同步追踪丛书

最新修订

数学同步追踪

高中一年级第二学期

（试验本）

上海市十余所名牌中学特级、高级教师联合推出

主编/杨德胜　虞　涛

编者/朱伟卫　杨晓红　贺亚丽　翟立安

华东理工大学出版社
EAST CHINA UNIVERSITY OF SCIENCE AND TECHNOLOGY PRESS

内 容 提 要

最新修订的《数学同步追踪　高中一年级第二学期(试验本)》将新教材高一数学课本下册中的内容按教材章节分 21 讲，每讲以问题为中心，以“问题思考”、“问题解析”、“问题精选”、“训练问题”为模式，激发学生的学习兴趣。各章后均新增“专题讨论”、“实践探究”、“研究性学习”、“人文选读”等内容，启迪学生的思维，培养学生的创新能力，追踪学生学习的全过程。本书是高一师生必备的最新教学参考书。

《同步追踪丛书》编委会

修 订 前 言

《同步追踪丛书》自 2004 年 7 月出版以来，得到广大师生的厚爱. 不到一年，重印两次，有不少专家、教师都提出了宝贵的意见，近百名同学（人次）发来电子邮件探讨问题. 为此，我们进行了认真的研讨，现对第一版作了如下修改.

1. 在“问题思考”和“问题解析”中，注重在紧扣新教材的基础上，深刻挖掘数学概念的内涵、定理的本质和公式的条件，阐述数学思想方法，分析知识学习中应注意的问题.

2. 在“问题精选”和“训练问题”中，删掉部分难、偏和超纲的例题与习题，做到精讲精练，减轻学生学习负担.

愿我们这套《同步追踪丛书》：
给你打开一扇窗户，让你领略数学的博大精深；
开启你好奇的心灵，点燃你胸中的求知欲望；
激发你睿智的头脑，帮助你培养理性的思维；
给你实践的良机，增添你感受成功的喜悦；
给你数学的精神食粮，陶冶你美好的文化素养；
给你一双数学家的眼睛，丰富你观察世界的方式；
给你一套探究的模式，成为你终身探索世界的本领.

作者
2006 年 1 月

前　言 QIANYAN

2002 年 8 月，上海市教育委员会颁布了《上海市中小学数学课程标准》，在充分总结一期课改的基础上，进一步吸收、借鉴了国内外课改经验，并在今年秋季，上海市全面推广使用在《上海市中小学数学课程标准》指导下的新教材.《上海市中小学数学课程标准》指出高中阶段的培养目标是"具有良好的学习态度、学习习惯和学习方法；具有自学能力和最基本的实践能力；具有问题意识和创新能力……"这与以前的提法是不同的. 新课程的要求与多年来笔者倡导的以"问题是数学的心脏"为座右铭，在教学中逐步形成"以培养学生主体意识和主动参与为起点，以培养学生能力为主线，以解决问题为中心，以学会创造为目标，以素质＋特长为模式"的教学风格是不谋而合的.

为此，我们以问题为中心，以《上海市中小学数学课程标准》为准绳，以"问题思考"、"问题解析"、"问题精选"、"训练问题"为模式，与新教材试验本各章节同步，编写了这套《同步追踪丛书》，供高中各年级使用.

该丛书由上海市十余所名牌中学特级、高级教师联合推出. 上海交通大学附属中学特级教师杨德胜、建平中学高级教师虞涛任主编. 七宝中学特级教师卜照泽，延安中学高级教师吕志勇，建平中学高级教师田万国、杨建华、张永华，晋元高级中学高级教师任升录，大同中学高极教师杨岚清，复旦大学附属中学奥数高级教练万军，松江二中高级教师朱伟卫，进才中学高级教师曹喜平，上海交通大学附属中学高级教师曹建华，三林中学高级教师蒲红军，建平世纪中学高级教师杨晓红，周浦高级中学特级教师王辉，上海师范大学附属中学特级教师贺亚丽，控江中学高级教师曾国光，尚德实验学校高级教师翟立安等参与了具体的编写. 在编写过程中得到华东理工大学出版社的支持和指导，在此表示衷心的感谢.

欢迎使用本书的读者提出宝贵的意见，使本书更具有科学性、实用性、指导性. 希望她能跟踪你的学习，成为你的良师益友.

（联系请发 E-mail：yangdesheng1957@sina.com）

作者

2004 年 12 月

目　录 CONTENTS

第五章

三角比

第1讲　任意角及其度量

问题思考

1. 角的概念为什么要进行推广，如何推广？

2. 怎样理解象限角、轴线角？如何表示终边重合的角？

3. 什么叫做1弧度的角？什么叫做弧度制？怎样计算一个角的弧度数？怎样进行弧度制与角度制的换算？

4. 引入弧度制的合理性何在？

问题解析

1. 角的概念可以有两种定义：一是静态定义，角是由一个端点引出的两条射线所组成的图形；二是动态定义，角可以看作是由一条射线绕着其端点从初始位置（始边）旋转到终止位置（终边）所形成的图形．动态定义可以看成是静态定义的第一次推广．

以前学的角，其大小都在$0°$到$360°$之间，现实生活中仅有这些角还不够，这主要体现在两个方面，一是角的大小超过$360°$；二是得到的角的旋转方向有两种不同的方向和不旋转的情形．因此必须对角的概念进行推广．

推广以后的角包括正角、负角和零角．规定：正角是射线绕端点按逆时针方向旋转所形成的角；负角是射线绕端点按顺时针方向旋转所形成的角；零角是射线没有旋转形成的角．

2. 在直角坐标系中，把角的顶点与坐标原点重合，角的始边与x轴的正半轴重合，此时角的终边在第几象限，就说这个角是第几象限的角，或者说这个角属于第几象限．

当角的终边在坐标轴上时，就认为这些角不属于任何象限．这些角称为轴线角，它是象限角的分界角．

所有与角α终边重合的角（包括角α本身）的集合可表示为

$$\{\beta \mid \beta = k \cdot 360° + \alpha, k \in \mathbf{Z}\}.$$

3. 把弧长等于半径的弧所对的圆心角叫做1弧度的角．用“弧度”作单位来度量角的制度叫做弧度制．角α的弧度数$|\alpha| = \dfrac{l}{r}$．α的正负由角α的终边旋转方向决定，零角的弧度

数为0. 弧度制与角度制的互化(换算)关系为

$$1^\circ=\frac{\pi}{180}\text{弧度}\approx 0.017453\text{ 弧度},1\text{ 弧度}=\left(\frac{180^\circ}{\pi}\right)\approx 57.295780^\circ.$$

4. 最早提出弧度制思想的人是伟大的瑞士数学家欧拉(L. Euler). 引进弧度制的合理性体现在两个方面:一是对于不同半径的圆,长度等于半径的弧所对应的圆心角总是一个定值,即一定大小的圆心角 α,它所对应的弧长和半径的比值是一个定值,所以这样规定1弧度的角是合理的;另一方面,把半径1作为弧的度量单位,将线段与弧的度量统一起来,大大简化了三角公式及计算. 如弧长公式 $l=|\alpha|r$,扇形的面积公式 $S=\frac{1}{2}lr=\frac{1}{2}|\alpha|r^2$ 等公式得到了简化.

○ 问题精选

精选问题1

(1) 求角30°的终边逆时针旋转90°后所得角的大小及角30°的终边顺时针旋转60°后所得角的大小;

(2) 求角 α 的终边逆时针旋转90°,逆时针旋转180°,及顺时针旋转90°,顺时针旋转270°后所得角的大小.

【思路剖析】抓住"任意角"的概念便迎刃而解.

【问题解答】(1) 根据任意角的定义,角30°是一条射线绕其端点逆时针旋转30°所形成的,再把它的终边逆时针旋转90°,相当于把该射线绕其端点逆时针旋转了(30°+90°),所以所求的角的大小是120°.

同理,角30°的终边顺时针方向旋转60°所得的角的大小是30°−60°=−30°.

(2) 同理,角 α 的终边逆时针旋转90°后所得的角的大小是 $\alpha+90^\circ$;角 α 的终边逆时针旋转180°后所得的角的大小是 $\alpha+180^\circ$;角 α 的终边顺时针旋转90°后所得的角的大小是 $\alpha-90^\circ$;角 α 的终边顺时针旋转270°后所得的角的大小是 $\alpha-270^\circ$.

【问题反思】本题强调了"在理解数学概念时,要重视概念的形成过程,掌握好其内涵和外延".

精选问题2

已知 $\alpha=1690^\circ$.

(1) 把 α 写成 $2k\pi+\beta\ (k\in\mathbf{Z},\beta\in[0,2\pi))$ 的形式;

(2) 求 θ,使 θ 与 α 终边重合,且 $\theta\in(-4\pi,-2\pi)$.

【思路剖析】本质是求在 $[0,2\pi)$ 和 $(-4\pi,-2\pi)$ 上找出与 α 终边重合的角. 注意统一单位.

【问题解答】(1) $\alpha=\frac{169}{18}\pi=8\pi+\frac{25}{18}\pi\left(\text{其中 }k=4,\beta=\frac{25}{18}\pi\right)$.

(2) 设 $\theta=2k\pi+\frac{25}{18}\pi,k\in\mathbf{Z}$. 则 $-4\pi<2k\pi+\frac{25}{18}\pi<-2\pi$,这个不等式的整数解为 $k=-2$.

故 $\theta=-4\pi+\frac{25}{18}\pi=-\frac{47}{18}\pi$.

【问题反思】根据要求写出与某角终边重合的角是一项重要的基本功. 这时经常会碰到两种最特殊的情形，一是写出与某角终边重合的最小正角，另一个是写出与某角终边重合的绝对值最小的角. 这两个角的范围分别是$[0,2\pi)$和$(-\pi,\pi]$. 另外还应注意，在同一个表达式或同一个问题中，不要将角的两种量角制——角度制和弧度制混用.

精选问题 3

写出终边在坐标轴上的角的集合.

【问题剖析】终边在坐标轴上的角在$[0,2\pi)$内的有 $0,\frac{\pi}{2},\pi,\frac{3}{2}\pi$. 再按终边重合的角的规律去写，注意结果的简洁性.

【问题解答】终边在 x 轴正半轴上角的集合为 $A_1=\{\alpha|\alpha=2k\pi,k\in\mathbf{Z}\}$，终边在 x 轴负半轴上角的集合为 $A_2=\{\alpha|\alpha=2k\pi+\pi,k\in\mathbf{Z}\}$. 故终边在 x 轴上的角的集合为

$A_1\cup A_2=\{\alpha|\alpha=2k\pi,k\in\mathbf{Z}\}\cup\{\alpha|\alpha=(2k+1)\pi,k\in\mathbf{Z}\}=\{\alpha|\alpha=k\pi,k\in\mathbf{Z}\}$.

终边在 y 轴上的角的集合为

$$\left\{\alpha\middle|\alpha=2k\pi+\frac{\pi}{2},k\in\mathbf{Z}\right\}\cup\left\{\alpha\middle|\alpha=2k\pi+\frac{3\pi}{2},k\in\mathbf{Z}\right\}$$
$$=\left\{\alpha\middle|\alpha=2k\pi+\frac{\pi}{2},k\in\mathbf{Z}\right\}\cup\left\{\alpha\middle|\alpha=(2k+1)\pi+\frac{\pi}{2},k\in\mathbf{Z}\right\}$$
$$=\left\{\alpha\middle|\alpha=k\pi+\frac{\pi}{2},k\in\mathbf{Z}\right\}.$$

所以终边在坐标轴上的角的集合为

$$\{\alpha|\alpha=k\pi,k\in\mathbf{Z}\}\cup\left\{\alpha\middle|\alpha=k\pi+\frac{\pi}{2},k\in\mathbf{Z}\right\}$$
$$=\left\{\alpha\middle|\alpha=2k\cdot\frac{\pi}{2},k\in\mathbf{Z}\right\}\cup\left\{\alpha\middle|\alpha=(2k+1)\frac{\pi}{2},k\in\mathbf{Z}\right\}$$
$$=\left\{\alpha\middle|\alpha=\frac{k}{2}\pi,k\in\mathbf{Z}\right\}.$$

【问题反思】本例体现了从特殊到一般、分类讨论的思想，其中根据整数的分类对结果进行化简体现了数学的简洁美.

精选问题 4

一个扇形的周长为定值 l，问当它的圆心角 θ 取何值时，此扇形的面积最大？最大值是多少？

【思路剖析】求最值关键在于确定目标函数及其定义域.

【问题解答】设扇形的半径为 r，则弧长为 $l-2r\ \left(0<r<\frac{l}{2}\right)$.

扇形面积 $S=\frac{1}{2}(l-2r)r=-\left(r-\frac{l}{4}\right)^2+\frac{1}{16}l^2$.

所以当 $r=\frac{l}{4}$时，$S_{\max}=\frac{1}{16}l^2$，此时 $\theta=\frac{l-2r}{r}=\frac{l-\frac{l}{2}}{\frac{l}{4}}=2$(弧度).

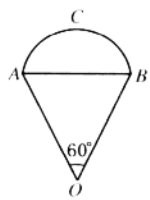
即当 $\theta=2$ 弧度时，扇形的面积最大，最大值是$\frac{1}{16}l^2$.

【问题反思】本问题体现了函数的思想方法. 解题时没有直接选用 θ 作为自变量,而是选择半径 r 作为自变量,使建立的函数关系较为简单.

〇 训练问题

一、填空题

1. 在与 1056° 角终边重合的角中,最小的正角是________,最大的负角是________.
2. 在与 1394° 角终边重合的角中,绝对值最小的角是________.
3. 在 -360° 到 720° 之间与 -1050° 终边重合的角是________.
4. 若 α 是第二象限角,则 $-\alpha$ 是第________象限角.
5. 扇形的半径为 R,周长为 $3R$,则该扇形的圆心角的大小为________弧度.
6. 已知正多边形的一个外角是 $\frac{\pi}{4}$ 弧度,则它的边数是________.
7. 设角 α 的终边与 $\frac{2}{3}\pi$ 的终边关于 y 轴对称,且 $\alpha\in(-2\pi,2\pi)$,则 $\alpha=$________.
8. 如图,已知扇形 AOB 的圆心角为 60°,弦长 $AB=m$,则弓形 ABC 的面积是________.



(第 8 题)

二、选择题

9. 已知集合 $A=\{$第一象限角$\}$,集合 $B=\{$锐角$\}$,$C=\{$小于 90° 的角$\}$. 给出下列四个命题:①$A=B=C$;②$A\subsetneqq C$;③$C\subsetneqq A$;④$A\cap C=B$. 其中正确命题的个数为(　　).

   A. 0　　B. 1　　C. 2　　D. 3

10. 在直角坐标系中,若 α 与 β 的终边互相垂直,则 α 与 β 的关系为(　　).

    A. $\beta=\alpha+90^\circ$
    B. $\beta=\alpha\pm90^\circ$
    C. $\beta=\alpha+90^\circ+k\cdot360^\circ(k\in\mathbf{Z})$
    D. $\beta=\alpha\pm90^\circ+k\cdot360^\circ(k\in\mathbf{Z})$

11. 设集合 $A=\left\{x\mid x=n\pi+(-1)^n\frac{\pi}{2},n\in\mathbf{Z}\right\}$,$B=\left\{x\mid x=kx+\frac{\pi}{2},k\in\mathbf{Z}\right\}$. 则集合 A,B 满足的关系是(　　).

    A. $A\supsetneqq B$　　B. $A\subsetneqq B$　　C. $A=B$　　D. 无法确定

12. 下列命题中正确的是(　　).

    A. 1 弧度的角就是长为半径的弦所对的圆心角
    B. 5 弧度的角是第三象限的角
    C. 若 α 是第一象限的角,则 $\frac{\alpha}{2}$ 也是第一象限的角
    D. 若 α 是第一象限的角,则 $\frac{\pi}{2}-\alpha$ 也是第一象限的角

三、解答题

13. 若 α 是第三象限的角，讨论$\frac{\alpha}{3}$、$\frac{\alpha}{2}$和 2α 分别是第几象限角？

14. 根据下列条件，写出角 α 与角 β 的一个关系式.

(1) 角 α 与角 β 的终边关于 x 轴对称；

(2) 角 α 与角 β 的终边关于 y 轴对称；

(3) 角 α 与角 β 的终边关于原点对称.

15. 一个半径为 r 的扇形，若它的周长等于弧所在的半圆的长，那么扇形的圆心角是多少弧度？扇形的面积是多少？

16. 在直角坐标系中，圆心在原点的圆与 x 轴正半轴交于点 A. 一质点 M 从点 A 开始沿该圆依逆时针方向作匀速圆周运动. 已知该质点 1min 转过的角为 $\theta(0<\theta\leqslant\pi)$，2min 到达第三象限，14min 到达点 A. 求 θ.

第2讲 任意角的三角比

问题思考

1. 怎样定义任意角 α 的六个三角比？各种三角比中角 α 的取值范围是什么？
2. 终边相同的角的同名三角比有什么关系？
3. 各三角比在不同象限的符号是怎样的？
4. 怎样用单位圆中有向线段表示三角比？

问题解析

1. 在任意角 α 的终边上任取一点 P，设 P 的坐标为 (x,y)，$OP=r(r>0)$，则 $r=\sqrt{x^2+y^2}$. 定义角 α 的正弦、余弦、正切、余切、正割和余割分别是：

$$\sin\alpha=\frac{y}{r},\ \cos\alpha=\frac{x}{r},\ \tan\alpha=\frac{y}{x},\ \cot\alpha=\frac{x}{y},\ \sec\alpha=\frac{r}{x},\ \csc\alpha=\frac{r}{y}.$$

其中 α 的取值范围分别是

$$\mathbf{R}、\mathbf{R}、\alpha\neq k\pi+\frac{\pi}{2}(k\in\mathbf{Z})、\alpha\neq k\pi(k\in\mathbf{Z})、\alpha\neq k\pi+\frac{\pi}{2}(k\in\mathbf{Z})、\alpha\neq k\pi(k\in\mathbf{Z}).$$

任意角的三角比的定义可以看作是锐角三角比定义的推广，锐角的三角比是任意角的三角比的特例.

2. 终边相同的角的同名三角比的值相等，即(只给四个)：

$\sin(2k\pi+\alpha)=\sin\alpha$，$\cos(2k\pi+\alpha)=\cos\alpha$，$\tan(2k\pi+\alpha)=\tan\alpha$，$\cot(2k\pi+\alpha)=\cot\alpha$，其中 $k\in\mathbf{Z}$.

这组公式的作用在于将任意角的三角比化为 $[0,2\pi)$ 内的角的三角比.

另外还要注意，两个角的某种三角比的值相等，并不意味着这两个角的终边相同，也不意味着这两个角相等.

3. 熟记符号规律："一正二正弦，三切四余弦." 同角的正弦与余割、余弦与正割、正切与余切的三角比的符号相同，它们都是根据任意角的三角比的定义推导出来的，体现了公理化思想的运用. 各三角比在每个象限的符号如图 2－1 所示.

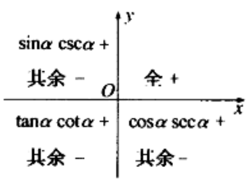


图 2－1

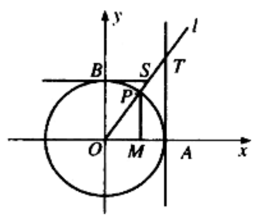


图 2－2

4. 用单位圆中的有向线段表示每个象限的角的三角比如图 2－2 所示，其中有向线段 MP、OM、AT、BS 分别叫做角 α 的正弦线、余弦线、正切线、余切线.

问题精选

精选问题 1

求$\frac{5\pi}{4}$的六个三角比的值.

【思路剖析】根据任意角三角比的定义去求.

【问题解答】在直角坐标系中作$\angle AOB=\frac{5\pi}{4}$(图 2－3). 在终边 OB 上取一点 P，使 OP 的长为 1. 过点 P 作 $PQ\perp Ox$，垂足为点 Q. 则在$\mathrm{Rt}\triangle OPQ$中，由 $OP=1$，$\angle POQ=\frac{\pi}{4}$，得 $OQ=PQ=\frac{\sqrt{2}}{2}$. 由于点 P 在第三象限，所以其坐标为$\left(-\frac{\sqrt{2}}{2},-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$. 所以$\frac{5\pi}{4}$的六个三角比的值分别为：

$$\sin\frac{5\pi}{4}=\frac{y}{r}=-\frac{\sqrt{2}}{2},\ \cos\frac{5\pi}{4}=\frac{x}{r}=-\frac{\sqrt{2}}{2},\ \tan\frac{5\pi}{4}=\frac{y}{x}=1,$$

$$\cot\frac{5\pi}{4}=\frac{x}{y}=1,\ \sec\frac{5\pi}{4}=\frac{r}{x}=-\sqrt{2},\ \csc\frac{5\pi}{4}=\frac{r}{y}=-\sqrt{2}.$$

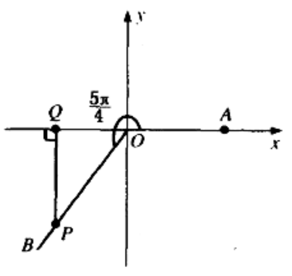


图 2－3

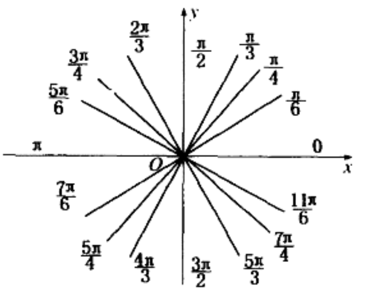


图 2－4

【问题反思】“回到定义中去”既是理解定义的好办法，又是利用定义解题的好办法，掌握特殊角的三角比的求法，有利于加深对三角比定义的掌握. 如图 2－4 所示，图中各角的三角比是要求熟练掌握并记忆.

精选问题 2

若角 α 的终边在直线 $y=-2x$ 上，求角 α 的六个三角比的值.

【思路剖析】关键在于确定角 α 终边上一个点的坐标和该点到原点的距离.

【问题解答】设角 α 终边上一点 P 的横坐标为 x，则纵坐标为 $-2x$. 即点 P 坐标为 $(x,-2x)$，$(x\neq0)$. 从而点 P 到原点的距离为

$$r=\sqrt{x^2+(-2x)^2}=\sqrt{5}|x|.$$

(1) 当 $x>0$ 时，$r=\sqrt{5}x$，角 α 是第四象限角. 所以

$$\sin\alpha=\frac{y}{r}=\frac{-2x}{\sqrt{5}x}=-\frac{2\sqrt{5}}{5},\ \cos\alpha=\frac{x}{r}=\frac{x}{\sqrt{5}x}=\frac{\sqrt{5}}{5},$$

$$\tan\alpha=\frac{-2x}{x}=-2,\ \cot\alpha=\frac{x}{-2x}=-\frac{1}{2},$$

$$\sec\alpha=\frac{r}{x}=\frac{\sqrt{5}x}{x}=\sqrt{5},\ \csc\alpha=\frac{r}{y}=\frac{\sqrt{5}x}{-2x}=-\frac{\sqrt{5}}{2}.$$

(2) 当 $x<0$ 时，$r=-\sqrt{5}x$，角 α 是第二象限角．所以

$$\sin\alpha=\frac{2\sqrt{5}}{5},\ \cos\alpha=-\frac{\sqrt{5}}{5},\ \tan\alpha=-2,\ \cot\alpha=-\frac{1}{2},\ \sec\alpha=-\sqrt{5},\ \csc\alpha=\frac{\sqrt{5}}{2}.$$

【问题反思】本题中角 α 的终边有两种可能，我们将其转化为对角 α 终边上点的横坐标的讨论，运用了分类讨论的思想方法．同时，解法还进一步加深了对三角比定义的理解．

精选问题 3

求值：

(1) $2\sin1470°+\sin420°-\cos750°-\tan(-315°)+10\sin540°$；

(2) $\cos\left(-\frac{11}{3}\pi\right)+2\sin\frac{19\pi}{3}-3\tan\frac{13}{6}\pi+\cot\frac{17}{4}\pi-3\sin\left(-\frac{11\pi}{6}\right)$.

【思路剖析】运用"终边相同的角同名三角比相等"进行转化．

【问题解答】(1) 原式 $=2\sin(4\times360°+30°)+\sin(360°+60°)-\cos(720°+30°)-\tan(-360°+45°)+10\sin(360°+180°)$

$=2\sin30°+\sin60°-\cos30°-\tan45°+10\sin180°$

$=2\times\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}-1+10\times0=0.$

(2) 原式$=\cos\left(-4\pi+\frac{\pi}{3}\right)+2\sin\left(6\pi+\frac{\pi}{3}\right)-3\tan\left(2\pi+\frac{\pi}{6}\right)+\cot\left(4\pi+\frac{\pi}{4}\right)-3\sin\left(-2\pi+\frac{\pi}{6}\right)$

$=\cos\frac{\pi}{3}+2\sin\frac{\pi}{3}-3\tan\frac{\pi}{6}+\cot\frac{\pi}{4}-3\sin\frac{\pi}{6}$

$=\frac{1}{2}+2\times\frac{\sqrt{3}}{2}-3\times\frac{\sqrt{3}}{3}+1-3\times\frac{1}{2}=0.$

【问题反思】要牢固掌握在 $[0,2\pi)$ 内找到与已知角终边相同的角的方法．

精选问题 4

确定下列各式的符号：

(1) $\tan10$；　(2) $\cos(-4)$；　(3) $\lg(\cos6-\sin6)$；

(4) $\frac{\sin(\cos\theta)}{\cos(\sin\theta)}$（$\theta$ 为第二象限角）．

【思路剖析】分析各角所在的象限．

【问题解答】(1) ∵　$3\pi<10<3\pi+\frac{\pi}{2}$，即 10 是第三象限角，∴　$\tan10>0$.

(2) ∵　$\cos(-4)=\cos(2\pi-4)$，而 $\frac{\pi}{2}<2\pi-4<\pi$，即 -4 是第二象限角，∴　$\cos(-4)<0$.

(3) ∵　$\frac{3\pi}{2}<6<2\pi$，故 6 是第四象限角．

设 6 弧度角的终边与单位圆交于点 P(图 2－5),$PM\perp Ox$ 于点 M.

则　$\cos6=OM$, $\sin6=MP$.

所以　$\cos6-\sin6=OM-MP=OM+PM>OP=1$,

∴　$\lg(\cos6-\sin6)>0$.

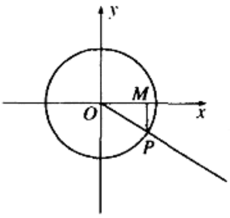


图 2－5

(4) 因为 θ 为第二象限角,所以 $-1<\cos\theta<0$, $0<\sin\theta<1$,即 $\cos\theta$ 是第四象限角,$\sin\theta$ 是第一象限角,从而 $\sin(\cos\theta)<0$, $\cos(\sin\theta)>0$.

因此 $\dfrac{\sin(\cos\theta)}{\cos(\sin\theta)}<0$.

【问题反思】判断三角比的符号关键是确定已知角所在的象限. 本题给出的角都是用弧度表示的,确定它们所在的象限是将其与 $\dfrac{k\pi}{2}(k\in\mathbf{Z})$ 来比较而得到. 第(3)小题涉及到对数运算,式子的符号要通过判定 $\cos6-\sin6$ 与 1 的大小确定. 我们利用单位圆中的有向线段来表示三角比,结合三角形的性质得出了结论. 第(4)小题中 $\cos\theta$, $\sin\theta$ 的值是实数,因而可将其看成是用弧度表示的角.

精选问题 5

用单位圆证明:若 $\alpha\in\left(0,\dfrac{\pi}{2}\right)$,则 $\sin\alpha<\alpha<\tan\alpha$.

【思路剖析】用单位圆中的有向线段表示三角比,注意 α 的几何意义.

【问题解答】如图 2－6 所示,设角 α 的终边与单位圆交于点 P,单位圆与 x 轴正半轴交于点 A,过点 A 作圆的切线交角 α 的终边于点 T,过点 P 作 $PM\perp Ox$ 于点 M. 连结 AP,则 $\sin\alpha=MP$, $\tan\alpha=AT$, $\alpha=OA\cdot\alpha=\overset{\frown}{AP}$.

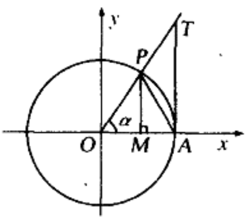


图 2－6

因为 $S_{\triangle POA}<S_{扇形POA}<S_{\triangle AOT}$,所以 $\dfrac{1}{2}OA\cdot MP<\dfrac{1}{2}\overset{\frown}{AP}\cdot OA<\dfrac{1}{2}OA\cdot AT$. 即 $MP<\overset{\frown}{AP}<AT$,即 $\sin\alpha<\alpha<\tan\alpha$.

【问题反思】用单位圆中的有向线段分别表示角的正弦、余弦、正切、余切时,一定要注意这四条有向线段的方向、位置及书写. 有兴趣的同学还可以分别用定义和单位圆证明,对任意角 α 都有 $|\sin\alpha|+|\cos\alpha|\geqslant1$.

○ 训练问题

一、填空题

1. 若角 α 终边上有一点 $P(-10,0)$,则角 α 的六个三角比中不存在的是________.

2. 设 $\sin\alpha=-\dfrac{3}{5}$, $\cos\alpha=\dfrac{4}{5}$,则角 α 的终边上的一点可以是________.

3. $\tan\pi+\cos\dfrac{\pi}{2}-\sin\pi+\cos\dfrac{3\pi}{2}+\sin2\pi=$________.

4. $x^2\sin(-1350°)+y^2\tan405°-(x-y)^2\cot765°-2xy\cos(-1080°)$的值是________.

5. 设 $\angle A$ 是三角形的一个内角,则在 $\sin A$, $\cos A$, $\tan A$, $\cot\dfrac{A}{2}$ 中,只能取正值的是

________.

6. $\frac{|\cos x|}{\cos x}+\frac{\tan x}{|\tan x|}\left(x\neq\frac{k\pi}{2},k\in\mathbf{Z}\right)$的所有值的集合是________.

7. 在$\triangle ABC$中,若$\cos A\tan B\cot C<0$,则这个三角形是________三角形(填锐角、直角或钝角).

8. 已知集合$A=\left\{\theta\mid\sin\theta\geqslant\frac{1}{2},0\leqslant\theta\leqslant2\pi\right\}$,$B=\left\{\theta\mid\cos\theta\leqslant\frac{1}{2},0\leqslant\theta\leqslant2\pi\right\}$,则$A\cap B=$________.

二、选择题

9. 下列命题中正确的是(　　).

A. 若$\cos\alpha<0$,则α是第二象限或第三象限角

B. 若$\alpha>\beta$,则$\cos\alpha<\cos\beta$

C. 若$\sin\alpha=\sin\beta$,则α与β的终边重合

D. α是第三象限角的一个充要条件是:$\sin\alpha\cos\alpha>0$且$\cot\alpha\cos\alpha<0$

10. 已知α是第二象限角,$P(x,\sqrt{5})$为其终边上一点,$\cos\alpha=\frac{\sqrt{2}}{4}x$,则$\sin\alpha$的值为(　　).

A. $\frac{\sqrt{10}}{4}$　　B. $\frac{\sqrt{6}}{4}$　　C. $\frac{\sqrt{2}}{4}$　　D. $-\frac{\sqrt{10}}{4}$

11. 若α是第二象限角,且$\left|\cos\frac{\alpha}{2}\right|=-\cos\frac{\alpha}{2}$,则角$\frac{\alpha}{2}$是(　　).

A. 第一象限角　　B. 第二象限角

C. 第三象限角　　D. 第四象限角

12. 若$\frac{\pi}{4}<\alpha<\frac{\pi}{2}$,则$\sin\alpha,\cos\alpha,\tan\alpha$的大小关系为(　　).

A. $\tan\alpha<\cos\alpha<\sin\alpha$　　B. $\sin\alpha<\tan\alpha<\cos\alpha$

C. $\cos\alpha<\tan\alpha<\sin\alpha$　　D. $\cos\alpha<\sin\alpha<\tan\alpha$

三、解答题

13. 已知角θ的终边上一点$P(-\sqrt{3},m)$,且$\sin\theta=\frac{\sqrt{2}}{4}m$,求$\cos\theta$和$\tan\theta$的值.

14. 已知集合$A=\{x\mid\log_{\frac{1}{2}}|x|>-1\}$,$B=\{x\mid\sin x\leqslant0\}$,$C=\{x\mid\tan x\geqslant0\}$,求$A\cap B\cap C$.