(函数论)



## 全纯函数的某些性质\*

在本文中,我们将主要研究  $\wp_p$  族的某些性质。我们说单位圆内之全纯函数  $\in \wp_p$ ,那是要对于任何的  $r, 0 < r < 1$ , 成立着

$$\wp_p(f, r) = \frac{1}{\pi r^2} \iint_{|z| < r} |f(z)|^p dx dy \leq 1$$

此处  $p$  为一正数。我们还把诸结果推广到非圆域的情况。

1. 以下给出  $\wp_p$  族函数的几点简单性质。

a. 若  $f(z) \in \wp_p$ , 它在原点之 Taylor 展式为  $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n, p \geq 1$ , 则有

$$|a_n| \leq \sqrt[p]{\frac{np+2}{2}}, \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

又,此估计是精确的,对于固定的  $n$  及  $p$ , 等式由函数

$$f_{p,n}(z) = \sqrt[p]{\frac{np+2}{2}} \cdot e^{ia} \cdot z^n$$

$a$  为实数达到。

这由关于解析函数系数的 Cauchy 公式及 Minkowski 不等式,可立即得出:

设  $f(z)$  为单位圆内之全纯函数,  $p$  为一正数, 又

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |f(re^{i\theta})|^p d\theta \leq 1, \quad 0 < r < 1$$

则称  $f(z) \in H_p$ , 这时有

b.  $H_1 \subset \wp_2$ 。

这是因为任何长度不超过  $2\pi$  的可求长曲线所范围的区域的面积不超过  $\pi$ 。

c. 若  $f(z) \in \wp_1$ , 则对于任意的非负整数  $p$ , 成立着

$$\frac{1}{\pi r^2} \iint_{|z| < r} |f(z)|^{2p} dx dy \leq 1$$

当  $r < \left(\frac{2}{3}\right)^p$  时。

证  $p=0$  时显然成立。今证  $p=1$  时成立。

设  $f(z)$  在原点之 Taylor 展式为  $\sum_{k=0}^{\infty} a_k z^k$ , 则成立着

$$\frac{1}{\pi r^2} \iint_{|z| < r} |f(z)|^2 dx dy = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{|a_k|^2}{k+1} \cdot r^{2k} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{|a_k|^2}{(k+1)(k+2)^2} \cdot r^{2k} \cdot (k+2)^2$$

---

\* 本文摘要第一次发表于 1957 年 1 月的内部论文集《中国科学院武汉数学研究室函数论研究报告》第 1 期, 93~97, 全文发表于《数学进展》, 1957(3): 612~922。《中国科学院武汉数学研究室函数论研究报告》, 1, 1958 年由科学出版社正式出版。

但我们可以肯定  $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{|a_k|^2}{(k+1)(k+2)^2} \leq \frac{1}{4}$ 。事实上, 因  $f(z) \in \rho_1$ , 则容易证明  $\frac{2}{z^2} \int_0^z t f(t) dt = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{2}{k+2} a_k z^k \in H_1$ , 设  $\frac{2}{k+2} a_k = c_k$ , 则因  $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{|c_k|^2}{k+1} \leq 1$ ,<sup>[1]</sup> 故

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{4|a_k|^2}{(k+1)(k+2)^2} \leq 1$$

此即我们需要的。因此,

$$\frac{1}{\pi r^2} \iint_{|z|<r} |f(z)|^2 d\sigma \leq \frac{1}{4} \max_{k \geq 0} r^{2k} \cdot (k+2)^2$$

为使上式  $\leq 1$ , 只需  $\max_{k \geq 0} r^{2k} (k+2)^2 \leq 4$ , 即对任意的  $k$  要求  $r^{2k} \cdot (k+2)^2 \leq 4$ , 故需  $r \leq \min_{k \geq 0} \sqrt{\frac{2}{k+2}} = \frac{2}{3}$ 。用归纳法, 即得。

2. 本节中将给出  $\rho_p$  族函数的模及各级微商的模的一些估计式, 但我们放宽条件, 即只要求

$$\iint_{|z|<1} |f(z)|^p dx dy < \infty$$

注意以下两点事实。

a. 若  $f(z)$  为单位圆内之解析函数, 且  $|f(z)| \leq \frac{K}{(1-r^2)^\alpha}$ ,  $|z|=r$ , 此处  $\alpha$  为一非负实数, 则

$$|f^{(n)}(z)| \leq \frac{K_n}{(1-r^2)^{\alpha+n}}, \quad |z|=r, \quad n=1, 2, \dots$$

$K_n$  只与  $n$  及  $K$  有关。

由 Poisson 公式及 Cauchy 积分公式立即可得。

b. 设有闭曲线  $\Gamma$ , 它在点  $z_0$  的左右切线存在, 且夹角(内向的)不为零, 则可定义区域  $\Delta_\epsilon(z_0)$  如下: 若  $\epsilon$  为适当小的正数, 自  $z_0$  向区域的内部作两条半射线, 使它们与左、右切线的夹角为  $\epsilon$ , 则由此二直线所夹的区域内的部分而又与  $z_0$  适当接近之部分称为  $\Delta_\epsilon(z_0)$ , 如图 1 所示。

我们证明如下的引。

引 设  $f(z)$  为单位圆内之解析函数, 且

$$|f(z)| \leq \frac{K}{(1-r^2)^\alpha}$$

则必有

$$|f(z)| \leq \frac{K'}{|e^{i\theta} - z|^\alpha}$$

此处  $z \in \Delta_\epsilon(e^{i\theta})$ ,  $e^{i\theta}$  为单位圆周上任何点,  $\epsilon$  为固定正数,  $K' = K'(K, \epsilon)$ 。

设  $z = re^{i\varphi}$ , 今用图 2 来表示。设  $A$  为  $re^{i\varphi}$ ,  $D$  为  $e^{i\varphi}$ ,  $B$  为  $e^{i\theta}$ ,  $E\hat{B}O = \frac{\pi}{2} - \epsilon$ ,  $DC$  为  $|z|=1$  在  $D$  之切线,  $C$  为  $DC$  与  $AB$  之交点, 故

$$|re^{i\varphi} - e^{i\theta}| = AB \leq AC = AD / \cos D\hat{A}C = (1-r) / \cos D\hat{A}C$$

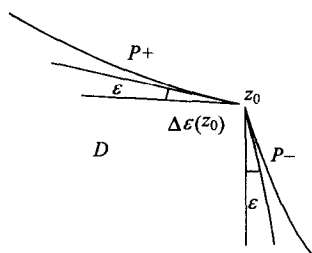


图 1

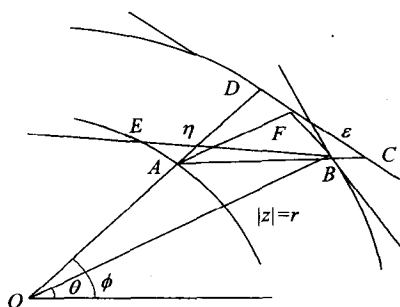


图 2

作  $AF \parallel OB$ , 则  $D\hat{A}C = \eta + F\hat{A}B \leq \eta + F\hat{C}B = \eta + E\hat{B}O = \eta + \left(\frac{\pi}{2} - \epsilon\right)$ , 但当  $r \rightarrow 1$  时,  $\eta \rightarrow 0$ , 因此存在数  $M$ ,  $M$  与  $\theta$  及  $r$  无关, 使得

$$|z - e^{i\theta}| \leq \frac{(1-r)M}{\cos\left(\frac{\pi}{2} - \epsilon\right)} = \frac{(1-r)M}{\sin\epsilon}$$

另一方面, 又成立着  $(1-r) \leq |z - e^{i\theta}|$ , 因此不管  $\alpha$  为正还是为负, 都有

$$|f(z)| \leq \frac{K}{|z - e^{i\theta}|^\alpha} \cdot \frac{M'}{(\sin\epsilon)^\alpha} = \frac{K'}{|z - e^{i\theta}|^\alpha}$$

设  $f(z)$  为单位圆内之全纯函数, 又

$$\iint_{|z| < 1} |f(z)|^p dx dy = M < \infty$$

$p$  为一正数。但因  $|f(z)|^p$  为一次调和函数, 故对任一  $z$ ,  $|z| = r < 1$ , 可作一以  $z$  为中心, 以  $(1-r)$  为半径的圆  $c(z)$ , 使得

$$|f(z)|^p \leq \frac{1}{\pi(1-r)^2} \iint_{c(z)} |f(z)|^p dx dy \leq \frac{1}{\pi(1-r)^2} \iint_{|z| < 1} |f(z)|^p dx dy$$

因此, 得到

$$|f(z)| \leq \frac{K}{(1-r)^{\frac{2}{p}}}$$

此处  $K = \sqrt[p]{M/\pi}$ 。

由上面的讨论可得:

**定理 1** 若  $f(z)$  为单位圆内之全纯函数, 且

$$\iint_{|z| < 1} |f(z)|^p dx dy = M < \infty, \quad p > 0$$

则有

$$|f^{(n)}(z)| \leq \frac{K_n}{|e^{i\theta} - z|^{\frac{2}{p} + n}}, \quad n = 0, 1, 2, \dots, |z| = r, \text{ 当 } r > r_0 \text{ 时}$$

$\theta \in [0, 2\pi], z \in \Delta_\epsilon(e^{i\theta}), \epsilon > 0, K_n = M \cdot 2^{\frac{n(n-1)}{2} + n \cdot \frac{2}{p}} \cdot A \cdot (\sin\epsilon)^{-n - \frac{2}{p}}$ , 而  $A$  只与  $r_0$  有关。

3. 这里, 我们将上面的结果推广到较一般的区域。

设  $D$  为由闭逐段光滑曲线  $\Gamma$  所范围的内部,  $f(z)$  在  $D$  内全纯, 且

$$\iint_D |f(z)|^p dx dy < \infty, \quad p > 0$$

下面分别来考虑。设  $\Gamma$  在  $z_0$  光滑, 则可通过  $z_0$  作一与  $p$  相切之圆  $c(z_0)$ , 它完全含在  $D$  内, 这时当然也有  $\iint_{c(z_0)} |f(z)|^p dx dy < \infty$ , 但是由  $\Delta_\epsilon(z_0)$  的定义, 对于适当的与  $z_0$  接近的  $z$ ,  $\Delta_\epsilon(z_0)$  对于  $\Gamma$  及  $c(z_0)$  是完全相同的, 因此, 由定理 1,

$$|f^{(n)}(z)| \leq \frac{K_n}{|z - z_0|^{n + \frac{2}{p}}}, \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

$z \in \Delta_\epsilon(z_0), \epsilon > 0$ .

如果  $\Gamma$  在  $z_0$  之左右切线之内向夹角大于  $\pi$ , 则可以用通过  $z_0$  的几个圆  $c_1(z_0), c_2(z_0), \dots, c_m(z_0)$  (这中间的每个圆都属于  $D$ , 且有两个分别与  $\Gamma$  在  $z_0$  之左右切线相切, 它们是互相衔接的, 而且  $m=3$  已足) 来进行上面的讨论, 即可证明对于这样的  $z_0$ , 上面的不等式仍然成立。

以下讨论内向夹角小于  $\pi$  的情况, 我们从简单的情况做起。

设  $f(z)$  在  $0 < \arg z < \alpha, |z| < 1$  内解析, 此区域记为  $D_{\alpha, 0 < \alpha < \pi}$ , 又有

$$\iint_{D_\alpha} |f(z)|^p dx dy < \infty$$

以  $z = z(w) = w^{\frac{\alpha}{\pi}}$  将  $D': 0 < \arg w < \pi, |w| < 1$  映射为  $D_\alpha$ , 则

$$\begin{aligned} \infty &> \iint_{D_\alpha} |f(z)|^p dx dy = \iint_{D'} |f[z(w)]|^p \cdot \left(\frac{a}{\pi}\right)^2 \frac{1}{|w|^{2(1-\frac{a}{\pi})}} du dv \\ &= \left(\frac{a}{\pi}\right)^2 \iint_{D'} \left| f[z(w)] \cdot \frac{1}{w^{\frac{2}{p}(1-\frac{a}{\pi})}} \right|^p du dv, \quad w = u + iv \end{aligned}$$

因为  $D'$  的边界在 origin 是光滑的, 因此, 在此点可用上面的讨论。

于是,

$$|F(w)| = \left| \frac{f[z(w)]}{w^{\frac{2}{p}(1-\frac{a}{\pi})}} \right| \leq \frac{K}{|w|^{\frac{2}{p}}}, \quad F(w) = \frac{f[z(w)]}{w^{\frac{2}{p}(1-\frac{a}{\pi})}}$$

当  $w \in \Delta_\epsilon(0)$  时,

$$|f(z)| = |f[z(w)]| \leq \frac{K}{|w|^{\frac{2}{p} \cdot \frac{a}{\pi}}} = \frac{K}{|z|^{\frac{2}{p}}}$$

当  $z \in \Delta_\epsilon(0)$  时, 又由上面的讨论:

$$|F'(w)| = \left| w^{-\frac{2}{p}(1-\frac{a}{\pi})} f'[z(w)] \cdot \frac{a}{\pi} w^{\frac{a}{\pi}-1} - \frac{2}{p} \left(1 - \frac{a}{\pi}\right) f[z(w)] w^{-\frac{2}{p}(1-\frac{a}{\pi})-1} \right| \leq \frac{K_1}{|w|^{\frac{2}{p}+1}}$$

因此, 计及已得的关于  $f(z)$  的估计, 得

$$|f'[z(w)]| \leq \frac{K_1}{|w|^{\frac{2}{p}+1-\frac{2}{p}(1-\frac{a}{\pi})+\frac{a}{\pi}-1}} + \frac{K}{|w|^{\frac{2}{p} \cdot \frac{a}{\pi} + \frac{2}{p}(1-\frac{a}{\pi})+1-\frac{2}{p}(1-\frac{a}{\pi})+\frac{a}{\pi}+1}} = \frac{K'_1}{|w|^{\frac{a}{\pi}(1+\frac{2}{p})}}$$

当  $w \in \Delta_\epsilon(0)$  时, 有

$$|f'(z)| \leq \frac{K'_1}{|z|^{\frac{2}{p}+1}}$$

当  $z \in \Delta_\epsilon(0)$  时, 继续进行演算, 便可得到

$$|f^{(n)}(z)| \leq \frac{K'_n}{|z|^{\frac{2}{p}+n}}, \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

$z \in \Delta_\epsilon(0)$ , 经过平移, 旋转及适当处理, 即可得:



**定理 2** 设  $\Gamma$  为一闭逐段光滑曲线, 且其每个角点之内向顶角都大于零,  $D$  为其内域,  $f(z)$  为  $D$  内之全纯函数, 又

$$\iint_D |f(z)|^p dx dy < \infty, \quad p > 0$$

则对于  $\Gamma$  上任一点  $z_0$ , 成立着

$$|f^{(n)}(z)| \leq \frac{K_n}{|z - z_0|^{n + \frac{2}{p}}}, \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

但  $z \in \Delta_\epsilon(e^{i\theta})$ ,  $\epsilon$  为一固定正数,  $K_n = K(n, \epsilon, f(z))$  与  $z_0$  及  $z$  无关。

对于可求长简单连续曲线, 只须改之以“ $z_0$  始遍于  $\Gamma$  上”, 这时  $K_n$  与  $z_0$  有关, 而与  $z$  无关。

可将 Seidel 及 Walsh 的结果推广到这里<sup>[2]</sup>。

4. 本节讨论 Tsuji 的结果<sup>[3]</sup>。我们先证明下述的引。

**引** 若  $f(z)$  为单位圆内之全纯函数, 且在  $|z|=1$  上存在一个测度为零的集  $E$ , 使得当  $e^{i\theta} \in E$  时

$$|f(z)| \leq \frac{K_\theta}{|e^{i\theta} - z|^\alpha}, \quad \alpha > 0$$

此处  $z \in \Delta_\epsilon(e^{i\theta})$ ,  $\epsilon > 0$ ,  $K_\theta = K(\theta, \epsilon)$ , 则对于任意的  $\delta > 0$ , 必有

$$|f^{(n)}(z)| \leq \frac{K_n}{|e^{i\theta} - z|^{a+n}}, \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

当  $z \in \Delta_{\epsilon+\delta}(e^{i\theta})$  时,  $e^{i\theta} \in E$ ,  $K_n = K(n, \theta, \epsilon, \delta)$  与  $z$  无关。

事实上, 在  $\Delta_\epsilon(e^{i\theta})$  中任取一点  $z$ ,  $ze^{i\theta}$  与  $\Delta_\epsilon(e^{i\theta})$  之两边所夹之较小的角记为  $\delta$ , 则  $\delta > 0$ , 自  $z$  向  $\Delta_\epsilon(e^{i\theta})$  的这一夹边作垂线, 设此长度为  $c$ , 则  $|z - e^{i\theta}| = c/\sin\delta$ , 如图 3 所示。

以  $z$  为中心, 以  $c$  为半径的圆设为  $c(z)$ , 则 Cauchy 积分公式,

$$\begin{aligned} |f'(z)| &\leq \left| \frac{2!}{2\pi i} \right| \cdot \int_{c(z)} \frac{|f(s)|}{|z-s|^2} |ds| \leq \frac{1}{\pi} \cdot \frac{1}{c^2} \cdot c \cdot \frac{K_\theta}{(|z - e^{i\theta}| - c)^a} \cdot 2\pi \\ &= \frac{2}{|z - e^{i\theta}| \cdot \sin\delta} \cdot \frac{K_\theta}{|z - e^{i\theta}|^a (1 - \sin\delta)^a} \\ &= \frac{2 \cdot K_\theta}{\sin\delta (1 - \sin\delta)^a |z - e^{i\theta}|^{a+1}} = \frac{K_{\theta, \delta}}{|z - e^{i\theta}|^{a+1}} \end{aligned}$$

注意  $\delta$  之任意性, 更将如上之讨论用之于高级微商, 则得此引。

由 Tsuji 的结果<sup>[3]</sup> 立刻可得如下推论。

**推论** 设  $f(z)$  为单位圆内的全纯函数, 且满足

$$\iint_{|z|<1} |f(z)|^p dx dy < \infty, \quad p > 0$$

则在  $|z|=1$  上存在一个测度为零的集  $E$ , 使得若  $e^{i\theta} \in E$  时, 成立着

a. 若  $p$  为一正整数, 则存在着  $K_{n, \theta}$  使得

$$|f^{(n)}(z)| \leq \frac{K_{n, \theta}}{|z - e^{i\theta}|^{n + \frac{1}{p}}}, \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

b. 若  $p$  不为一正整数, 则对任意的  $\eta > 0$ , 存在着  $K_{\theta, \delta}^n$ , 使得

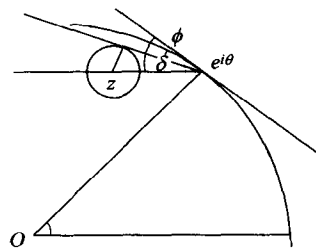


图 3