普通高等学校研究生教材

结构动力学

Jiegou Donglixue

包世华 编著

武汉理工大学出版社

结构动力学

包世华　编著

武汉理工大学出版社
·武　汉·

内容提要

本书是为普通高等学校土木工程专业（即涵盖房建、道桥、水利等的“大土木”）的研究生编写的教材，也是为学过结构力学课程者要进一步加深、加宽结构动力学方面知识而编写的参考用书。本书内容与结构力学课程中的结构动力计算一章相衔接，但更为面宽、深入、系统地讲述了结构动力分析的基本理论、计算方法、实用解法和一些工程应用问题。

全书共6章，内容包括：结构动力学概述，单自由度体系的振动，多自由度体系的振动，无限自由度（分布参数）体系的振动，结构动力分析的实用解法，结构动力分析的工程应用问题等。前5章后附有思考题和习题，书后附有习题答案。

本书可作为土木工程专业，即“大土木”的房建、道桥、水利等各类专业结构方向的研究生教材，也可作为高年级学生和有关工程技术人员的参考用书。

图书在版编目(CIP)数据

结构动力学/包世华编著. —武汉：武汉理工大学出版社，2005

ISBN 7-5629-2341-8

Ⅰ.结…
Ⅱ.包…
Ⅲ.结构动力学-研究生-教材
Ⅳ.0342

出版发行：武汉理工大学出版社
武汉市武昌珞狮路122号 邮编：430070
http://www.techbook.com.cn
E-mail：Liuyj@mail.whut.edu.cn
印 刷 者：武汉理工大印刷厂
经 销 者：各地新华书店
开 本：787×1092 1/16
印 张：15
字 数：375千字
版 次：2005年10月第1版
印 次：2005年10月第1次印刷
印 数：1—2000册
定 价：26.00元
凡购本书，如有缺页、倒页、脱页等印装质量问题，请向出版社发行部调换。
本书购书热线电话：(027)87394412 87383695 87384729

前　　言

本书是为普通高等学校“大土木”的房建、道桥、水利等专业结构方向的研究生和本科高年级学生编写的教材和参考用书，是在作者多年为清华大学，特别是清华大学在各地举办的研究生班，讲授结构动力学课程的教案、讲义等材料的基础上重新编写而成，其中包含了近年来我们自己的研究成果。可供研究生和本科高年级学生作为教材，也可为有关工程技术人员作为参考用书。

本书与结构力学课程中的结构动力计算一章相衔接，为了学习的方便，所有的提法、符号等均采用一致。本书比结构动力计算一章更为面宽、深入、系统地讨论了结构动力分析的基本理论、计算方法、实用解法和一些工程应用问题。

单自由度体系和多自由度体系的振动是结构力学课程中结构动力计算一章的主要内容，与之相比，本书中增加了周期荷载作用下的动力反应、非线性体系动力反应的数值解法（弹塑性振动）、有质块时的振动、动荷载不直接作用在质量上时的振动、阻尼理论的讨论及各种数值解法等内容。

无限自由度（分布参数）体系的振动一章以直杆弯曲振动为主，考虑了轴向力、剪切变形和惯性力矩等各种因素的影响；同时介绍了直杆的剪切、轴向、扭转振动和刚架的振动。无限自由度体系的振动方程是偏微分方程组，本章中以双变量梁为例介绍了常微分方程求解器在动力分析中的应用，是我们自己的研究成果。

结构动力分析的实用解法一章介绍了能量法、集中质量法、迭代法、子空间迭代法和有限单元法。前面几个方法是近似计算的常用方法，后面两个方法是大型结构动力分析的常用解法。

结构动力分析的工程应用问题一章，前一部分介绍了高层建筑结构常微分方程求解器方法，是我们自己近年的研究成果；后一部分比较深入地讨论了我国规范采用的结构地震反应的计算方法，包括反应谱地震作用计算方法和时程分析法。

全书整个内容是为适应研究生的学习要求组织的。编写时参考了清华大学结构力学教研组老同事龙驭球院士和古国纪教授的教案和教学资料，特向他们致以谢意。

杨景菜参加了本书的例题、习题答案、计算及制图等工作。

本书难免存在不足之处，欢迎读者批评指正。

清华大学　包世华

2004 年 4 月

目　录

1 结构动力学概述

1.1 结构动力计算的目的和特点

结构动力学(或结构动力计算)研究在动荷载作用下结构的位移和内力(以后统称为动力反应)的计算原理和计算方法。

首先说明动荷载与静荷载的区别。动荷载的特征是荷载(大小、方向、作用位置)随时间而变化。如果单纯从荷载本身性质来看,严格说来,绝大多数实际荷载都应属于动荷载。但是,如果从荷载对结构所产生的影响这个角度来看,则可分为两种情况。一种情况是:荷载虽然随时间在变,但是变得很慢,荷载对结构所产生的影响与静荷载相比相差甚微。在这种荷载作用下的结构计算问题实际上仍属于静荷载作用下的结构计算问题。换句话说,这种荷载实际上可看作静荷载。另一种情况是:荷载不仅随时间在变,而且变得较快,荷载对结构所产生的影响与静荷载相比相差甚大。因此在这种荷载作用下的结构计算问题属于动力计算问题。换句话说,这种荷载实际上应看作动荷载。

还需进一步说明,这里所谓荷载随时间变化的快和慢是用什么标准来衡量呢?这里没有绝对的时间单位,时间都是以结构的自振周期来度量的。例如,设荷载在 1s 之内由 0 增到其最大值,对于自振周期为 0.1s 的结构来说,这种加载速度是缓慢的,这种荷载实际上可看作静荷载。但是,对于自振周期为 10s 的结构来说,这种加载速度是较快的,这种荷载是一种典型的动荷载。

最后说明结构的动力计算与静力计算的区别。静力计算研究的是静荷载作用的平衡问题,这时结构的质量不随时间快速运动,因而无惯性力。动力计算研究的是动荷载作用下的运动(或反应)问题,这时结构的质量随时间快速运动,惯性力的作用成为必须考虑的重要问题。根据达朗伯原理,动力计算问题可以转化为静力平衡问题来处理。但是,这是一种形式上的平衡,是一种动平衡,是在引进惯性力的条件下的平衡。换句话说,在动力计算中,虽然形式上仍是在列平衡方程,但是这里要注意两个特点:第一,在所考虑的力系中要包括惯性力这个新的力;第二,这里考虑的是瞬间的平衡,荷载、内力等都是时间的函数。

1.2 动荷载的种类

工程实际中经常遇到的动荷载主要有下面几类:

(1)周期荷载

这类荷载随时间周期性地变化。周期荷载中最简单也是最重要的一种称为简谐荷载(图 1.1(a)),荷载 $P(t)$随时间 t 的变化规律可用正弦或余弦函数表示。机器转动部分引起的荷载常属于这一类。其他的周期荷载可称为非简谐性的周期荷载(图 1.1(b))。

(2)冲击荷载

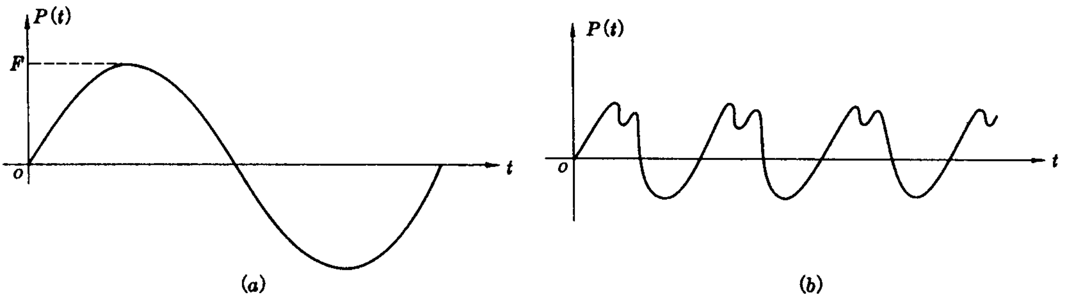


图 1.1　周期荷载

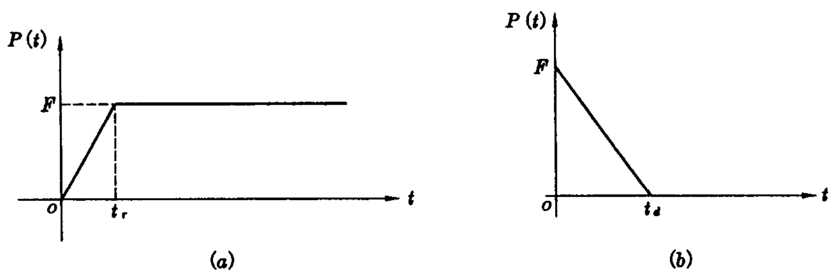


图 1.2　冲击荷载

这类荷载在很短的时间内，荷载值急剧增大（图 1.2(a)）或急剧减小（图 1.2(b)）。各种爆炸荷载属于这一类。

前面两类荷载都属于确定性荷载，任一时刻的荷载值都是事先确定的，可以用确定的函数来描述。这种荷载作用于结构时，若给定了初始条件，结构在某时刻的动力反应是唯一确定的。

第三类是随机荷载。如果荷载在将来任一时刻的数值无法事先确定，则称为非确定性荷载，或称为随机荷载。地震荷载和风荷载是随机荷载的典型例子。图 1.3 所示为地震时地面加速度 $\ddot{u}(t)$ 记录的一个例子。

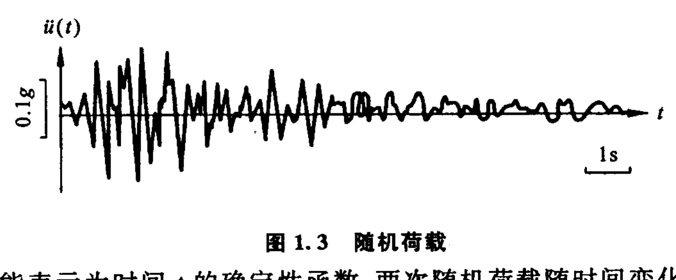


图 1.3　随机荷载

随机荷载不能表示为时间 t 的确定性函数，两次随机荷载随时间变化的过程也不会重现同一波形。随机荷载受统计规律的制约，要用概率统计的方法来研究，以保证结构的安全。

本书只讨论在确定性荷载作用下结构的动力反应计算。关于在随机荷载作用下结构的随机振动问题，可参考有关专著。

1.3 体系的动力自由度

与静力计算一样，在动力计算中也需要事先选取一个合理的计算简图。两者选取的原则基本相同，但在动力计算中，由于要考虑惯性力的作用，动力计算简图还需考虑质量的分布，因此需要研究质量在运动过程中的自由度问题。

在动力计算中，一个体系的自由度是指为了确定运动过程中任一时刻全部质量的位置所需独立几何参数的数目。由于实际结构的质量都是连续分布的，因此任何一个实际结构都可以说具有无限个自由度。但是如果所有结构都按无限自由度去计算，则不仅十分困难，而且也没有必要。因此，通常需对计算方法加以简化。常用的简化方法有下列三种。

(1)集中质量法

把连续分布的质量集中为几个质点或质块，这样就可以把一个本来是无限自由度的问题简化成为有限自由度的问题。下面举例加以说明。

图 1.4(a)所示为一简支梁，跨中放有重物 W。当梁本身质量远小于重物的质量时，可取图 1.4(b)所示的计算简图，即梁可视为无质量的弹性杆。因为重物质量的尺寸与跨度相比很小，惯性力偶对动力分析的影响很小，可以略去，故只需考虑惯性力的影响。这样就可以将质量看成质点，这时体系由无限自由度简化为一个自由度。

图 1.4 有重物梁的质量集中

有时梁上并无较重的集中质块，但为了得到近似解，也可以沿梁轴线将分布质量分段集中，使梁简化为有限自由度。图 1.5(a)所示具有均布质量的梁，分别将梁分为二等段、三等段、四等段，每分段分布质量按杠杆原理换成位于两端的集中质量，这时体系分别简化为具有一、二、三个自由度，如图 1.5(b)、(c)、(d)所示。具有分布质量的梁、拱、刚架、桥架等各类结构，均可用此方法简化为一、二、三……个自由度。

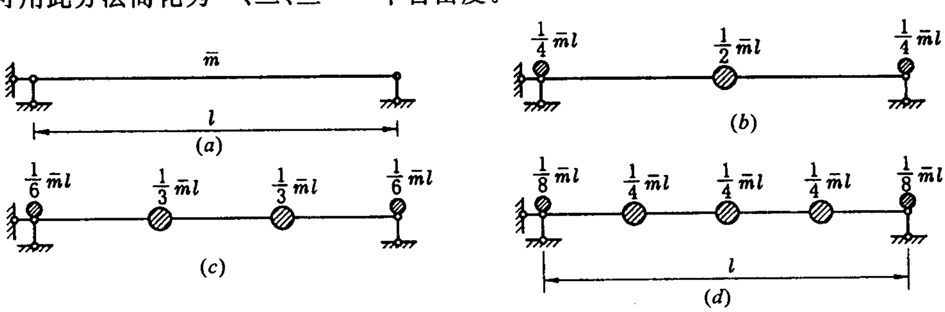


图 1.5 均布质量梁的质量集中

图 1.6(a)所示为一个三层平面刚架。计算刚架的侧向振动时，一种常用的简化方法是将柱的分布质量简化为作用于柱上、下两端(即横梁处)的集中质量，因而刚架的全部质量都作用在横梁上；此外，因为不计杆件轴向变形，每个横梁上各点的水平位移可以认为彼此相等，因而

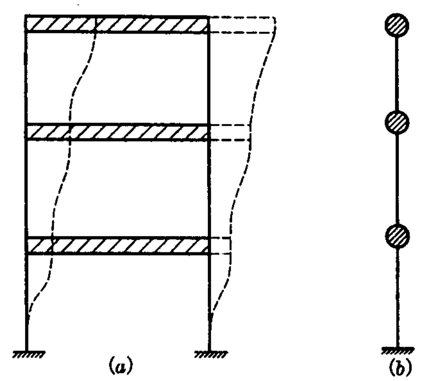


图 1.6　刚架的集中质量

横梁上的分布质量(连同柱分过来的集中质量)可用一个质量来替代。最后,可取图 1.6(*b*)所示的计算简图,只有三个自由度。

图 1.7(*a*)所示为一块形基础,计算时可简化为一刚性质块。当考虑基础在平面内的振动时,体系共有三个自由度,包括水平位移 x、竖向位移 y 和角位移 φ(图 1.7(*b*))。当仅考虑基础在竖直方向的振动时,则体系为单自由度(图 1.7(*c*))。

由图 1.7 看出,自由度数与集中质量的个数并不一定彼此相等。关于这一点,还可参看图 1.8 所示的例子。这里虽然只有一个集中质量,但共有两个自由度(质量的位置需用两个参数 x、y 才能确定)。

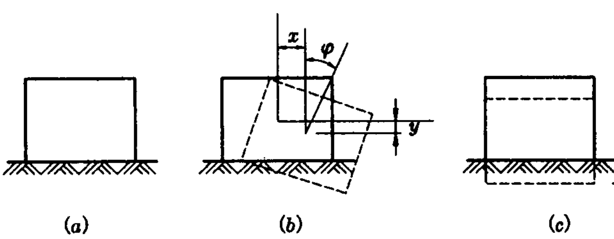


图 1.7　块形质量的自由度

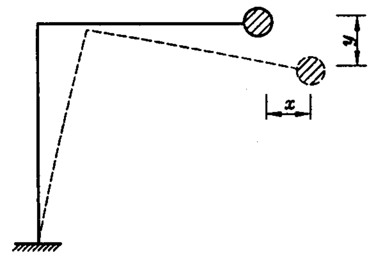


图 1.8　一个质点、两个自由度

(2)广义坐标法

具有分布质量的简支梁的挠度曲线可以用三角级数来表示:

$$y(x)=\sum_{k=1}^{n}a_k\sin\frac{k\pi x}{l}\tag{1.1}$$

这里 $\sin\dfrac{k\pi x}{l}$ 是一组给定的函数,可叫作形状函数;a_k 是一组待定参数,叫作广义坐标。当形状函数选定之后,梁的挠度曲线 $y(x)$ 即由 n 个广义坐标 a_1、a_2、…、a_n 所确定。这时简支梁被简化为 n 个自由度的体系。

图 1.9 所示为一具有分布质量的烟筒,本来是一个具有无限自由度的体系。利用广义坐标法,同样可把它简化为只具有 n 个自由度的体系。为此可根据位移边界条件选定 n 个形状函数 $\varphi_1(x)$、$\varphi_2(x)$、…、$\varphi_n(x)$,再引进 n 个广义坐标 a_1、a_2、…、a_n,可将结构的位移曲线表示为 n 个形状函数与广义坐标乘积的总和:

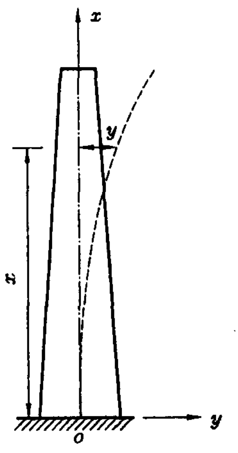
$$y(x)=\sum_{k=1}^{n}a_k\varphi_k(x)\tag{1.2}$$

通过上式,体系的自由度即由无限个减至 n 个。

(3)有限元法

有限元法可看作广义坐标法的一种特殊应用。现以图 1.10(*a*)所示两端固定梁为例作简要说明。

①把结构分为若干单元,在图 1.10(*a*)中,梁分为 5 个单元。



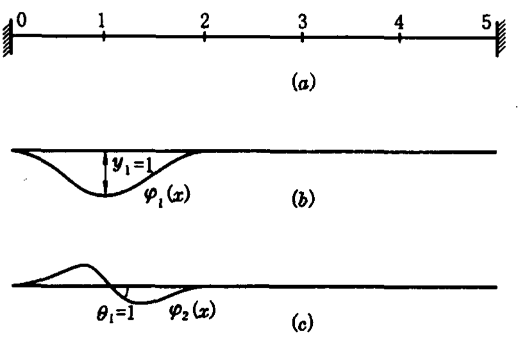


图 1.9 广义坐标法

图 1.10 有限元法

②取结点位移参数(挠度 y 和转角 θ)作为广义坐标,在图 1.10(a)中,取中间 4 个结点的 8 个位移参数 y_1、θ_1、y_2、θ_2、y_3、θ_3、y_4、θ_4 作广义坐标。

③每个结点位移参数只在相邻两个单元内引起挠度。在图 1.10(b)和(c)中分别给出结点位移参数 y_1 和 θ_1 相应的形状函数 $\varphi_1(x)$和 $\varphi_2(x)$。

④仿照式(1.2),梁的挠度可用 8 个广义坐标及其形状函数表示如下:

$$y(x) = y_1\varphi_1(x) + \theta_1\varphi_2(x) + \cdots + \theta_4\varphi_8(x) \tag{1.3}$$

通过以上步骤,梁即转化为具有 8 个自由度的体系。可以看出,有限元法综合了集中质量法和广义坐标法的某些特点。

最后指出,这里的自由度概念与结构组成分析中的自由度概念既有共同处又有不同处。共同的地方是,它们都是表明体系运动形式的独立参数的个数;不同的地方是,结构组成分析中讨论的是刚体体系的运动自由度,这里讨论的是变形体体系中质量的运动自由度。

1.4 体系振动时能量的耗散与阻尼力

实际结构在自由振动时有衰减现象,振幅随时间逐渐减小,最后趋于静止;在强迫振动时,外荷载需对结构不断做功,才能维持振幅不变(稳态振动)。这都表明在振动过程中会产生能量的耗散。这种消耗振动能量并使振动衰减的因素,称为阻尼。在动力计算时,要先建立结构的振动方程,为了能反映振动过程中的能量耗散,在建立方程时须引入一个造成能量耗散的阻尼力。

振动中的阻尼力有多种来源,例如振动过程中结构与支承之间的摩擦、材料之间的内摩擦、周围介质的阻力等等。影响阻尼力的因素很多,要找出一种完善的、可以反映各种结构中阻尼作用的理论也很困难,故目前多采用一些相当简化的阻尼模型。

阻尼力对质点运动起阻碍作用。从方向上看,它总是与质点的速度方向相反。从数值上看,它与质点速度有如下的关系:

(1)阻尼力与质点速度成正比,这种阻尼力比较常见,称做粘滞阻尼力。

(2)阻尼力与质点速度的平方成正比,固体在流体中运动时受到的阻力属于这一类。

(3)阻尼力的大小与质点速度无关,摩擦力属于这一类。

在上述几种阻尼力中,粘滞阻尼力的分析比较简便,其他类型的阻尼力也可简化为等效粘滞阻尼力来分析(见后面的讨论)。因此,本书只讨论粘滞阻尼力的情形。

1.5　建立振动方程的方法

动力问题主要是求出位移(或位移参数)随时间变化的反应。描述动力位移的数学表达式称为结构的振动方程,它的解就给出了位移随时间变化的过程。建立振动方程常用的方法有四种,分别介绍如下。

(1)动力平衡法

此法也称为达朗伯(d'Alembert)原理的直接平衡法。根据牛顿第二运动定律,任何质量 m 的动量的变化率等于作用在这个质量上的力

$$F=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(m\,\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}\right)$$

式中 y 为动位移。若 m 不随时间变化,上式可写成

$$F-m\ddot{y}=0 \tag{1.4}$$

式中用上部的圆点表示对时间的导数(以后均如此,不再说明)。式中第二项($-m\ddot{y}$)称为质量 m 的惯性力,与加速度 $\ddot{y}$ 成正比,但方向相反(前面用负号表示)。第一项 F 可以认为是作用在质量上的力。

质量所产生的惯性力,与它的加速度成正比,但方向相反。这个概念称做达朗伯原理。由此可以看出,式(1.4)这个运动方程的表达式,在引入达朗伯原理(即引入惯性力)后,与静力学中平衡方程的表达式相似,即作用于质量上所有的力保持平衡。自然,这是一种瞬时状态的平衡,故常称此法为“动静法”。

因此,在引入质量的惯性力后,振动方程的表达式可以表示为作用于质量上的所有力的平衡表达式。本方法的优点是物理概念清楚,形象鲜明。凡是熟悉静力问题的读者,用此方法列振动方程均不会有太大的困难。在许多简单问题中,本方法是最直接、也最方便的建立振动方程的方法。缺点是解决复杂问题时困难较大,且不便用它来推证某些结论(如与能量有关的问题)。

(2)虚功法

当结构比较复杂,如所包含的各种力可以容易地用位移自由度来表示,而它们的平衡规律可能不清楚或很复杂。此时,运用基于虚位移原理的虚功法来建立运动方程就较方便。

虚位移原理可表达如下:一个平衡体系在一组力的作用下发生虚位移(体系约束所允许的任何微小位移),则这些力所做的总虚功等于0。按此原理,虚位移时所做的总虚功为0是与平衡条件等价的。在建立体系的方程时,先确定作用于质量上的所有力,包括惯性力;然后引入相应于每个自由度的虚位移,并使所做总虚功等于0,从而得出振动方程。

此方法的优点是:适应性强,可用它推出运动的普遍规律;虚功为标量,可以按照代数规则计算,避免复杂的矢量计算。缺点是较为抽象。

(3)变分法

用基于哈密顿(Hamilton)原理以变分形式表示的能量关系来建立动力平衡方程。哈密

顿原理可以表达为

$$\int_{t_1}^{t_2} \delta(T-V)\,\mathrm{d}t + \int_{t_1}^{t_2} \delta W_{\mathrm{nc}}\,\mathrm{d}t = 0 \tag{1.5}$$

式中，T 为体系的总动能；V 为体系的势能，包括应变能及任何保守外力的势能；W_{nc}为作用于体系上的非保守力(包括阻尼力及任意外荷载)所做的功；δ 为在指定时间区间内所取的变分。

哈密顿原理表明，在任何时间区间 t_1 到 t_2 内，动能和势能的变分加上所考虑的非保守力所做的功的变分必须等于 0。应用这个原理可以直接导出任何体系的振动方程。这个方法和虚功法的区别是：此法中，不明显使用惯性力和弹性力，而是用动能和势能的变分项来代替。因此，其优点是只和纯粹的标量(即能量)有关；而在虚功法中，用来计算功的力和位移都是矢量。

(4)能量法

基于能量守恒原理的能量法，不仅可以用来建立体系的振动方程，而且可以用来直接计算体系的自振频率。

本书中主要用动力平衡法和能量法，也介绍一些虚功法和变分法，对它们想有深入了解的读者，可参阅有关专著。

思 考 题

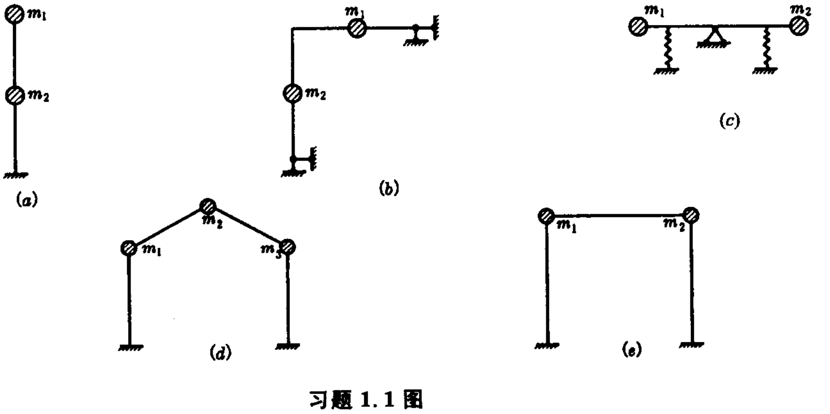
1.1　结构动力计算与静力计算的主要区别是什么?

1.2　本章自由度概念与结构静力学中结构组成分析中的自由度概念有何异同?

1.3　采用集中质量法和广义坐标法都可以使无限自由度体系简化为有限自由度体系，它们所采用的方法有何不同?

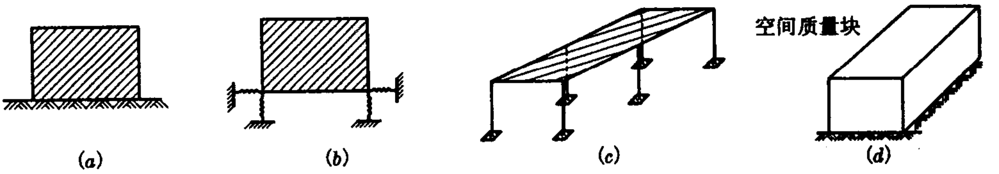
习　题

1.1　指出题图所示体系各为几个自由度?



习题 1.1 图

1.2　题图所示结构各有几个自由度？并写出其位移参数。



习题 1.2 图

2 单自由度体系的振动

单自由度体系的动力分析虽然比较简单，但是非常重要。这是因为：第一，很多实际的动力问题常可按单自由度体系进行计算，或进行初步的估算；第二，单自由度体系的动力分析是多自由度体系动力分析的基础，只有牢固地打好这个基础，才能顺利地学习后面的内容。

2.1 振动方程的建立

2.1.1 动力平衡法

现结合图 2.1 讨论单自由度体系振动方程的建立。

在图 2.1(a)所示的悬臂立柱顶部有一重物，质量为 m。设柱本身的质量比 m 小得多，可以忽略不计。因此，体系只有一个自由度。由于动荷载 $P(t)$的作用，质点 m 离开了静止平衡位置，产生了振动，在任一时刻 t，质点的水平位移为 $y(t)$。

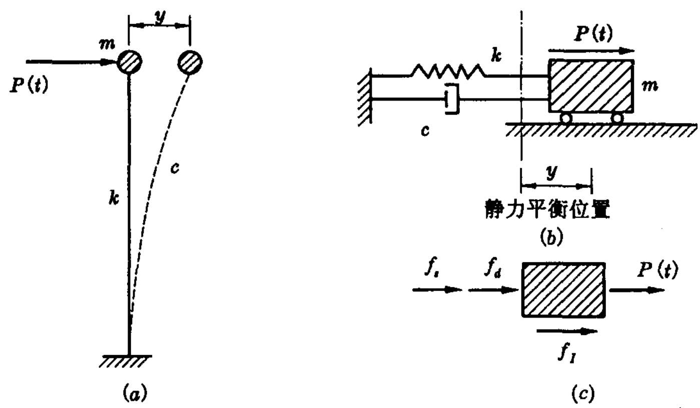


图 2.1 单自由度体系的振动

通常建立振动方程时，是把图 2.1(a)中的体系用图 2.1(b)所示的弹簧模型来表示。原来由立柱对质量 m 所提供的弹性力这里改用弹簧来提供。因此，应使弹簧的刚度系数 k(使弹簧伸长单位距离时所需施加的拉力)与立柱的刚度系数(使柱顶产生单位水平位移时在柱顶所需施加的水平力)相等。体系的阻尼性质图中用阻尼减震器 C 表示，阻尼常数为 c。

取质量 m 作隔离体，如图 2.1(c)所示。隔离体所受的力有下列四种：

(1)弹性恢复力，$f_s=-ky$，与位移 y 的方向相反；

(2)阻尼力，$f_d=-c\dot{y}$，与速度 $\dot{y}$ 的方向相反；

(3)惯性力，$f_I=-m\ddot{y}$，与加速度 $\ddot{y}$ 的方向相反；

(4)动荷载，$P(t)$。

图 2.1(c)中，位移、速度、加速度和动荷载均以向右为正方向。

根据动平衡条件，可列出隔离体的平衡方程如下：

$$m\ddot{y}+c\dot{y}+ky=P(t) \tag{2.1}$$

这就是从力系平衡角度建立的振动微分方程。这种推导方法叫作刚度法。

另一方面，振动微分方程也可从位移协调角度来推导。利用达朗伯原理，将图 2.1(a)所示体系在动荷载 $P(t)$、惯性力 $f_I=-m\ddot{y}$ 和阻尼力 $f_d=-c\dot{y}$ 共同作用下，质量 m 的位移可表示为

$$y=[P(t)+f_I+f_d]\delta=[P(t)-m\ddot{y}-c\dot{y}]\delta \tag{a}$$

式中，用 δ 表示弹簧的柔度系数，即在单位力作用下所产生的位移，式(a)表明：质量 m 在运动过程中任一时刻的位移等于在当时动荷载、惯性力和阻尼力共同作用下的静力位移。

因为体系柔度系数 δ 与刚度系数 k 互为倒数，即

$$\delta=\frac{1}{k} \tag{b}$$

将式(b)代入式(a)，整理后仍得到式(2.1)。这里是从位移协调的角度建立的振动微分方程。这种推导方法叫作柔度法。

下面讨论重力对振动方程的影响。

先看质量沿水平方向振动的情况(图 2.1)。这时质量 m 虽然有重力 $W=mg$ 作用(g 是重力加速度)，但由于重力方向与振动方向彼此垂直，故重力对振动无影响。

再看质量沿竖直方向振动的情况。为此，将图 2.1(a)所示的悬臂立柱改成图 2.2(a)所示的悬臂横梁(相应的弹簧模型如图 2.2(b)所示)。这时重力方向与振动方向彼此平行，重力对振动的影响需要作进一步讨论。

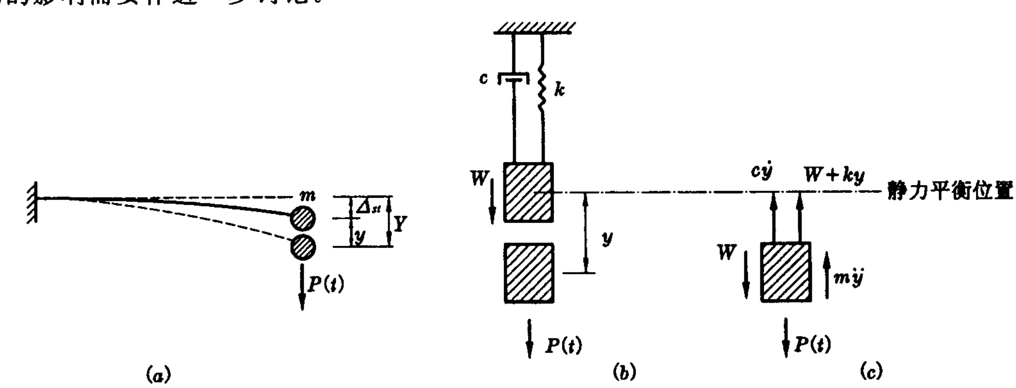


图 2.2 重力对振动方程的影响

我们把质量 m 的总位移 Y 分解为两部分(图 2.2(a))：

$$Y=\Delta_{st}+y \tag{c}$$

其中 Δ_{st} 是由重力 W 产生的静力位移(注意：Δ_{st} 是不随时间变化的)，即：

$$\Delta_{st}=W\delta,\quad W=k\Delta_{st} \tag{d}$$

y 是附加的动力位移，由静力平衡位置量起。

仍取质量 m 作隔离体(图 2.2(c))，隔离体所受的力有下列几种：

(1)弹性力 $f_s=-kY=-k(\Delta_{st}+y)=-(W+ky)$；

(2)阻尼力 $f_d=-c\dot{Y}=-c\dot{y}$