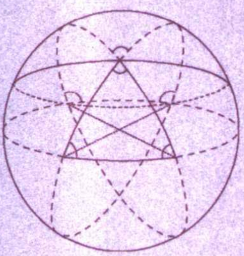
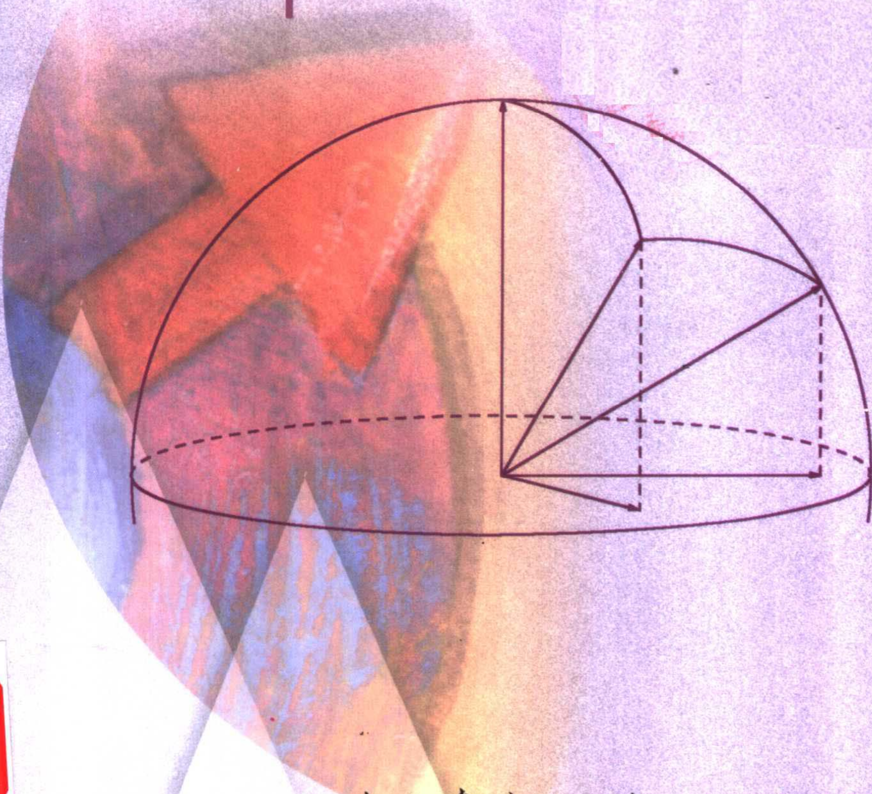
基础数学讲义丛书



基础几何学

项武义 著



人民教育出版社

[illegible]几何学

基础数学讲义丛书

基础几何学

项武义 著

人民教育出版社
·北京·

图书在版编目（CIP）数据

基础几何学/项武义主编．—北京：人民教育出版社，2004
（基础数学讲义；2）
ISBN 7－107－17680－3

Ⅰ．基…
Ⅱ．项…
Ⅲ．几何课—中学—教学参考资料
Ⅳ．G634.633

中国版本图书馆 CIP 数据核字（2004）第 051412 号

人民教育出版社出版发行
（北京沙滩后街 55 号　邮编：100009）
网址：http://www.pep.com.cn
人民教育出版社印刷厂印装　全国新华书店经销
2004 年 9 月第 1 版　2004 年 9 月第 1 次印刷
开本：890 毫米×1 240 毫米　1/32　印张：8.875
字数：170 千字　印数：0 001～3 000 册
定价：15.70 元

目录

引 言

空间的基本概念与基本结构

几何学是人类理性文明，对于我们和大自然中的万物万象共存于其中的空间的“认识论”. 宇宙中的所有事物皆存在于其中、发生于其内，当然也永远受着空间本质的制约与蕴育. 几何学的课题也就是去研究、理解空间的本质，它是我们研究大自然、理解大自然的自然起点和基石所在；它也是整个自然科学的启蒙者和奠基者，是理所当然的第一科学. 不论在自然科学的发展顺序上，还是在全局的基本重要性上，几何学都是当之无愧的先行者与奠基者，也是种种科学思想和方法论的自然发祥地. 它源远流长，历经数千年世代相承精益求精的研究和逐步逐阶的进展，至今依然根深干粗，蓬勃拙壮. 在现今廿一世纪，它会继续是开拓新知的有力工具，而自然科学的拓展又必然对于空间几何学的理解深度和广度提出新的要求和问题. 总之自然科学和几何学的进

展是密切相关、相辅相成的．伽利略 (Galileo) 曾说："上帝必定是一个几何学家 (God must be a geometer)．" 其所指也许就是上述自然科学和几何学之间的自然结合.

自古到今，几何学的研究在方法论上大体可以划分成下述几个阶段.

(1) **实验几何**：用归纳实验去发现空间之本质.

(2) **推理几何**：以实验几何之所得为基础，改用演绎法，以逻辑推理去探索新知，并对于已知的各种各样空间本质，精益求精地作系统化和深刻的分析．在这方面，古希腊文明获得了辉煌的成就，它也是全人类理性文明中的重大篇章.

(3) **坐标解析几何**：笛卡儿 (Descartes) 和费马 (Fermat) 通过坐标系的建立，把当代数学中的两大主角——几何学和代数学——简明有力地结合起来，开创了近代数学的先河．其自然而然的结果是微积分的产生和大量地运用解析法研究自然现象.

(4) **向量几何**：从现代的观点来看， 空间最为根本而且控制全局的本质乃是由它的所有保长变换所构成的变换群 (transformation group)，通常又称之为 3 维的欧氏群 (Euclidean group of $\mathbf{E}^3$)，而几何学所研究的就是这个变换群的不变量理论 (invariant theory)．因为所有几何量都根源于长度，所以必然在保长变换之下保持不变；反之，任何在保长变换群的作用之下保持不变的量（即不变量 — invariants）也都具有几何意义，而且也一定根源于长度．向量几何在本质上是坐标解析几何的返璞归真，它

的最大优越性在于向量运算的正交不变性 (orthogonal invariance). 可以说, 向量几何是不依赖于坐标系的解析几何 (coordinate-free analytical geometry), 它自然而然地化解了原先在坐标解析几何中，由坐标系的选取所引入的各种各样(非几何的)非不变量的困扰！Hamilton 和 Grassmann 分别是 3 维和高维的向量代数的创始者.

§0.1 基本概念和基本结构

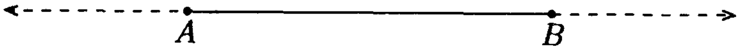
位置 (location) 是空间的基本概念之中最为原始的. 空间本身其实就是宇宙之中所有可能的位置的总体. 在几何学的讨论中，通常用点 (point) 来标记位置，所以点其实就是位置的抽象化 (abstraction). 当一个动点 (moving point) 由一个位置移动到另一位置, 其所经过的点组成这个运动的通路 (path). 连结于空间各地之间的通路则是空间基本概念中第二个最原始者. 再者，光线的普遍存在和我们的视觉很自然地启示我们, 并促使我们认识到空间的基本结构乃是:

"连结给定两点之间的所有通路之中，有且仅有一条最短通路——它就是连结两点的直线段."

这也就是在我们日常生活的大气层内，或者在太空中，光由一点射向另一点所经过的通路，即我们常见的光线 (light rays). 再者，我们日常的经验是：若不受阻碍，光线是会一直向前无限延伸的. 射线 (ray) 这个基本几何概念就是上述这种可以无限向前延伸的光线的抽象化, 而空间中给定相异两点 $\{A, B\}$ 所确定的直线则是由 A 射向 B 的射线和由

B 射向 A 的射线的并集 (union)．总结上述的讨论，空间的基本结构可以描述如下：

【基本几何结构】对于空间给定相异两点 $\{A, B\}$ 存在有唯一一条连结 A, B 的最短通路，称之为连结 A, B 的 **直线段** (interval)，将以符号 $\overline{AB}$ 表示之. 再者由 A 到 B 的最短通路可以向前无限延伸，称之为由 A 射向 B 的 **射线**，将以符号 $\overrightarrow{AB}$ 表示之. 而该线段向两端无限延伸的通路，即 $\overrightarrow{AB} \cup \overrightarrow{BA}$, 则称之为由 $\{A, B\}$ 所唯一确定的 **直线** (straight line)，将以符号 AB 表示之.



[图 0–1]

[注] 点是最为原始的几何事物 (geometric object)，所有其他的几何事物都是由点组合而成的. 直线段和直线则是第二种最为原始的几何事物，所有其他的几何结构和性质都是由它们所表达的基本结构来刻划和表述的. 直线和直线段之间，显然有下述基本关系.

直线上的次序与分隔：

(i) $\overline{AB}$ 是 AB 的一个子集. 若 $C \in \overline{AB}$ 而且 $C \neq A$ 或 B, 则称 C 位于 A, B 之间. 再者，若 $C, D \in \overline{AB}$ 则 $\overline{CD} \subseteq \overline{AB}$.

(ii) 直线 ℓ 上任给一点 P 把直线 ℓ 分割成两段，称为 P 的两侧. 属于同侧的两点 A_1, A_2 其直线段 $\overline{A_1A_2}$ 不包含 P；而属于异侧的两点 A, B 其直线段 $\overline{AB}$ 则包含 P.

设 $\{A,B,C\}$ 是 $\ell\setminus\{P\}$ 中的相异三点，而且 $P\in\overline{AB}$，则 $\overline{AC}$ 和 $\overline{BC}$ 中有一且仅有一包含 P. 再者，由相异两点确定一直线段（或一直线）这种空间基本结构，就可以自然地定义下述两种子集.

【定义】空间中的子集 $\mathcal{S}$ 若满足性质：

$$\text{若 } A,B\in\mathcal{S},\ A\neq B \quad \text{则} \quad \overline{AB}\subset\mathcal{S},$$

则称 $\mathcal{S}$ 为一个 **凸子集** (convex subset) .

【定义】空间中的子集 $\mathcal{S}$ 若满足性质：

$$\text{若 } A,B\in\mathcal{S},\ A\neq B \quad \text{则} \quad AB\subset\mathcal{S},$$

则称 $\mathcal{S}$ 为一个 **平直子集** (straight or rectilinear subset) .

显然，所有平直子集也都是凸子集. 但是，反之则不然. 例如直线段 $\overline{AB}$ 是一个凸子集，但是它并非平直子集，而直线 AB 本身则当然是一个平直子集和凸子集.

再者，由上述定义，易见凸子集的交集 (intersection) 还是凸子集，平直子集的交集还是平直子集. 由此可见，对于空间给定的点集 $\mathcal{S}$，在所有包含 $\mathcal{S}$ 的凸子集之中有一个唯一的最小者，它其实就是所有包含 $\mathcal{S}$ 的凸子集的交集，通常叫做 $\mathcal{S}$ 的 **凸包** (convex hull of $\mathcal{S}$) ，记作 $C(\mathcal{S})$. 同样地，所有包含 $\mathcal{S}$ 的平直子集的交集乃是包含 $\mathcal{S}$ 的平直子集中的最小者，通常叫做 **由 $\mathcal{S}$ 所张成的平直子集** (the rectilinear subset spanned by $\mathcal{S}$) ，记作 $<\mathcal{S}>$.

[注意]　我们将把空集合 ϕ 和单点集合 $\{P\}$ 想成凸子

集和平直子集的特例．(因为它们根本不会含有相异两点，所以其检验条件无从用起！)

【例】

(1) 当 $\mathcal{S}=\{A\}$ 只含有单个点时，则

$$C(\{A\})=\{A\},\quad <\{A\}>=\{A\}.$$

(2) 当 $\mathcal{S}=\{A,B\}$ 是由相异两点组成时，则

$$C(\{A,B\})=\overline{AB},\quad <\{A,B\}>=AB.$$

(3) 当 $\mathcal{S}=\{A,B,C\}$ 而且 A,B,C 不共线时，则

$$C(\{A,B,C\})=\triangle ABC,$$

$<\{A,B,C\}>$ 是由不共线三点所张的平面.

(4) 当 $\mathcal{S}=\{A,B,C,D\}$ 是由不共面四点所组成时，则 $C(\{A,B,C,D\})$ 是以 A,B,C,D 为其顶点的四面体，它的四个面是 $\triangle ABC,\triangle BCD,\triangle CDA$ 和 $\triangle DAB$，而其所张的平直子集是全空间！

$$<\{A,B,C,D\}>=\text{全空间}.$$

所以空间中的平直子集只有五种，即空集合 ϕ，单点子集 $\{P\}$，直线，平面和全空间.

由此可见，平面是仅次于全空间的平直子集，它是一种介于直线和全空间之间，而又具有直线段和直线这种空间基本结构的子空间．所以，平面是一种既比空间简单而又具有空间基本结构的几何结构．平面几何学的课题就是研究平面上所具有的空间基本结构和所反映的各种性质．它是进而研究空间（立体）几何学的自然而且非常理想的中途站.

平面上的次序与分隔

类似于点和直线之间的关系，在平面 Π 中的任给一条直线 ℓ 也把平面 Π 切成两部分，称之为 ℓ 的两侧. 居于同侧的两点 A_1, A_2，其直线段 $\overline{A_1A_2}$ 和 ℓ 不相交；而居于异侧的两点 A, B，其直线段 $\overline{AB}$ 和 ℓ 相交. 设 $\{A,B,C\}$ 是 $\Pi\setminus\ell$ 中的相异三点，而且 $\overline{AB}\cap\ell\neq\phi$，则 $\overline{AC}\cap\ell$ 和 $\overline{BC}\cap\ell$ 之中有一且仅有一为非空.

上面所讨论的是平面在连结（即 $\{A,B\}\to\overline{AB}$ 和 AB）和次序分隔上的基本结构和基本性质. 现在让我们再来探讨平面在这种基础之上所具有的进一层的本质和基本性质，例如常见常用的长度、角度、大小、形状等等.

由平面的分隔，即一个平面 Π 被其上的一条直线分割成两个半面，即 $\Pi\setminus\ell=H_\ell^+\cup H_\ell^-$，我们将称之为对于 ℓ 的两个 **开半面** (open half-plane with respect to ℓ)，而 $H_\ell^+\cup\ell$ 和 $H_\ell^-\cup\ell$ 则称之为对于 ℓ 的 **闭半面** (close half-plane with respect to ℓ)，易证它们都是凸子集.（证明留作习题）

设 A,B,C 是不共线三点，Π 是其所张的平面. 令

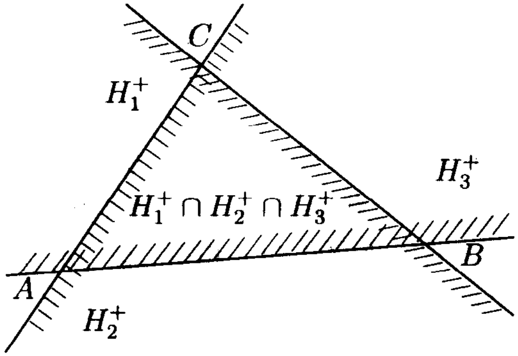
H_1^+ 是对于直线 BC 的闭半面而且含有 A 点；

H_2^+ 是对于直线 CA 的闭半面而且含有 B 点；

H_3^+ 是对于直线 AB 的闭半面而且含有 C 点，

则凸子集 $H_1^+\cap H_2^+\cap H_3^+$（如 [图 0–2] 所示）是一个以 A, B, C 为其顶点的三角形，通常以 $\triangle ABC$ 表示之.

（习题：试证它正是 $\{A,B,C\}$ 的凸包.）



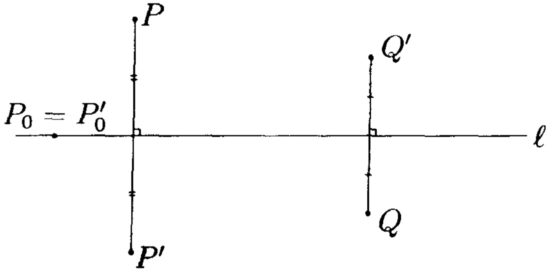
[图 0–2]

在几何学的研究中，三角形是仅次于直线段和直线的基本几何图形，而空间的大部分基本性质都已经在三角形的几何性质中充分体现. 三角形之所以成为古希腊几何学所研究的主角，其原因也就是：三角形既简单而又能充分反映空间的本质.

大体上来说，空间的本质最为基本者就是前面已经讨论的连结、分隔再加上对称性，平行性和连续性.

对称性

在平面几何的范畴中，平面对于其上每一条直线皆成反射对称. 用现代的术语来说，平面 Π 上 **对于直线 ℓ 的反射对称** 是一个从 Π 到 Π 的映射（也称为变换）$\mathfrak{R}_\ell : \Pi \to \Pi$，它把 ℓ 的点固定不动，把不在 ℓ 的点如 P 点映射到 P' 点，使得 $\overline{PP'}$ 和 ℓ 正交于 $\overline{PP'}$ 的中点，如 [图 0–3] 所示.

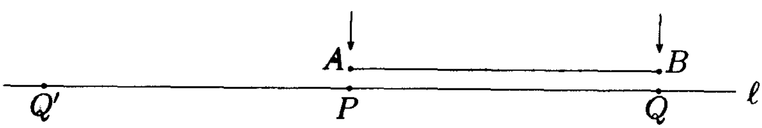


[图 0–3]

假如把一张纸想成是平面的局部，则在上述反射对称 $\mathfrak{R}_\ell$ 下相互对应的点 P, P' 也就是把纸张沿 ℓ 折叠时相互叠合的点. 而二个相互叠合的直线段(或角区)则显然是等长(或等角)的. 由此可见这种反射对称是一种保长、保角的变换.

[注] 古希腊的几何学家肯定是认识到上述反射对称性及其保长保角性的. 也许他们认为这种描述还不够初等，所以他们改用下述三条叠合公理来描述空间对称性这种本质.

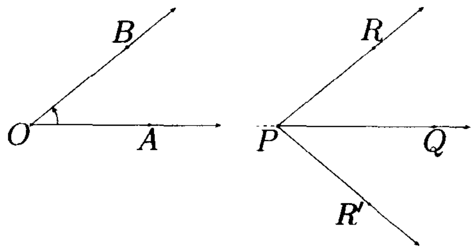
1. **直线段的叠合公理**： 设 $\overline{AB}$ 是一个给定直线段，P 是给定直线上一个给定点. 则在 P 的两侧各有唯一一点 Q, Q'，使得 $\overline{AB}$ 和 $\overline{PQ}, \overline{PQ'}$ 能够叠合，即等长.



[图 0–4]

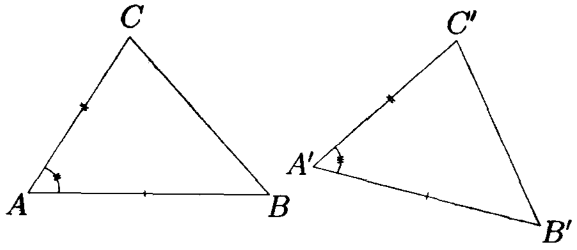
2. **角区的叠合公理**： 设 $\angle AOB$ 是一个给定角，$\overrightarrow{PQ}$ 是一个给定射线，则在直线 PQ 的两侧各有唯一的射线 $\overrightarrow{PR}$ 和 $\overrightarrow{PR'}$，使得 $\angle AOB$ 和 $\angle QPR$ 或 $\angle QPR'$ 能够叠

合，即等角.



[图 0–5]

3． **三角形的叠合公理**： 两个三角形 $\triangle ABC$ 和 $\triangle A'B'C'$ 能够相互叠合（也称之为全等）的充要条件是它有相应的两边及其夹角 (SAS) 能够彼此叠合（即对应等长和等角）.



[图 0–6]

例如 $\triangle ABC$ 和 $\triangle A'B'C'$ 之间有 $\overline{AB}$ 和 $\overline{A'B'}$ 等长，$\overline{AC}$ 和 $\overline{A'C'}$ 等长，而且 $\angle BAC$ 和 $\angle B'A'C'$ 等角；则必有 $\overline{BC}$ 和 $\overline{B'C'}$ 等长，$\angle ABC$ 和 $\angle A'B'C'$ 等角和 $\angle ACB$ 和 $\angle A'C'B'$ 等角.

[注] 上述三条叠合公理之中，第一条和第二条其实是用来确立等长和等角这两个基本概念，而第三条才真正反映空间对称性这种本质. 而且，人们用上述公理推导的第一个