一九八〇年中学生复习资料

数学

中

太原市教育局教研室

一九八〇年中学生复习资料

数　　学

（中　册）

太原市教育局教研室　编

山西人民出版社

一九八〇年中学生复习资料

数　学（中册）

太原市教育局教研室编

山西人民[redacted]出版　[redacted]号)

山西省新华书店发行　　太原印刷厂印刷

·

开本 787×1092　1/32　印张：8 1/2　字数：180千字

1980年2月第1版　　1980年2月太原第1次印刷

印数：1—218 600册

·

书号：7088 849　　定价：0.58 元

目　录

（中　册）

立体几何部分

平面三角部分

此为试读，需要完整PDF请访问：www.ertongbook.com

立体几何部分

第一章　直线与平面

一、平面

（一）平面的基本性质

1. 如果一条直线上的两点在一个平面内，那么这条直线上所有的点都在这个平面内。

2. 如果两个平面有一个公共点，那么它们相交于过这点的一条直线。

3. 不在一条直线上的三点确定一个平面。

（二）确定平面的条件

1. 根据平面的基本性质 3 确定。

2. 一直线与直线外一点确定一个平面。

3. 相交二直线确定一个平面。

4. 平行二直线确定一个平面。

二、直线与直线的位置关系

重合直线（至少有两个公共点）

相交直线（只有一个公共点）

　　特例：互相垂直

平行直线（在同一平面内无公共点）

在同一平面内

异面直线（不相交又不平行）——不在同一平面内。

特例：异面垂直

三、直线与平面的位置关系

直线在平面内（有两个公共点）

直线与平面相交（只有一个公共点）

特例：直线与平面垂直——直线l如果垂直于平面M内的所有直线则称直线l垂直于平面M。

直线与平面平行（无公共点）

四、平面与平面的位置关系

重合（有不在一直线上的三个公共点）

相交（只有一条公共直线）

特例：两平面互相垂直——形成直二面角的两个平面叫做互相垂直的平面

平行（无公共点）

五、距离

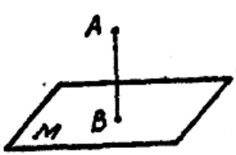

图4—1

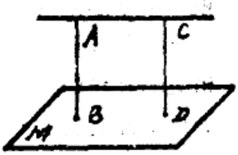

图4—2

点到平面的距离：自点向平面作垂线，则点至垂足的垂线段长即为点到平面的距离（图4—1）。

直线到平面的距离：当直线与平面平行时，夹在直线和平面之间的公垂线段长即为直线到平面的距离（图4—2）。

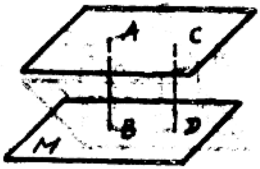

图4—3

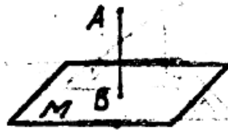

图4—4

平面到平面的距离：夹在两个平行平面之间的公垂线段的长即为这两个平行平面之间的距离（图4—3）。

六、射影

点在平面内的射影：自点向平面作垂线，则垂足即为点在平面内的射影（图4—4）。

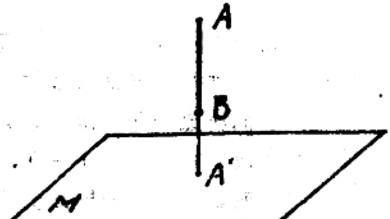

图 4—5

线段在平面内的射影：线段上所有的点在平面内的射影所构成的图形，叫做线段在平面内的射影。因此，当线段和平面垂直时，其射影是一个点(图4—5)；当线段和平面平行时，其射影是一条和它相等的线段（图4—6）；线段和平面斜交时，在平面内连结垂足和斜足的线段，就是斜线段在平面内的射影（图4—7），且有 $BC-AB\cdot\cos\alpha$

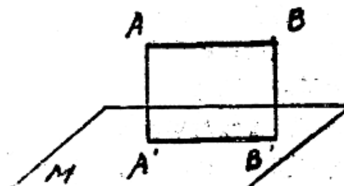

图4—6

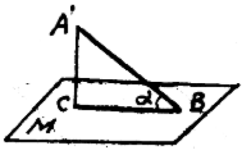

图 4 —7

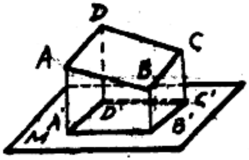

图 4 — 8

平面图形在平面内的射影．如图 4 — 8 所示，四边形$ABCD$上所有的点在平面内的射影所构成的四边形$A'B'C'D'$即为四边形$ABCD$在平面M内的射影．设它们所构成的二面角为α，则其面积关系为：

$$S_{\text{四边形}A'B'C'D'}=S_{\text{四边形}ABCD}\cdot\cos\alpha$$

七、交角

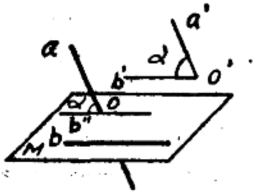

图 4 — 9

异面直线所成的角：过空间内一点分别作两条异面直线的平行线，它们所成的角叫做两条异面直线所成的角．如图 4 — 9，$\angle a'o'b'$或$\angle aob''$就是异面直线a和b所成的角．

直线与平面所成的角：平面的斜线和它在平面内的射影所成的锐角，叫做这条斜（直）线和这个平面所成的角．

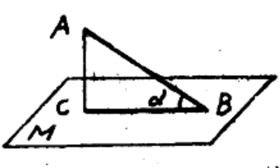

图 4 —10

特例：直线与平面垂直，则直线与平面成直角；直线与平面平行（或直线在平面内），则直线与平面成$O°$的角．

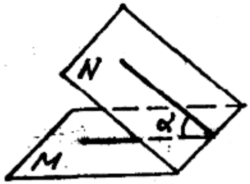

图 4—11

注：（1）平面的斜线和它在平面内的射影所成的角，是这条斜（直）线和这平面内的任何一条直线所成的最小正角；

（2）和平面中情形类似，在空间中，如果两个角的两边分别平行，那么这两个角相等或互补。

二面角及其平面角：

二面角：由一条直线引出的两个半平面所构成的图形（图 4—11）。

二面角的平面角：从二面角的棱上任一点，在两个面内分别作垂直于棱的两条射线所成的角。

二面角的大小可用它的平面角表示，平面角等于90°的二面角叫做直二面角，构成直二面角的两个平面叫做互相垂直的两个平面。

八、关于平行的一些定理

1. 同平行于一直线的二直线互相平行（传递性）；

2. 垂直于同一平面的二直线平行；

3. 平面M内的直线a若平行于平面N，则这直线必平行于M与N的交线；

4. 两个平行平面和第三个平面相交，那么它们的交线平行；

5、如果一个平面同侧的两点到这个平面的距离相等，那么过这两点的直线平行于这个平面；

6. 平面外的一条直线，如果和这个平面内的一条直线平行，那么这条直线就和这个平面平行；

7. 如果两条相交直线分别和同一个平面平行，那么过这两条直线的平面和这个平面平行；

8. 过平面外一点，有一个且只有一个平面和该平面平行；

9. 同垂直于一条直线的两个平面互相平行；

10. 同平行于一个平面的两个平面互相平行。

九、关于垂直的一些定理

1. 如果直线a与平面M内两条相交的直线都垂直，则a垂直于平面M（证明附后）；

2. 如果两条平行直线中的一条垂直于一个平面，那么另一条也垂直于这个平面；

3. 两个平面互相垂直，那么在一个平面内垂直于它们交线的直线，必垂直于另一个平面；

4. 相交两平面都垂直于第三个平面，那么它们的交线也垂直于第三个平面；

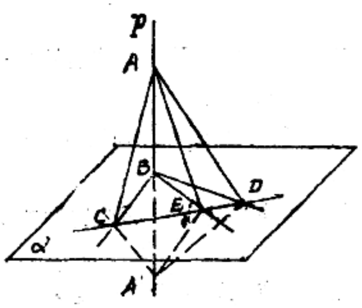

图 4 —12

一个平面经过另一个平面的一条垂线，那么这两个平面垂直；

6. 如果一条直线垂直于一个平面，则此直线垂直于该平面内的任何直线；

7. 如果直线a

此为试读，需要完整PDF请访问：www.ertongbook

垂直于平面M，则说直线a与平面M的夹角是90°

定理（二垂线定理）：如果一条直线和一个平面相交，并且垂直于平面内过交点的两条直线，那末这条直线就垂直于平面内过交点的任何一条直线。

已知．直线p和平面α相交于B点，BC、BD是α内过B点的两条直线，并且$p\perp BC$，$p\perp BD$，BE是α内过B点的任意一条直线（如图4—12）。

求证：$p\perp BE$。

证明：在直线p上，自B向两侧截取$BA=BA'$，在α内作任意直线和BC、BD、BE分别交于C、D、E三点。

连AC、AD、AE和$A'C$、$A'D$和$A'E$，

$\because$ BC垂直平分AA'，BD垂直平分AA'，

$\therefore$ $AC=A'C$，$AD=A'D$，又$CD=CD$。

$\therefore$ $\triangle ACD\cong\triangle A'CD$，$\angle ACD=\angle A'CD$

于是得 $\triangle ACE\cong\triangle A'CE$

$\therefore$ $AE=A'E$

$\because$ B是线段AA'的中点 $\therefore$ $BE\perp AA'$。

即 $p\perp BE$。

注：根据此定理和异面直线夹角的定义得出下面推论：如果一条直线垂直于平面内两条相交的直线，那末这条直线就垂直于平面内任何一条直线．于是根据定义，则此直线和平面互相垂直。

十、三垂线定理及其逆定理

1． 三垂线定理：在平面内的一条直线，如果和一条斜线在这个平面内的射影垂直，那末它也和这条斜线垂直。

2． 三垂线逆定理：平面内的一条直线若与平面的一条

斜线垂直，则必与斜线在平面内的射影垂直。

注：对于八、九、十中所述定理，要求明确定理的条件、结论、意义并应掌握它们的作图方法以及推证过程。

十一、基本轨迹

1. 到线段两端距离相等的点的轨迹是过此线段的中点而垂直于此线段的平面（中垂面）。

2. 到角的两边距离相等的点的轨迹是过角的平分线而垂直于角所在平面的平面。

3. 到两个平行平面距离相等的点的轨迹是夹在它们之间的公垂线段的中垂面。

4. 到一个平面距离等于定长a的点的轨迹是在此平面的两侧且到此平面距离为a的两个平行平面。

5. 到定点O距离等于定长的点的轨迹是以O为中心，半径等于a的一个球面。

注意：（1）和平面几何中相应基本轨迹类比；

（2）掌握上述轨迹的作图和证明。

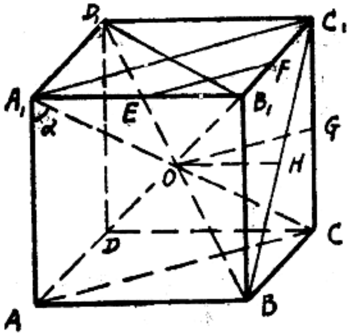

图 4—13

十二、范例

例1 如图4—13，已知正方体A_1C的棱长为a，E、F分别是A_1B_1、B_1C_1的中点，

求（1）下列直线的夹角：

A_1A与B_1C_1；

A_1A与BC_1；

A_1A与EF；　EF与CD_1

（2）B_1B与A_1C夹角的正弦；

（3）对角线A_1C与D_1B的交点O到棱CC_1的距离；

（4）点O到平面BB_1C_1C的距离；

（5）对角线DB_1与平面A_1C_1B所成之角.

解（1）这里关键是找异面直线所成的角。

∵　正方体是棱柱，$A_1A \parallel B_1B$（棱柱定义），

∴　A_1A与B_1C_1的夹角：$\angle BB_1C_1 = 90°$．A_1A与BC_1的夹角：$\angle B_1BC_1 = 45°$．

∵　$EF \parallel A_1C_1$（三角形中位线性质），

∴　A_1A与EF的夹角$\angle AA_1C_1 = 90°$

∵A_1D_1、BC是正方体的侧棱，

∴　$A_1D_1 \perp\!\!\!= BC$，四边形A_1BCD_1是平行四边形，$CD_1 \parallel A_1B$。而$\triangle A_1BC_1$是等边三角形，$\angle BA_1C_1 = 60°$。

∴　EF与CD_1的夹角$\angle BA_1C_1 = 60°$。

（2）∵　侧棱$A_1A \perp$底面$ABCD$，　∴$A_1A \perp AC$。

在直角$\triangle ABC$中，$AC^2 = AB^2 + BC^2 = a^2 + a^2 = 2a^2$。

在直角$\triangle A_1AC$中，$A_1C^2 = A_1A^2 + AC^2 = a^2 + 2a^2 = 3a^2$。

∴　BB_1与A_1C的夹角的正弦 $\sin\alpha = \dfrac{AC}{A_1C} = \dfrac{\sqrt{2}a}{\sqrt{3}a} = \dfrac{\sqrt{6}}{3}$。

（3）在直角$\triangle A_1CC_1$中，由（1）知：O是A_1C的中点，取CC_1中点G，连OG，则$OG \perp CC_1$，$OG = \dfrac{1}{2}A_1C_1$

$= \dfrac{1}{2}\sqrt{2}a$

（4）设BC_1的中点是H，连OH，由（1）知：O是D_1B的中点，则$OH \parallel D_1C_1$，$OH \perp BC_1$，同理$OH \perp CC_1$，∴$OH \perp$

平面BB_1C_1C，

故OH是点O到平面BB_1C_1C的距离

$$\therefore \quad OH=\frac{1}{2}D_1C_1=\frac{1}{2}a$$

（5）∵DB_1在平面$A_1B_1C_1D_1$上的射影是D_1B_1，

$D_1B_1\perp A_1C_1$ ∴ $DB_1\perp A_1C_1$（三垂线定理）

同理 $DB_1\perp C_1B$

∴ $DB_1\perp$平面A_1C_1B

故DB_1与平面A_1C_1B成90°角。

例2 求证空间四边形中，（1）四边的中点在同一个平面内；（2）对角线和过四边中点的平面平行。

已知：E、F、G、H是空间四边形$ABCD$四边的中点，AC、BD是$ABCD$的对角线（图4—14）

求证：（1）E、F、G、H在同一个平面内；

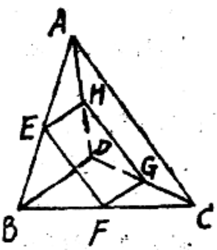

图4—14

（2）AC、BD和过E、F、G、H的平面平行。

证明：（1）连结EF、GH，

∵ $EF\parallel AC$，$GH\parallel AC$（三角形中位线定理），

∴ $EF\parallel GH$（同平行于第三条直线）。

∴ E、F、G、H在EF、GH所确定的平面内。

（2）∵$AC\parallel EF$，而 EF在平面$EFGH$内，

∴$AC\parallel$平面$EFGH$（面外一直线平行于面内一条直线，则平行于该平面）。

同理可证$BD\parallel$平面$EFGH$，

注：证空间图形关系时，也常在共面点、线间引用平面几何知识进行论证，与空间几何定理相配合.

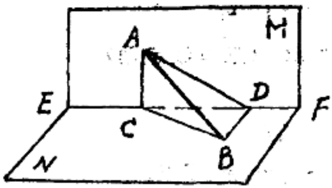

图 4 —15

例3 一条长为a的线AB夹在互相垂直的两个平面M、N的中间，它和平面M、N分别成30°、45°角，求这条线段的两端点A、B在这两个平面的交线上两个射影间的距离.

解 从A作$AC\perp EF$，从B作$BD\perp EF$，连BC、AD，则$\angle BAD=30°$，$\angle ABC=45°$，

$$\therefore \quad BD=\frac{1}{2}a,\quad BC=\frac{\sqrt{2}}{2}a$$

在直角ΔBDC中，$\because \angle BDC=d$，（直角可用d表示）

$$\therefore \quad CD=\sqrt{BC^2-BD^2}=\sqrt{\frac{2}{4}a^2-\frac{1}{4}a^2}=\frac{1}{2}a$$

例4 三射线SX、SY、SZ两两垂直相交于S，平面P截三射线于A，B，C。求证：（1）S在平面P上的射影为ΔABC的垂心；（2）$S_{\Delta SBC}$是$S_{\Delta OBC}$和$S_{\Delta ABC}$的比例中项。（$S_{\Delta SBC}$表示ΔSBC的面积）

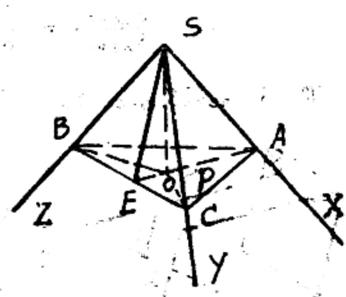

图4—16

证 （1）设O为S在平面P上的射影，则$SO\perp$平面ABC；

过S作$SE\perp BC$，连OE、AE，则$OE\perp BC$（三垂线定理逆定理），

又∵　$SA\perp SB$和SC，∴　$SA\perp SBC$。

又　　$SE\perp BC$，∴　$AE\perp BC$（三垂线定理）

因此　AE、OE重合

∴　AE为ΔABC的高且经过O点。

同理可证ΔABC的其它两条高也经过O点。

∴　O为ΔABC的垂心。

（2）∵　$SE\perp BC$，$AE\perp BC$，$\dfrac{S_{\Delta OBC}}{S_{\Delta SBC}}=\dfrac{OE}{SE}$

$\dfrac{S_{\Delta SBC}}{S_{\Delta ABC}}=\dfrac{SE}{AE}$，又$\angle ASE=90°$，$SO\perp AE$，

∴　在$Rt\Delta SEA$中，（$Rt\Delta$表示直角三角形）

$SE^2=EO\cdot AE$，即$\dfrac{OE}{SE}=\dfrac{SE}{AE}$

$$\therefore\quad \frac{S_{\Delta OBC}}{S_{\Delta SBC}}=\frac{S_{\Delta SBC}}{S_{\Delta ABC}}$$

即　$S_{\Delta SBC}$是$S_{\Delta OBC}$和$S_{\Delta ABC}$的比例中项。

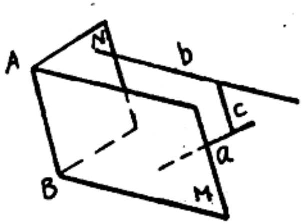

图4—17

例5：两条异面直线分别垂直于相交的二平面，则异面直线的公垂线平行于相交平面的交线。

已知　a、b为异面直线，c为其公垂线，$a\perp$平面M，$b\perp$平面N，AB为M、N的交线，

求证：$c\parallel AB$。

此为试读，需要完整PDF请访问：www.ertongbook