数学分析选讲

SHUXUEFENXI XUANJIANG

李克典　马云苓　编著

厦门大学出版社
XIAMEN UNIVERSITY PRESS

数学分析选讲

李克典　马云苓　编著

厦门大学出版社

图书在版编目(CIP)数据

数学分析选讲/李克典,马云苓编著.—厦门:厦门大学出版社,2006.6

ISBN 7-5615-2575-3

Ⅰ.数… Ⅱ.李… Ⅲ.数学分析 Ⅳ.017

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2006)第 055310 号

厦门大学出版社出版发行

(地址:厦门大学 邮编:361005)

http://www.xmupress.com

xmup @ public.xm.fj.cn

三明日报社印刷厂印刷

2006 年 6 月第 1 版 2006 年 6 月第 1 次印刷

开本:850×1168 1/32 印张:19

字数:472 千字 印数:0001—3000 册

定价:32.00 元

前言

数学分析是高等院校数学专业最重要的基础课，是数学各专业硕士研究生入学考试的必考课程，学好这门课程对于从事现代数学的理论和应用研究都具有十分重要的意义。数学分析内容丰富，知识面广，综合性强，理论体系严谨，解题方法灵活巧妙。为使学生能系统地理解和熟练掌握数学分析的基本理论、解题技巧和应用方法，开设数学分析选讲课程是必要的。

本书系统地总结了数学分析的基本概念、基本理论，并通过典型例题介绍数学分析解题的基本方法和技巧。全书按数学分析的内容综合分为九章，每章、节包括基本概念、基本理论、基本方法及典型例题四部分。每章、节介绍了与其有关的概念、命题及重要结论，它们的等价描述和刻画等，有助于加深读者对数学分析主要内容的理解；精选了一些典型例题(其中有的题目是部分高等院校的研究生入学试题)，由浅入深地介绍数学分析的解题方法，在解题过程中启发读者打开思路和掌握技巧，从而达到培养学生独立分析问题和解决问题能力的目的。

本书是在开设了数学分析选讲的选修课基础上着手编写的，其内容打破了普通的数学分析教材各章、节的编排次序，按照综合内容，把相关材料分类整理。如：在极限理论一章中，有的内容涉及微分学、积分学和级数等部分知识，这样有益于对数学分析方法的深刻理解和掌握，提高对综合题的解题能力。本书既可作为开设数学分析选修课的教材，又可为报考研究生的学生提供复习指导，同时也可作为教师的教学参考书。

本书在编写的过程中，得到了漳州师范学院、商丘师范学院教务处的大力支持，得到了所在系领导和老师的关心和帮助，厦门大学出版社陈进才编辑为该书的出版付出了辛勤的劳动，在此一并致以诚挚的谢意。

本书第一至五章由李克典编写，第六至九章由马云苓编写，全书由李克典统一整理。限于编者的水平和能力，书中疏漏之处在所难免，欢迎同行老师和广大读者批评指正。

编著者

2005 年 12 月

目　录

第一章　极限理论

一、基本概念

1. 数列极限

(1) 数列$\{a_n\}$收敛与发散的定义

1°　数列$\{a_n\}$收敛$\Leftrightarrow \exists a\in \mathbf{R}$,有$\lim\limits_{n\to\infty}a_n=a$;

2°　数列$\{a_n\}$发散$\Leftrightarrow \forall a\in \mathbf{R}$,有$\lim\limits_{n\to\infty}a_n\neq a$.

(2) 数列$\{a_n\}$的极限$\lim\limits_{n\to\infty}a_n=a$的定义,有如下等价形式:

1°　ε-N语言　$\forall \varepsilon>0,\exists N\in \mathbf{N}^+,\forall n>N$,有$|a_n-a|<\varepsilon$;

2°　邻域形式　$\forall \varepsilon>0$,在a的ε邻域$U(a,\varepsilon)$之外至多只有$\{a_n\}$中的有限项;

3°　子列形式　$\{a_n\}$的任意子列$\{a_{n_k}\}$都收敛于a.

(3) $\lim\limits_{n\to\infty}a_n\neq a$的等价形式

1°　ε-N语言

$\exists \varepsilon_0>0,\forall N\in \mathbf{N}^+,\exists n_0>N$,有$|a_{n_0}-a|\geqslant\varepsilon_0$;

2°　邻域形式　$\exists \varepsilon_0>0$,数列$\{a_n\}$任意充分大的项之后,至少有一项不在a的ε_0邻域$U(a,\varepsilon_0)$之内.

(4) 数列$\{a_n\}$有上、下界,有界,无上、下界,无界的$N-M$定义

数列$\{a_n\}$有上界(下界,有界)$\Leftrightarrow \exists M>0,\forall n\in \mathbf{N}$有

$$a_n\leqslant M(M\leqslant a_n,\ |a_n|\leqslant M).$$

数列$\{a_n\}$无上界(无下界,无界)$\Leftrightarrow \forall M>0,\exists n_0\in \mathbf{N}$,有

$$a_{n_0}>M(a_{n_0}<M,\ |a_{n_0}|>M).$$

(5) 集合 E 的上、下确界定义

$\beta=\sup E \Leftrightarrow$ (i) $\forall x \in E$ 有 $x \leqslant \beta$;

(ii) $\forall \varepsilon>0, \exists x_0 \in E$,有 $x_0>\beta-\varepsilon$.

$\alpha=\inf E \Leftrightarrow$ (i) $\forall x \in E$,有 $x \geqslant \alpha$;

(ii) $\forall \varepsilon>0, \exists x_0 \in E$,有 $x_0<\alpha+\varepsilon$.

(6) 数列 $\{a_n\}$ 的上、下极限的定义

1° 用确界定义:若极限 $\lim\limits_{n \to \infty} \sup\{a_n, a_{n+1}, \cdots\}$ 存在,则称其为数列 $\{a_n\}$ 的上极限,记为 $\varlimsup\limits_{n \to \infty} a_n$;

若极限 $\lim\limits_{n \to \infty} \inf\{a_n, a_{n+1}, \cdots\}$ 存在,则称其为数列 $\{a_n\}$ 的下极限,记为 $\varliminf\limits_{n \to \infty} a_n$.

2° 用聚点定义:数列 $\{a_n\}$ 的最大聚点称为 $\{a_n\}$ 的上极限;

数列 $\{a_n\}$ 的最小聚点称为 $\{a_n\}$ 的下极限.

3° 用收敛子列的极限定义:

数列 $\{a_n\}$ 的所有收敛子列中的最大极限值称为 $\{a_n\}$ 的上极限;

数列 $\{a_n\}$ 的所有收敛子列中的最小极限值称为 $\{a_n\}$ 的下极限.

2. 函数极限

(1) 函数极限按自变量 x 的趋向来区分,有六种类型. 即

$$\lim_{x \to x_0} f(x) \qquad \lim_{x \to x_0^+} f(x) \qquad \lim_{x \to x_0^-} f(x)$$

$$\lim_{x \to \infty} f(x) \qquad \lim_{x \to +\infty} f(x) \qquad \lim_{x \to -\infty} f(x)$$

其极限值有四种:有限数 A(正常极限);无穷大 ∞;正无穷大 $+\infty$;负无穷大 $-\infty$(后三种均为非正常极限).

共有 24 种极限定义的形式(包括非正常极限).

1° ε-δ 语言 (仅叙述 $x \to x_0$,对 $x \to x_0^+, x \to x_0^-$ 可作类似的叙述).

$\lim\limits_{x \to x_0} f(x)=A \Leftrightarrow \forall \varepsilon>0, \exists \delta>0, \forall x: 0<|x-x_0|<\delta$,有

$$|f(x)-A|<\varepsilon.$$

2° ε-M 语言(仅叙述 $x\to\infty$,对于 $x\to+\infty$,$x\to-\infty$ 可作类似的叙述)

$\lim\limits_{x\to\infty}f(x)=A\Leftrightarrow\forall\varepsilon>0,\exists M>0,\forall x:|x|>M$,有

$$|f(x)-A|<\varepsilon.$$

3° G-δ 语言

$\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=\infty\Leftrightarrow\forall G>0$(充分大),$\exists\delta>0,\forall x:0<|x-x_0|<\delta$,有 $|f(x)|\geqslant G$.

4° G-M 语言

$\lim\limits_{x\to\infty}f(x)=\infty\Leftrightarrow\forall G>0$(充分大),$\exists M>0,\forall x:|x|>M$,有

$$|f(x)|\geqslant G.$$

3. 无穷小量与无穷大量

极限为 0 的量称为无穷小量(在某一变化过程中);

有非正常极限的量称为无穷大量(在某一变化过程中).

二、基本理论

1. 收敛数列的性质

(1) 收敛数列的极限是唯一的;

(2) 收敛数列是有界数列;

(3) 收敛数列具有保号性与保不等式性;

(4) 收敛数列的四则运算法则.

2. 函数极限的性质

(1) 函数极限的唯一性;

(2) 局部有界性;

(3) 局部保号性与局部保不等式性;

(4) 函数极限的四则运算法则.

3. 函数极限与数列极限的联系(归结原理)

$\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=A\Leftrightarrow\forall\{x_n\}=U^\circ(x_0),x_n\to x_0(n\to\infty)$,有

$$\lim_{n\to\infty}f(x_n)=A.$$

4. 柯西准则

(1) 数列的柯西收敛准则

$\{a_n\}$ 收敛 $\Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbf{N}^+, \forall n,m > N$,有 $|a_n - a_m| < \varepsilon$

$$\Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbf{N}^+, \forall n > N \text{ 及 } \forall p \in \mathbf{N}^+,\text{有}$$

$$|a_{n+p} - a_n| < \varepsilon.$$

$\{a_n\}$ 发散 $\Leftrightarrow \exists \varepsilon_0 > 0, \forall N \in \mathbf{N}^+, \exists n_0 > N$ 及 $\exists p_0 \in \mathbf{N}^+$ 有

$$|a_{n_0+p_0} - a_{n_0}| \geqslant \varepsilon_0.$$

(2) 函数极限的柯西准则

$\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$ 存在 $\Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0, \forall x', x'' \in U^\circ(x_0, \delta)$,有

$$|f(x') - f(x'')| < \varepsilon.$$

$\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$ 不存在 $\Leftrightarrow \exists \varepsilon_0 > 0, \forall \delta > 0, \exists x', x'' \in U^\circ(x_0, \delta)$,有

$$|f(x') - f(x'')| \geqslant \varepsilon_0.$$

5. 迫敛性

(1) 数列收敛的迫敛性定理

如果数列$\{a_n\}$与$\{b_n\}$都收敛于a,又 $\exists N \in \mathbf{N}^+, \forall n > N$,有 $a_n \leqslant c_n \leqslant b_n$,则数列$\{c_n\}$也收敛于$a$.

(2) 函数极限的迫敛性定理

如果在某$U^\circ(x_0)$内,有 $g(x) \leqslant f(x) \leqslant h(x)$ 且 $\lim\limits_{x\to x_0} g(x) = \lim\limits_{x\to x_0} h(x) = A$,则$\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = A$.

6. 单调有界原理

有界单调数列必收敛.

(1) 单调增加有上界数列必收敛,且数列的极限值不小于该数列的任意项.

(2) 单调减少有下界数列必收敛,且数列的极限值不大于该数列的任意项.

(3) 设数列$\{a_n\}$单调,则$\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a \Leftrightarrow \exists \{a_{n_k}\} \subset \{a_n\}$,有$\lim\limits_{k\to\infty} a_{n_k} = a$.

7. 施托斯(Stolz)定理

设$\{y_n\}$是严格递增的正无穷大数列，它与数列$\{x_n\}$一起满足：$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{x_{n+1}-x_n}{y_{n+1}-y_n}=l$，则$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{x_n}{y_n}=l(-\infty\leqslant l\leqslant+\infty)$.

8. 施托斯定理的推广

(1) 设$T>0$为常数，如果定义在$[a,+\infty)$上的函数$f(x)$，$g(x)$满足：

(a) $0<g(x+T)<g(x),x\in[a,+\infty)$，

(b) $\lim\limits_{x\to+\infty}g(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=0$，

(c) $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f(x+T)-f(x)}{g(x+T)-g(x)}=l$，

则 $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f(x)}{g(x)}=l(0\leqslant l\leqslant+\infty)$.

(2) 设$T>0$为常数，如果定义在$[a,+\infty)$上的函数$f(x)$，$g(x)$满足：

(a) 函数$f(x)$，$g(x)$在$[a,+\infty)$的任何有限区间上有界，

(b) $\forall x\in[a,+\infty)$，有$g(x)<g(x+T)$且$\lim\limits_{x\to+\infty}g(x)=+\infty$，

(c) $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f(x+T)-f(x)}{g(x+T)-g(x)}=l$，

则 $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f(x)}{g(x)}=l(0\leqslant l\leqslant+\infty)$.

9. 不动点定理(压缩映象原理)

设函数$f(x)$满足：对任意$x,y\in I$(其中I是区间)，有

$$|f(x)-f(y)|\leqslant k|x-y|$$

其中k：$0<k<1$是常数，则存在唯一$x\in I$，使得$f(x)=x$. 这里x称为$f(x)$的不动点.

10. 无穷小量的性质(在同一变量变化过程中)

(1) 两个无穷小量之和是无穷小量.

(2) 无穷小量与有界量之积是无穷小量.

(3) 有极限的量总可以将它表示为该极限与无穷小量之和.

三、基本方法

1. 证明极限存在及其求极限的方法

(1) 用定义证明极限(ε-N 语言、ε-δ 语言、ε-M 语言等).

(2) 利用极限的四则运算法则.

(3) 有理式的极限(关于 n 的有理式、函数有理式).

(4) 无理式的极限(有理化分子或有理化分母).

(5) 利用迫敛性定理.

(6) 利用无穷小量的性质.

(7) 利用归结原理和求函数极限的方法求数列极限.

(8) 利用单调有界原理.

(9) 利用柯西收敛准则.

(10) 求不定式$\frac{0}{0}$型或$\frac{\infty}{\infty}$型的方法:

1° 消去零因子或无穷因子.

2° 用等价无穷小代换.

3° 应用洛比达法则.

4° 应用带有皮亚诺型余项的泰勒公式.

(11) 利用重要极限($\lim\limits_{n\to\infty}(1+\frac{1}{n})^n=\mathrm{e}$, $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1$, $\lim\limits_{x\to\infty}(1+\frac{1}{x})^x=\mathrm{e}$, $\lim\limits_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}}=\mathrm{e}$) 或其他已知极限.

(12) 对数求极限法.

(13) 利用单侧极限与极限的关系.

(14) 判别单侧极限存在的方法.

(15) 利用施托斯定理及其推广.

(16) 几种求数列极限的有效方法:

1° 利用级数收敛的必要条件.

2° 利用递推关系.

3° 利用定积分的和式.

(17) 利用不动点定理.

2. 证明数列$\{a_n\}$发散或函数极限不存在的方法

(1) 利用极限四则运算:若在同一过程中,两个变量一个存在极限而另一个不存在极限,则它们的和必不存在极限.

(2) 用定义否定形式.

(3) 用柯西收敛准则否定形式.

(4) 对于数列$\{a_n\}$:

1° 如果$\{a_n\}$无界,则$\{a_n\}$发散.

2° 如果$\{a_n\}$有一个发散子列,则$\{a_n\}$发散.

3° 如果$\{a_n\}$有两个子列收敛于不同的极限,则$\{a_n\}$发散.

(5) 对于函数极限:

1° 如果左、右极限至少有一个不存在或它们存在但不相等,则极限不存在.

2° 利用归纳原理(以$x \to x_0$为例).

如果存在$\{x_n\}$、$\{y_n\}$均收敛于x_0,但$\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n)$与$\lim\limits_{n\to\infty} f(y_n)$至少有一个不存在或它们都存在但是不相等,则$\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$不存在.

四、典型例题

例1 已知$\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$,证明$\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{a_1 + 2a_2 + \cdots + na_n}{n^2} = \dfrac{a}{2}$.

证 (Ⅰ)因为$\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$,所以对$\forall \varepsilon > 0$,$\exists N_1 \in \mathbf{N}^+$,$\forall n > N_1$,有$|a_n - a| < \dfrac{\varepsilon}{2}$.

又因为$\dfrac{a}{2} = \dfrac{n^2 a}{2n^2} = \dfrac{n(n+1)a}{2n^2} - \dfrac{a}{2n} = \dfrac{a + 2a + \cdots + na}{n^2} - \dfrac{a}{2n}$

所以$\left|\dfrac{a_1 + 2a_2 + \cdots + na_n}{n^2} - \dfrac{a}{2}\right|$

$$\leqslant \frac{|(a_1 - a) + 2(a_2 - a) + \cdots + n(a_n - a)|}{n^2} + \frac{|a|}{2n}$$

$$\leqslant \frac{|(a_1-a)+2(a_2-a)+\cdots+N_1(a_{N_1}-a)|}{n^2}+$$

$$\frac{|(N_1+1)(a_{N_1+1}-a)+\cdots+n(a_n-a)|}{n^2}+\frac{|a|}{2n}$$

$$\leqslant \frac{A}{n^2}+\frac{(N_1+1)|a_{N_1+1}-a|+\cdots+n|a_n-a|}{n^2}+\frac{|a|}{2n}$$

$$\leqslant \frac{A}{n^2}+\frac{(N_1+1)+\cdots+n}{n^2}\frac{\varepsilon}{2}+\frac{|a|}{2n}.$$

其中 $A=|(a_1-a)+\cdots+N_1(a_{N_1}-a)|$ 是定值，$|a|$ 也是定值。于是，$\exists N_2\in\mathbf{N}^+$，$\forall n>N_2$，有$\frac{A}{n^2}<\frac{\varepsilon}{4}$ 及$\frac{|a|}{2n}<\frac{\varepsilon}{4}$.

因而，$\exists N=\max\{N_1,N_2\}\in\mathbf{N}^+$，$\forall n>N$，有

$$\left|\frac{a_1+2a_1+\cdots+na_n}{n^2}-\frac{a}{2}\right|<\frac{\varepsilon}{4}+\frac{1}{n^2}\frac{n(n+1)}{2}\frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon}{4}\leqslant\varepsilon.$$

根据定义，知$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{a_1+2a_2+\cdots+na_n}{n^2}=\frac{a}{2}$.

（Ⅱ）令 $x_n=a_1+2a_2+\cdots+na_n$， $y_n=n^2$，

则 $$\lim_{n\to\infty}\frac{x_n-x_{n-1}}{y_n-y_{n-1}}=\lim_{n\to\infty}\frac{na_n}{n^2-(n-1)^2}=\lim_{n\to\infty}\frac{n}{2n-1}a_n=\frac{a}{2}.$$

根据施托 斯定理，有$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{a_1+2a_2+\cdots+na_n}{n^2}=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{x_n}{y_n}=\frac{a}{2}$.

例 2 已知$\lim\limits_{n\to\infty}a_n=a$，$\lim\limits_{n\to\infty}b_n=b$，则

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_1b_n+a_2b_{n-1}+\cdots+a_nb_1}{n}=ab.$$

证 因为$\lim\limits_{n\to\infty}a_n=a$，$\lim\limits_{n\to\infty}b_n=b$，所以

$\exists M>0$，使得 $\forall n\in\mathbf{N}^+$，有 $|a_n|\leqslant M$，$|b_n|\leqslant M$，及 $\forall\varepsilon>0$，$\exists N_1\in\mathbf{N}^+$，$\forall n>N_1$，有 $|a_n-a|<\frac{\varepsilon}{4(|b|+1)}$，$|b_n-b|<\frac{\varepsilon}{4M}$.

令 $c_n=\frac{a_1b_n+a_2b_{n-1}+\cdots+a_nb_1}{n}$，

$$
\begin{aligned}
&|c_n - ab| = \\
&\left|\frac{(a_1 b_n - ab) + \cdots + (a_{N_1} b_{n-N_1+1} - ab) + \cdots + (a_n b_1 - ab)}{n}\right| \\
&\leqslant \frac{1}{n}\left|(a_1 b_n - ab) + \cdots + (a_{N_1} b_{n-N_1+1} - ab)\right| + \\
&\quad \frac{1}{n}\left|(a_{N_1+1} b_{n-N_1} - ab) + \cdots + (a_{n-N_1} b_{N_1+1} - ab)\right| + \\
&\quad \frac{1}{n}\left|(a_{n-N_1+1} b_{N_1} - ab) + \cdots + (a_n b_1 - ab)\right| \\
&\leqslant \frac{1}{n}(|a_1 b_n| + |ab| + \cdots + |a_{N_1} b_{n-N_1+1}| + |ab|) + \\
&\quad \frac{1}{n}(|a_{N_1+1} b_{n-N_1} - a_{N_1+1} b| + |a_{N_1+1} b - ab| + \cdots + \\
&\quad |a_{n-N_{1+1}} b_{N_1} - ab| + |a_{n-n_1} - ab|) + \\
&\quad \frac{1}{n}(|a_{n-N_1+1} b_{N_1}| + |ab| + \cdots + |a_n b_1| + |ab|) \\
&\leqslant \frac{1}{n} N_1 (M^2 + |ab|) + \frac{1}{n}(|a_{N_1+1}|\,|b_{n-N_1} - b| + |b|\,|a_{N_1+1} - a| + \\
&\quad \cdots + |a_{n-N_1}|\,|b_{N_1} - b| + |b|\,|a_{n-N_1} - a| + \frac{1}{n} N_1 (M^2 + |ab|) \\
&\leqslant \frac{2}{n} N_1 (M^2 + |ab| + \frac{1}{n}(n - 2N_1)\left(M \frac{\varepsilon}{4M} + |b| \frac{\varepsilon}{4(|b|+1)}\right) \\
&\leqslant \frac{2}{n} N_1 (M^2 + |ab|) + \frac{\varepsilon}{2}.
\end{aligned}
$$

由于 $N_1(M^2 + |ab|)$ 是定值，$\exists N_2 \in \mathbf{N}^+$，$\forall n > N_2$，有

$$\frac{1}{n} N_1 (M^2 + |ab|) < \frac{\varepsilon}{4}.$$

取 $N = \max\{N_1, N_2\} \in \mathbf{N}^+$，$\forall n > N$，有 $|c_n - ab| < \varepsilon$.

故
$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_1 b_n + a_2 b_{n-1} + \cdots + a_n b_1}{n} = ab.$$

注　本例中取 $b_n = 1 (n \in \mathbf{N}^+)$，可得 $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_1 + a_2 + \cdots + a_n}{n} = a$.

例 3 证明$\lim\limits_{n\to\infty}\int_0^1 e^{x^n}\,dx = 1$.

证 $\forall \varepsilon: 0<\varepsilon<1$,有 $0<1-\varepsilon<1$. 从而

$$\lim_{n\to\infty}(1-\varepsilon)^n = 0.$$

$$1-\varepsilon = \int_0^{1-\varepsilon} e^0\,dx \leqslant \int_0^{1-\varepsilon} e^{x^n}\,dx \leqslant e^{(1-\varepsilon)^n}(1-\varepsilon).$$

又$\lim\limits_{n\to\infty} e^{(1-\varepsilon)^n} = e^0 = 1$.

于是$\lim\limits_{n\to\infty}\int_0^{1-\varepsilon} e^{x^n}\,dx = 1-\varepsilon$ 或$\lim\limits_{n\to\infty}\left(\int_0^{1-\varepsilon} e^{x^n}\,dx - (1-\varepsilon)\right) = 0$.

对于上述 $\varepsilon>0$, $\exists N\in \mathbf{N}^+$, $\forall n>N$,有

$$\left|\int_0^{1-\varepsilon} e^{x^n}\,dx - 1\right| < 2\varepsilon.$$

而$\int_{1-\varepsilon}^1 e^{x^n}\,dx = \left|\int_{1-\varepsilon}^1 e^{x^n}\,dx\right| \leqslant e\varepsilon$.

$\forall n>N$ 时,有

$$\left|\int_0^1 e^{x^n}\,dx - 1\right| \leqslant \left|\int_0^{1-\varepsilon} e^{x^n}\,dx - 1\right| + \left|\int_{1-\varepsilon}^1 e^{x^n}\,dx\right| \leqslant 2\varepsilon + e\,\varepsilon = (2+e)\varepsilon.$$

所以,$\lim\limits_{n\to\infty}\int_0^1 e^{x^n}\,dx = 1$.

例 4 求极限$\lim\limits_{n\to\infty}(\sqrt[8]{n^2+1} - \sqrt[4]{n+1})$.

解 $\lim\limits_{n\to\infty}(\sqrt[8]{n^2+1} - \sqrt[4]{n+1}) = \lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\sqrt[4]{n^2+1} - \sqrt{n+1}}{\sqrt[8]{n^2+1} + \sqrt[4]{n+1}}$

$$= \lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{n^2+1} - (n+1)}{(\sqrt[8]{n^2+1} + \sqrt[4]{n+1})(\sqrt[4]{n^2+1} + \sqrt{n+1})}$$

$$= \lim_{n\to\infty}\frac{n^2+1-(n+1)^2}{(\sqrt[8]{n^2+1} + \sqrt[4]{n+1})(\sqrt[4]{n^2+1} + \sqrt{n+1})(\sqrt{n^2+1}+n+1)}$$

$= 0$.

例 5 设函数 $f(x)$ 在$(0,+\infty)$上递增且

$$\lim_{x\to\infty}\frac{1}{x}\int_0^x f(t)\,dt = c,$$

则 $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=c.$

证 $\forall x>0$,有

$$f(x)=\frac{1}{x}\int_0^x f(x)\mathrm{d}t\geqslant\frac{1}{x}\int_0^x f(t)\mathrm{d}t.$$

又 $$f(x)=\frac{1}{x}\int_x^{2x} f(x)\mathrm{d}t\leqslant\frac{1}{x}\int_x^{2x} f(t)\mathrm{d}t$$
$$=2\cdot\frac{1}{2x}\int_0^{2x} f(t)\mathrm{d}t-\frac{1}{x}\int_0^x f(t)\mathrm{d}t.$$

已知 $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{1}{x}\int_0^x f(t)\mathrm{d}t=c$ 且

$$\frac{1}{x}\int_0^x f(t)\mathrm{d}t\leqslant f(x)\leqslant 2\cdot\frac{1}{2x}\int_0^{2x} f(t)\mathrm{d}t-\frac{1}{x}\int_0^x f(t)\mathrm{d}t.$$

根据迫敛性定理知 $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=c.$

例 6 证明 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n^k}{a^n}=0(a>1,k$ 是正整数).

证 (Ⅰ) 令 $a=1+h,h>0$,则

$$a^n=(1+h)^n=C_n^0+C_n^1h+\cdots+C_n^kh^k+C_n^{k+1}h^{k+1}+\cdots+C_n^nh^n$$
$$\geqslant C_n^{k+1}h^{k+1}=\frac{n(n-1)\cdots(n-k)}{(k+1)!}h^{k+1}\quad(n>k).$$

从而,$\forall n>k$,有 $0\leqslant\frac{n^k}{a^n}\leqslant\frac{n^k(k+1)!}{n(n-1)\cdots(n-k)h^{k+1}}.$

已知 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n^k(k+1)!}{n(n-1)\cdots(n-k)h^{k+1}}=0.$

根据迫敛性定理知,$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n^k}{a^n}=0.$

(Ⅱ) 应用洛比达法,有 $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{x^k}{a^x}=0\quad(a>1).$

根据归结原理,有 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n^k}{a^n}=0.$

例 7 求极限 $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{n^3+3^n}.$

解 因为 $\sqrt[n]{n^3+3^n}=3\cdot\sqrt[n]{\frac{n^3}{3^n}+1},$