



真正高考

精选典题 专家评析 闪电式提高

各个击破

圆100万学子清华北大梦!!

【审订】全国著名特高级教师

【主编】金 诚

打造学科 **状元**

数学 · 选择题专项训练

安徽人民出版社

真正高考 各个击破

语文 字词 语句 现代文阅读
文言文阅读 诗词鉴赏 写作

数学 函数 不等式 导数 三角函数与平面向量
直线与圆 圆锥曲线 立体几何与空间向量
数列与概率论 选择题专项训练

英语 语法 阅读理解(一) 阅读理解(二)
完型填空(一) 完型填空(二) 短文改错
书面表达 英语词汇必备

物理 力学 物理实验 电磁学 基础与理论

化学 概念与理论(选择题) 无机物
有机物 实验与计算

生物 生物(一) 生物(二)

政治 政治常识 经济常识 哲学常识

历史 中国古代史 中国近现代史 世界近现代史

地理 自然地理 人文地理 区域地理

ISBN 7-212-02826-6



9 787212 028268 >

ISBN 7-212-02826-6

定价:60.00 元(共六册)

真正高考

精选典题 专家评析 闪电式提高

各个击破

圆100万学子清华北大梦!!

主 编：金 诚

本册主编：方向前 崔北成

编 者：刘忠义 谢立行 高欣欣
杨伯章 张 炜 杜效琳

数学·选择题专项训练

安徽人民出版社

责任编辑:王世超 周子瑞

装帧设计:秦 超

图书在版编目(CIP)数据

真正高考·各个击破 数学:普通高考专题解读/金诚主编.
—合肥:安徽人民出版社,2006
ISBN 7-212-02826-6

I. 真… II. 金… III. 数学课—高中—升学参考资料
IV. G634

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2006)第 031012 号

真正高考·各个击破 数学·选择题专项训练 金 诚 主编

出版发行:安徽人民出版社

地 址:合肥市金寨路 381 号九州大厦 邮编:230063

经 销:新华书店

制 版:合肥市中旭制版有限责任公司

印 刷:合肥杏花印务有限公司

开 本:880×1230 1/32 印张:51 字数:150 万

版 次:2006 年 5 月第 1 版 2006 年 5 月第 1 次印刷

标准书号:ISBN 7-212-02826-6

定 价:60.00 元(共 6 册)

印 数:00001—15000

本版图书凡印刷、装订错误可及时向承印厂调换

前言

《真正高考》系列丛书之《数学》，按照国家最新考试大纲和最新教学大纲的要求编写，为便于教师指导、便于学生复习，均酌情按照知识的系统性编排。

全套书共分六册

第一册《选择题解法》

第二册《函数、不等式、导数》

第三册《三角函数与平面向量》

第四册《解析几何》

第五册《立体几何与空间向量》

第六册《数列、概率与统计》

栏目设置：

△考试内容及知识网络：展示在每一章之首，使学生明确本章要掌握的知识范围。

△考纲要求：依据新的考试说明，对每一小节提出高考的具体要求，使学生明确每个知识点应达到的水平。

△知识要点：使学生明确本节内容主要知识点，便于学生查阅与记忆。

△典例解析：分析典型例题，尽量覆盖知识点和解题技巧与方法，力求上升为数学思考和数学方法，精选与本节相关的近两、三年高考题进行重点解析、创新，力求自然消化。

△基础达标训练、能力提升训练：收集了典型、新颖、考查能力的部分试题，使学生通过解题训练理解知识，掌握方法，形成能力，为高考做好充分准备。

△本章测试：编写少而精，新而优的题目，对本章相关知识的掌握进行检测，便于查缺补漏，点点过关，步步为营。

本书在编写过程中尽量体现“一题多解”，“一法多用”注重对问题的点拨和解决问题后的点评，使学生能够学到举一反三和触类旁通的数学内容，努力体现化归数形结合，分类讨论，归纳猜想等数学的重要思想和方法，有助于学生把知识转化为能力，由能力上升为思想，重点突出，难点分散，便于学生的理解和掌握。

本书既适合高三学生专项强化使用，又适合于高中同步学习的强化及提高，是一本实用性的备考助学用书，尽管我们做了很大的努力，但由于客观条件所限，书中难免有疏漏不足之处，敬请广大读者批评指正。

编者

《真正高考》丛书编委会

数学	冷 凝	高 远	郭 颖	刘 方	夏 风	严 君	叶之冕	刘 笑	李秀兰
	张文娟	张国权	陈小燕	王文斌	王伟成	石志成	林 丹	黄志强	何中伟
	刘春祥	刘 燕	刘 笑	仁宋波	冯常贵	董春辉	高 洋	蒋文东	刘伯敏
	常中华	郑岩宏	陈正道	江萱滋	史松华	金 明	李秀清	彭海霞	刘 艳
数学	贺顺炳	汪小祥	方向前	崔北成	张劲松	邵乃军	王学亮	刘国权	刘忠义
	陈孝明	胡立清	赵小林	赵开宇	魏文涛	杜效琳	张 炜	张中德	康 轩
	林雪芬	黄成宇	文 华	杨广英	郭文海	郭小亮	杜艳秋	赵书岩	贾 亮
	于立人	张玉玲	傅永波	王潼章	江海洋	周志勇	孙正文	谢立行	高欣欣
	李玉强	崔文海	文 霞	孙道琦	杨伯章				
英语	陈效俊	郎明传	周正虎	滕兴会	周 艳	高青年	孙 风	王 颖	沈小杰
	汪六一	张 蕊	乔现会	高长才	周素梅	冯田宇	朱永琪	张 松	雪 梅
	刘文婷	程 艳	关 君	魏君雪	蒋 瑜	钟雪静	吴旭生	高立新	傅晓敏
	韩 雪	何正伟	马莉珍	冯国章	杨永波	屠国宝	陶佳君	孟淑芬	张京京
	曹雪静	林丹妮	刘利敏	吴会群	郑玉琴	谢巧婷	夏伯章	丁立华	
物理	钟传波	姚爱玲	孔荣富	宋翠珍	吴明麟	张正义	陈东盛	代京生	胡文海
	刘 红	季开明	崔秀清	郑秋生	吴对江	谢嘉利	张志毅	周道明	林 卓
	李 岩	赵治勇	李尚军	李红霞	于莉莉	张雪梅	罗艳宏	孙 涛	
化学	胡 诚	马 东	曹 强	杨 斌	洪 敏	徐善于	林海洋	孙志庆	陈正果
	朱伯川	张洪祥	张 磊	葛明青	咸洪亮	袁湘辉	孙立华	杨同喜	朱德江
	沈成伟	孟海洋	陶 亮	王立析	丁汝东	关少祥			
生物	韦宏军	杨光银	蔡文华	朱小平	罗一多	曹丽敏	卢 旺	刘培仁	孙 平
	张伯春	谢荣祥	李获初	高鸿章					
政治	汪 澜	张立新	吴德平	李鉴文	张文祥	邢东方	钱汝东	倪文强	杨国光
	宋志毅	赵小刚	王巧露	李海洋	黄鹏飞				
历史	徐汉平	高 峰	洪小阳	刘和清	浦家文	武吉华	裘卫东	刘 铎	曹 斌
	张晶晶	孙文芳	严瑞雪	杜永康	赵文蔚	汪晓明	傅立刚	高玉荣	谢凤兰
	耿雪艳	李文欣	张微微						
地理	刘永利	关 雪	周德刚	李文瑜	王书强	杨升宇	张振祥	郭 川	孙自强
	吴 倩	夏瑞雪	江维亮						

Contents

目录

数学选择题的解法 (001)

第一章 集合与简易逻辑

§1.1 集合 (007)

§1.2 绝对值不等式和一元二次
不等式的解法 (010)

§1.3 简易逻辑 (015)

答案与解析 (017)

第二章 函数

§2.1 函数的有关概念 (020)

§2.2 函数的定义域、值域及函数
解析式 (021)

§2.3 反函数 (026)

§2.4 函数的单调性与奇偶性 (028)

§2.5 指数与对数函数 (034)

§2.6 函数的图象 (040)

§2.7 函数的应用 (046)

答案与解析 (049)

第三章 数列

§3.1 数列 (054)

§3.2 等差数列 (057)

§3.3 等比数列 (062)

§3.4 数列的求和 (066)

答案与解析 (069)

第四章 三角函数

§4.1 任意角的三角函数 (074)

§4.2 同角三角函数的基本关系及
诱导公式 (077)

§4.3 两角和与差的三角函数 ... (080)

§4.4 二倍角的正弦、余弦、
正切 (083)

§4.5 三角函数的图象 (085)

§4.6 三角函数的性质 (088)

§4.7 三角函数的化简与求值 ... (092)

§4.8 三角函数最值 (094)

答案与解析 (096)

第五章 平面向量

§5.1 向量的概念与几何运算 ... (104)

§5.2 平面向量的坐标运算 ... (107)

§5.3 平面向量的数量积 (109)

§5.4 线段的定比分点与图形
的平移 (113)

§5.5 解斜三角形 (115)

答案与解析 (118)

第六章 不等式

§6.1 不等式的概念与性质 (121)

§6.2 算术平均数与几何平
均数 (123)

§6.3 不等式的证明 (127)

§6.4 不等式的解法 (131)

§6.5 含绝对值的不等式 (137)

答案与解析 (139)

第七章 直线与圆

§7.1 直线 (145)

§7.2 圆 (152)

答案与解析 (156)

Contents

目录

第八章 圆锥曲线

- §8.1 椭圆 (160)
- §8.2 双曲线 (164)
- §8.3 抛物线 (169)
- 答案与解析 (173)

第九章 平面、简单几何体

- §9.1 直线与平面 (178)
- §9.2 空间向量 (185)
- §9.3 简单几何体、球 (190)
- §9.4 空间角与距离 (197)
- 答案与解析 (204)

第十章 排列组合与概率

- §10.1 分类计数原理与分步计
 数原理 (212)
- §10.2 排列组合的基本问题 (214)
- §10.3 排列组合的综合应用 (218)
- §10.4 二项式定理及应用 (222)
- §10.5 随机事件的概率 (225)
- §10.6 互斥事件有一个发生
 的概率 (228)
- §10.7 相互独立事件同时发生的
 概率 (230)
- 答案与解析 (233)

第十一章 概率与统计

- §11.1 离散型随机变量的分
 布列 (239)
- §11.2 离散型随机变量的期望
 与方差 (241)
- §11.3 抽样方法与总体分布的
 估计 (244)
- §11.4 正态分布和线性回归 ... (247)
- 答案与解析 (250)

第十二章 极限

- §12.1 数学归纳法 (255)
- §12.2 数列与极限 (257)
- §12.3 函数的极限、连续性 ... (261)
- 答案与解析 (266)

第十三章 导数

- §13.1 导数的概念及运算 ... (269)
- §13.2 导数的应用 (271)
- 答案与解析 (274)

第十四章 复数

- §14.1 复数的有关概念 (277)
- §14.2 复数的四则运算 (279)
- 答案与解析 (281)



数学选择题的解法

选择题是考查学生基础知识和能力,以及分析问题和解决问题的思想方法的重要题型,由于题型小,考查角度灵活,涉及面广,因此经常作为巩固学生的基础知识和培养学生能力的重要工具。

一个数学选择题就是一组真假混杂的数学命题,选择题由题干和选择支(几个备选答案)两部分组成,题干加上正确的选择支构成真命题,题干加上错误的选择支构成假命题,错误的选择支称作干扰支,选择题的形式多种多样,当前数学高考采用四选一型单项选择题,它的主要特点是概括性、知识覆盖面广,小巧灵活,有一定综合性和深度、广度。

选择题的功能主要有:

1. 能在较大的知识范围内,实现对基础知识、基本技能和重要思想方法的考查。
2. 能比较确切地测试学生对概念、原理、性质、法则、定理和公式的深刻理解和灵活掌握程度。
3. 在一定程度上,能有效考查逻辑思维能力,运算能力、空间想像能力,以及灵活和综合地运用数学知识解决问题的能力。
4. 选择题还具有调节试卷布局、协调整卷难度、兼顾试卷容量的功效。

因此,无论是在起始年级基础知识的巩固深化与提高阶段,还是在毕业班系统复习、整合阶段,选择题都是巩固基础知识、提高学生能力的重要题型,都需要认真分析选择题的题型特点,寻找、总结解决这类问题的方法和技巧,先从基础知识、基本方法的角度,认识到题目的出题意图、考查目的之后,应力求做到“小题小做”,“小题巧做”,即充分利用选择题题型特点,抓住问题的实质,选择最优解法,由于选择题干和选择支两部分组成,所以这类题目的解法一般有两种思路:一是从题干出发考虑,探求结果;二是题干和选择支联合考虑,或从选择支出发探索是否满足题干条件,由于选择题给出了备选答案,又不要求写出解题过程,因此,出现了一些做选择题常用解法,如直接求解法、代入验证法、逻辑分析法、特殊化法、图像法、数形结合法和运动变化法等,以下分别作解释和示例。

一、直接求解法

即直接从题设条件出发,运用有关的概念、性质、公理、定理、法则等知识,选用恰当的解题方法,经过推理及合理简捷的运算得出结论,再对照各个选项作出判断,从中选出正确答案的方法叫“直接法”,直接法虽然和解答题的基本思路和方法一致,但由于选择题不要求书写解题过程,所以在求解过程中,在保证严谨、准确的前提下,适当加大跨度、简缩步骤、简化计算就是直接法解选择题的要诀,同时,所用的解题方法是否简捷,又会对解题能否做到“准确、迅速”产生重要影响,所以解题时,一定要深入分析,争取找到较简便的解法。



例1 已知数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_0=1, a_n=a_0+a_1+\dots+a_{n-1} (n \geq 1)$, 则当 $n \geq 1$ 时, $a_n =$ ()

- A. 2^n B. $\frac{1}{2}n(n+1)$ C. 2^{n-1} D. $2^n - 1$

解法一 由已知 $a_n=a_0+a_1+\dots+a_{n-1} (n \geq 1)$ 且 $a_0=1$, 得到 $a_1=a_0=1=2^{1-1}, a_2=a_0+a_1=2=2^{2-1}, a_3=a_0+a_1+a_2=4=2^{3-1}, a_4=a_0+a_1+a_2+a_3=8=2^{4-1}$. 由此猜想出 $a_n=2^{n-1} (n \geq 1)$. 故选 C.

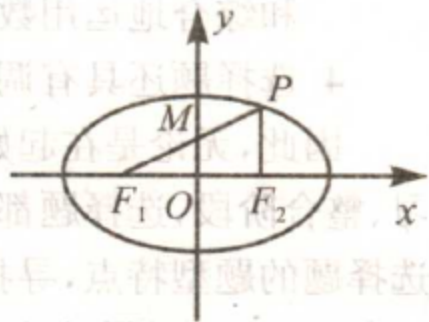
解法二 由 $a_n=a_0+a_1+\dots+a_{n-1} (n \geq 1)$, 得 $a_{n+1}=a_0+a_1+\dots+a_{n-1}+a_n$. $\therefore$ 两式相减得 $a_{n+1}-a_n=a_n, \therefore a_{n+1}=2a_n, \therefore \frac{a_{n+1}}{a_n}=2 (n \geq 1)$. $\therefore$ 该数列 $\{a_n\}$ 为一等比数列 $(n \geq 1)$, 其中 $a_1=a_0=1$. $\therefore$ 当 $n \geq 1$ 时, $a_n=2^{n-1}$. 故选 C.

例2 椭圆 $\frac{x^2}{12} + \frac{y^2}{3} = 1$ 的焦点为 F_1 和 F_2 , 点 P 在椭圆上. 如果线段 PF_1 的中点在 y 轴上, 那么 $|PF_1|$ 是 $|PF_2|$ 的 ()

- A. 7 倍 B. 5 倍 C. 4 倍 D. 3 倍

解法一 由题设椭圆方程可知长半轴长 $a=2\sqrt{3}$, 半焦距 $c=\sqrt{12-3}=3$, 可记焦点 $F_1(-3,0)$ 和 $F_2(3,0)$ (如图).

点 P 在椭圆上, 依题设 PF_1 的中点 M 在 y 轴上, 因为 O 是 F_1F_2 的中点, 故 $PF_2 \parallel OM$, 因此 $PF_2 \perp x$ 轴.



从而点 P 的坐标 (x,y) 满足 $\begin{cases} x=3 \\ y^2=3(1-\frac{x^2}{12}) \end{cases}, \therefore |PF_2|=|y|=\frac{\sqrt{3}}{2}$.

根据椭圆的几何定义, 知 $|PF_1|+|PF_2|=2a=4\sqrt{3}$.

$\therefore |PF_1|=\frac{7}{2}\sqrt{3}$, 即 $|PF_1|$ 是 $|PF_2|$ 的 7 倍. 故选 A.

解法二 依题设, 知椭圆的半焦距 $c=\sqrt{12-3}=3$, 记两焦点为 $F_1(-3,0)$ 和 $F_2(3,0)$, 点 P 的坐标为 (x,y) , 则 PF_1 的中点坐标为 $(\frac{x-3}{2}, \frac{y}{2})$.

依题意得 $\begin{cases} \frac{x^2}{12} + \frac{y^2}{3} = 1 \\ \frac{x-3}{2} = 0 \end{cases}, \therefore x=3, y=\pm\frac{\sqrt{3}}{2}$.

$|PF_1|=\sqrt{(x+3)^2+y^2}=\frac{7\sqrt{3}}{2}, |PF_2|=\sqrt{(x-3)^2+y^2}=\frac{\sqrt{3}}{2}$, 得 $\frac{|PF_1|}{|PF_2|}=7$.



● M, O 分别是 $PF_1F_1F_2$ 的中点,

所以 $MO \parallel PF_2$, 又 $MO \parallel F_1F_2$, 所以 $PF_2 \perp F_1F_2$,

得 $|PF_1|^2 - |PF_2|^2 = |F_1F_2|^2$;

依题设知椭圆半轴长 $a = \sqrt{12} = 2\sqrt{3}$, 半焦距 $c = \sqrt{12-3} = 3$,

所以得 $|F_1F_2| = 2c = 6$, 且 $|PF_1| + |PF_2| = 2a = 4\sqrt{3}$,

①

$$\therefore |PF_1| - |PF_2| = \frac{|F_1F_2|^2}{|PF_1| + |PF_2|} = 3\sqrt{3}.$$

②

联立①②两式解得 $|PF_2| = \frac{\sqrt{3}}{2}$, $|PF_1| = \frac{7\sqrt{3}}{2} = 7|PF_2|$.

● 直接法是解答数学选择题使用最多的方法, 而提高直接法解题能力的根本途径就是熟练掌握“三基”和提高数学的基本素养。

二、代入验证法

将所给选择支分别代入题设条件中去验证, 或将题设条件分别代入各选择支中验证, 以决定取舍, 由于答案的惟一性, 只需要验证出正确答案即可, 有时不必一一验证。

● 不等式 $\sqrt{1-x^2} < x+1$ 的解集是

()

A. $\{x | 0 < x \leq 1\}$

B. $\{x | x > 0\}$

C. $\{x | x > -1\}$

D. $\{x | -1 \leq x \leq 1\}$

● 可选特殊值 $x=10$ 代入, 则 $\sqrt{1-x^2}$ 无意义, 从而否定了 B、C 选项, 再取 $x=-1$, 则不等式为 $x < 0$ 不成立, 排除 D 选项. $\therefore$ 正确答案为 A.

● 不等式 $ax^2 + ax + b > 0$ ($a, b \in \mathbb{Z}$, 且 $a \neq 0$) 的解集是区间 $(-2, 1)$, 满足这个条件的绝对值最小的 a 和绝对值最小的 b 分别是

()

A. $a=1, b=-2$

B. $a=-1, b=2$

C. $a=1, b=2$

D. $a=-1, b=-2$

● 首先由二次不等式 $ax^2 + ax + b > 0$ 的解集为 $(-2, 1)$, 结合二次函数的图像易知, 必有 $a < 0$. 故可排除 A、C.

其次将 D: $a=-1, b=-2$ 代入不等式, 得 $-x^2 - x - 2 > 0$.

而该不等式可化为 $(x+1)^2 + 1 < 0$. 此不等式无解. 故 D 也被排除.

$\therefore$ 正确答案为 B.

三、逻辑分析法

通过观察和分析题干与选项之间的关系, 利用所学知识, 从逻辑推理的角度进行推断和选择, 从而否定干扰支, 肯定正确选项的方法叫逻辑分析法。

● 两名射手彼此相互独立地向同一目标各射击一次. 设甲射中的概率 $P(A) = 0.8$, 乙射中的概率 $P(B) = 0.9$, 则目标被击中的概率为

()

● 由对立事件概率求法可知



$$1 - P(\bar{A} \cdot \bar{B}) = 1 - P(\bar{A}) \cdot P(\bar{B}) = 1 - 0.2 \times 0.1 = 0.98$$

直接分析. 目标被击中包含三种情况: 甲中乙不中; 乙中甲不中, 甲、乙都中.

$$\begin{aligned} \therefore P(\bar{A} \cdot B) + P(A \cdot \bar{B}) + P(A \cdot B) &= P(\bar{A}) \cdot P(B) + P(A) \cdot P(\bar{B}) + P(A) \cdot P(B) \\ &= 0.2 \times 0.9 + 0.8 \times 0.1 + 0.8 \times 0.9 = 0.98. \end{aligned}$$

给出以下曲线.

$$\textcircled{1} 4x + 2y - 1 = 0 \quad \textcircled{2} x^2 + y^2 = 3 \quad \textcircled{3} \frac{x^2}{2} + y^2 = 1 \quad \textcircled{4} \frac{x^2}{2} - y^2 = 1$$

其中与直线 $y = -2x - 3$ 有交点的所有曲线是 ()

- A. ①③ B. ②④ C. ①②③ D. ②③④

选 D. 易知直线 $y = -2x - 3$ 与曲线①(直线)平行——没有交点. 所以可排除 A、C.

又注意到 B、D 的区别仅在于 D 中含曲线③, 而 B 中不含曲线③. 因此, 只需要验证直线 $y = -2x - 3$ 与曲线③有无交点, 即可作出判断.

为此, 将 $y = -2x - 3$ 代入③, 并整理, 得 $9x^2 + 24x + 16 = 0$

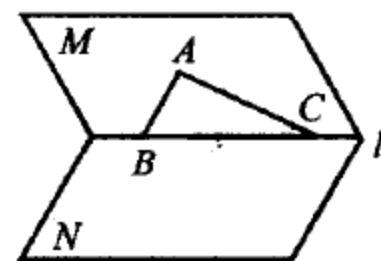
$\therefore \Delta = 24^2 - 4 \times 9 \times 16 = 0. \therefore$ 方程有实根.

$\therefore$ 直线 $y = -2x - 3$ 与曲线③有交点, $\therefore$ 可排除 B. 故知应选 D.

四、特殊化法

从题干或选择支出发, 通过将问题特殊化处理, 选择取特殊性情况代入或构造满足题设条件的特殊函数或图形位置等进行判断, 即具有普遍性意义的命题必适合特殊性, 这种方法是“小题小做”的重要策略, 一定要注意适用条件和范围, 特殊化的情况和类型较多, 主要有, 特殊值、特殊点、特殊图形(曲线、函数)的特殊位置等. 此法如能熟练掌握对做选择题将大有裨益.

如图所示, 在二面角 $M-l-N$ 的一个面 M 内有 $\text{Rt}\triangle ABC$, 其中 $\angle A = 90^\circ$, 顶点 B, C 在二面角的棱 l 上, AB, AC 与平面 N 所成的角分别为 α, β . 若二面角 $M-l-N$ 的大小为 θ , 则下面的关系式正确的是 ()



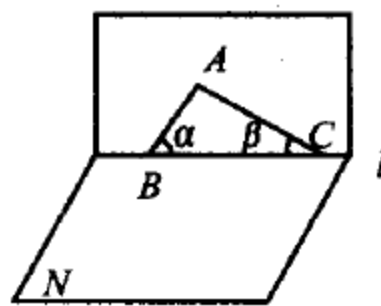
A. $\sin^2 \alpha + \sin^2 \beta = \sin^2 \theta$

B. $\sin^2 \alpha + \sin^2 \beta > \sin^2 \theta$

C. $\sin^2 \alpha + \sin^2 \beta < \sin^2 \theta$

D. $\sin^2 \alpha + \sin^2 \beta \neq \sin^2 \theta$

选 A. 如图所示, 取特殊图形 $\theta = 90^\circ$, 则有 $\sin \theta = 1$, 此时, 由 $AB \perp AC$, 得 $\sin^2 \alpha + \sin^2 \beta = \sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1, \therefore$ 有 $\sin^2 \alpha + \sin^2 \beta = \sin^2 \theta$, 据此可否定 B、C、D.



已知 a, b 是两个不相等的正数, 下面三个代数式: $P = \left(a + \frac{1}{a}\right) \left(b + \frac{1}{b}\right), Q =$



$\left(\sqrt{ab} + \frac{1}{\sqrt{ab}}\right)^2, R = \left(\frac{a+b}{2} + \frac{2}{a+b}\right)^2$ 中, 值最大的一个是 ()

- A. P B. Q C. R D. 与 a, b 的取值有关

选 D. 取 $a=1, b=2$, 则 $P=5, Q=\frac{9}{2}, R=4\frac{25}{36}$, P 最大.

若取 $a=3, b=2$, 则 $P=\frac{25}{3}, Q=8\frac{1}{6}, R=\frac{841}{100}$. 故 R 最大.

由此可见, P, Q, R 的大小与 a, b 的值有关.

已知 $0 < x < y < a < 1$, 则有 ()

- A. $\log_a(xy) < 1$ B. $0 < \log_a(xy) < 1$
C. $1 < \log_a(xy) < 2$ D. $\log_a(xy) > 2$

本题主要考查对数函数的单调性、值域、不等式等内容, 以及学生对基础知识和基本运算技能的掌握情况.

特殊化法.

取 $x = \left(\frac{1}{2}\right)^3, y = \left(\frac{1}{2}\right)^2, a = \frac{1}{2}$, 满足条件 $0 < x < y < a < 1$.

则 $\log_a(xy) = \log_{\frac{1}{2}}\left(\frac{1}{2}\right)^5 = 5 > 2$. 可排除选项 A、B、C, 选 D.

直接求解法. $\because 0 < x < y < a < 1, \therefore 0 < xy < a^2 < 1$, 根据对数函数的性质可知 $\log_a(xy) > \log_a a^2 = 2$. 选 D.

若 $\sin\alpha + \sin\beta = \frac{1}{\sqrt{3}}(\cos\beta - \cos\alpha), \alpha, \beta \in (0, \pi)$, 则 $\alpha - \beta$ 的值为 ()

- A. $-\frac{2\pi}{3}$ B. $-\frac{\pi}{3}$ C. $\frac{\pi}{3}$ D. $\frac{2\pi}{3}$

令 $\beta = \frac{\pi}{6}$, 代入已知式, 得 $\sin\alpha = -\frac{1}{\sqrt{3}}\cos\alpha, \therefore \tan\alpha = -\frac{\sqrt{3}}{3}$,

$\because \alpha \in (0, \pi), \therefore \alpha = \frac{5\pi}{6}, \therefore \alpha - \beta = \frac{5\pi}{6} - \frac{\pi}{6} = \frac{2\pi}{3}$. 故选 D.

过抛物线 $y = ax^2 (a > 0)$ 的焦点 F 作一直线交抛物线于 P, Q 两点, 若线段 PF 与 FQ 的长分别是 p 和 q , 则 $\frac{1}{p} + \frac{1}{q}$ 等于 ()

- A. $2a$ B. $\frac{1}{2a}$ C. $4a$ D. $\frac{4}{a}$

解法一: 如图, 过焦点 F 作平行于 x 轴的特殊直线 PQ , 则有 $p = q = |FQ| = \frac{1}{2a}$,

$\therefore \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 4a$, 从而选 C.



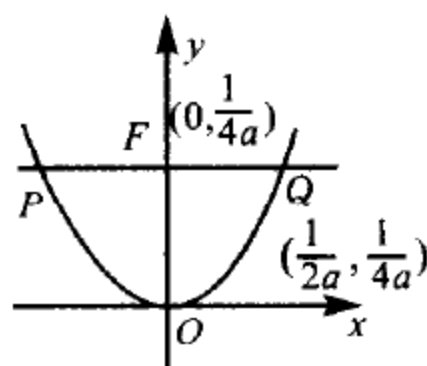
解法二：在取特殊直线 $PQ \parallel x$ 轴的同时，亦可再对 a 取特殊值，如取 $a=2$ （但不可取 $a=1$ ，否则 C、D 两项的值均等于 4，将无法舍取），故选 C。

解法三：运动变化法

将 l 绕 F 点逆时针转动，使 P 点无限靠近 O 点， Q 点在抛物线右上方的无限远处，

$$\text{此时 } \frac{1}{|FQ|} \rightarrow 0, \frac{1}{|PF|} \rightarrow \frac{1}{|FO|} = 4a,$$

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{q} \rightarrow 4a, \text{ 故 } \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 4a. \text{ 故选 C.}$$



五、数形结合法

由数及形，由形及数，数形结合相互转化，从数或形的角度搜寻信息，或排除选项或肯定选项。

圆 $x^2 + 2x + y^2 + 4y - 3 = 0$ 上到直线 $x + y + 1 = 0$ 的距离为 $\sqrt{2}$ 的点共有

()

A. 1 个

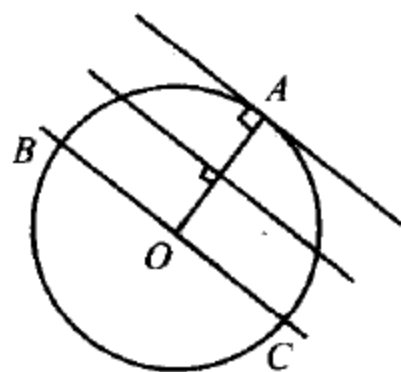
B. 2 个

C. 3 个

D. 4 个

选 C. 作出符合条件的草图。

$\because$ 圆心 $(-1, -2)$ 到直线 $x + y + 1 = 0$ 的距离等于 $\sqrt{2}$ ，半径为 $2\sqrt{2}$. $\therefore$ 圆上到直线距离为 $\sqrt{2}$ 的点共有 3 个。



$f(x) = |\log_3 x|$ ，若 $f(x) > f(3.5)$ ，则 x 的取值

范围是

()

A. $(0, \frac{2}{7}) \cup (1, \frac{2}{7})$

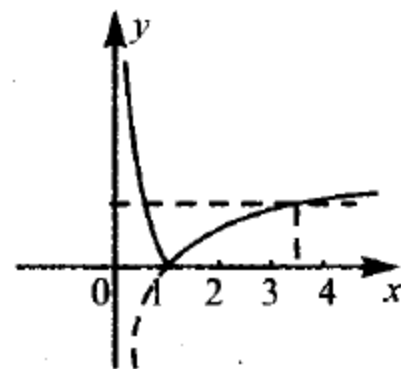
B. $(\frac{7}{2}, +\infty)$

C. $(0, \frac{2}{7}) \cup (\frac{2}{7}, +\infty)$

D. $(\frac{2}{7}, \frac{7}{2})$

将 $y = |\log_3 x|$ 的图像画出，即可发现此函数的性

质： $(0, 1]$ 单减函数， $(1, +\infty)$ 单增函数，由图可立得解集的形状为 $(0, x_1) \cup (x_2, +\infty)$ ， $\therefore$ 选 C。



由于选择题主要考查学生灵活处理问题，应用知识解决数学问题的能力，故涉及到的知识和方法很多，由此产生的解选择题的策略和途径也多种多样，有时一个题目有多种形式的解法，但在最短的时间内选择“最优”方法尚需一定的能力，所以在后面的练习和今后的学习中，要注意体会，理解和积累，对教材中出现的重要题型、重要结论熟记于胸，灵活运用，切忌生搬硬套，死记方法，用方法“套”题型，必将会使以上这些处理选择题的方法成为束缚学习思维的桎梏。



第一章 集合与简易逻辑

§ 1.1 集合

典例解析

例 1 ('04 全国理 6) 设 A, B, I 均为非空集合, 且满足 $A \subseteq B \subseteq I$, 则下列各式中错误的是

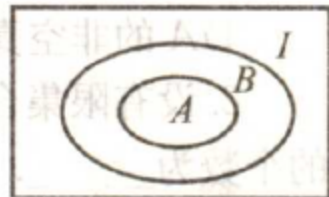
A. $(\complement_I A) \cup B = I$

B. $(\complement_I A) \cup (\complement_I B) = I$

C. $A \cap (\complement_I B) = \emptyset$

D. $(\complement_I A) \cap (\complement_I B) = \complement_I B$

解 选 B. 方法一: (韦恩图法). $\because A, B, I$ 满足 $A \subseteq B \subseteq I$, 先画出韦恩图, 根据韦恩图可判断出 A、C、D 都是正确的.



方法二: (特例法). 设非空集合 A, B, I 分别为 $A = \{1\}, B = \{1, 2\}, I = \{1, 2, 3\}$ 且满足 $A \subseteq B \subseteq I$. 根据设出的三个特殊的集合 A, B, I 可判断出 A、C、D 都是正确的.

方法三: (利用集合之间的运算关系).

由已知 $A \subseteq B \subseteq I \Rightarrow \complement_I A \supseteq \complement_I B$, 易知 B 错误.

方法四: 先利用摩根律 $(\complement_I A) \cup (\complement_I B) = \complement_I (A \cap B) = \complement_I A$

$$(\complement_I A) \cap (\complement_I B) = \complement_I (A \cup B) = \complement_I B.$$

将 (B、D) 选项化简全, 易得 B 错.

例 2 ('02, 全国 5) 设集合 $M = \{x | x = \frac{k}{2} + \frac{1}{4}, k \in \mathbb{Z}\}, N = \{x | x = \frac{k}{4} + \frac{1}{2}, k \in \mathbb{Z}\}$, 则

A. $M = N$

B. $M \subsetneq N$

C. $M \supsetneq N$

D. $M \cap N = \emptyset$

点拨: 认清集合中元素的属性, 是突破此题难点的要害所在. 因此首先要改变集合中元素的表达式, 方能从中找出规律得出答案.

解 故选 B. 方法一: 集合 M 的元素为 $x = \frac{k}{2} + \frac{1}{4} = \frac{2k+1}{4} (k \in \mathbb{Z})$, 集合 N 的元素为 $x = \frac{k}{4} + \frac{1}{2} = \frac{k+2}{4} (k \in \mathbb{Z})$, 而 $2k+1$ 为奇数, $k+2$ 为整数, 因此 $M \subsetneq N$. 方法二: $\because \frac{1}{2} \notin M, \frac{1}{2} \in N$, 可知 A、C 均错, 又 $\because \frac{1}{4} \in M, \frac{1}{4} \in N. \therefore$ D 错.



设 I 为全集, S_1, S_2, S_3 是 I 的三个非空子集且 $S_1 \cup S_2 \cup S_3 = I$, 则下面论断正确的是 ()

- A. $\complement_I S_1 \cap (S_2 \cup S_3) = \emptyset$ B. $S_1 \subseteq (\complement_I S_2 \cap \complement_I S_3)$
C. $\complement_I S_1 \cap \complement_I S_2 \cap \complement_I S_3 = \emptyset$ D. $S_1 \subseteq (\complement_I S_2 \cup \complement_I S_3)$

选 C. $\because S_1 \cup S_2 \cup S_3 = I, \therefore \complement_I (S_1 \cup S_2 \cup S_3) = \emptyset, \complement_I S_1 \cap [\complement_I (S_2 \cup S_3)] = \emptyset, \complement_I S_1 \cap (\complement_I S_2 \cap \complement_I S_3) = \emptyset$, 即 $\complement_I S_1 \cap \complement_I S_2 \cap \complement_I S_3 = \emptyset$.

正确把握集合与集合的关系.

已知集合 $A \subseteq \{1, 2, 3\}$ 且 A 中至少有一个奇数, 则这样的集合 A 有 ()

- A. 6 个 B. 5 个 C. 4 个 D. 3 个

选 B. $\because A \subseteq \{1, 2, 3\}$ 这样的 A 有 $2^3 - 1 = 7$ 个. 又 $\{2\}, \emptyset$ 不符合要求去掉, $7 - 2 = 5$. $\therefore$ 选 B.

注: 1 设有限集合 A , A 中元素个数为 n , 则

- 1) A 的子集的个数 _____.
2) A 的真子集的个数 _____.
3) A 的非空子集的个数 _____.
4) A 的非空真子集的个数 _____.

2. 设有限集合 $A, B, C, \text{card}(A) = n, \text{card}(B) = m, (m < n)$ 则 若 $B \subseteq C \subseteq A$, 则 C 的个数为 _____.

答案: 1) 2^n 2) $2^n - 1$ 3) $2^n - 1$ 4) $2^n - 2$ 2 2^{n-m}

有限集合的子集个数问题.

已知集合 $A = \{x | a - 1 \leq x \leq a + 2\}, B = \{x | 3 < x < 5\}$. 则能使 $A \supseteq B$ 成立的实数 a 的取值范围是 ()

- A. $\{a | 3 < a \leq 4\}$ B. $\{a | 3 \leq a \leq 4\}$ C. $\{a | 3 < a < 4\}$ D. $\emptyset$

选 B. 由 A 和 B 的关系, $A \supseteq B$ 可知 $\begin{cases} a - 1 \leq 3 \\ a + 2 \geq 5 \end{cases}$

利用集合的包含关系列不等式(组), 求 a 的范围.

设 $f(n) = 2n + 1 (n \in \mathbb{N}), P = \{1, 2, 3, 4, 5\}, Q = \{3, 4, 5, 6, 7\}$, 记 $\hat{P} = \{n \in \mathbb{N} | f(n) \in P\}, \hat{Q} = \{n \in \mathbb{N} | f(n) \in Q\}$, 则 $(\hat{P} \cap \complement_{\mathbb{N}} \hat{Q}) \cup (\hat{Q} \cap \complement_{\mathbb{N}} \hat{P}) =$ ()

- A. $\{0, 3\}$ B. $\{1, 2\}$ C. $\{3, 4, 5\}$ D. $\{1, 2, 6, 7\}$

选 A. 解决本题的关键是读懂数学符号语言, 认清集合 $\hat{P}$ 及 $\hat{Q}$ 中的元素是什么数, 由 $\hat{P}$ 的代表元素 $n \in \mathbb{N}$ 知 $\hat{P}$ 中的元素为自然数, 又由 $\hat{P}$ 的描述 $f(n) \in P$, 于是想到 $f(0) = 2 \cdot 0 + 1 = 1 \in P, f(1) = 2 \cdot 1 + 1 = 3 \in P, f(2) = 2 \cdot 2 + 1 = 5 \in P$, 因此得 $\hat{P} = \{0, 1, 2\}$, 同理可得 $\hat{Q} = \{1, 2, 3\}$. 从而 $\complement_{\mathbb{N}} \hat{P} = \{3, 4, 5, 6, \dots\}, \complement_{\mathbb{N}} \hat{Q} = \{0, 4, 5, 6, 7,$



.....}. $\therefore \hat{P} \cap \hat{Q} = \{0\}, \hat{Q} \cap \hat{P} = \{3\}. \therefore (\hat{P} \cap \hat{Q}) \cup (\hat{Q} \cap \hat{P}) = \{0, 3\}.$

例 7 两个集合之差作“ A/B ”定义为: $A/B = \{x | x \in A \text{ 且 } x \notin B\}$, 如果集合 $A = \{x | \log_2 x < 1, x \in \mathbf{R}\}$, 集合 $B = \{x | |x-2| < 1, x \in \mathbf{R}\}$. 那么 A/B 等于 ()

- A. $\{x | x \leq 1\}$ B. $\{x | x \geq 3\}$ C. $\{x | 1 \leq x < 2\}$ D. $\{x | 0 < x \leq 1\}$

解 注意 A/B 与 $\complement_A B$ 不同, A 与 B 的差并无“ $B \subseteq A$ ”的约束条件. 又 $\because A = \{x | 0 < x < 2\}, B = \{x | 1 < x < 3\}. \therefore A/B = \{x | 0 < x \leq 1\}$, 选 D. 提示: 注意对集合交并补的正确理解.

例 8 已知 $P = \{m | -4 < m < 0\}, Q = \{m | mx^2 - mx - 1 < 0 \text{ 对一切 } x \in \mathbf{R} \text{ 都成立}\}$, 那么下列关系中成立的是 ()

- A. $P \subsetneq Q$ B. $Q \subsetneq P$ C. $P = Q$ D. $P \cap Q = \emptyset$

解 选 A. Q 中分 $m = 0$ 和 $m \neq 0$ 两类, $m = 0$ 时显然成立, $m \neq 0$ 时, 由 $\begin{cases} m < 0 \\ \Delta < 0 \end{cases}$ 可得 $-4 < m < 0$, 故 $Q = \{m | -4 < m \leq 0\}, \therefore P \subsetneq Q.$

提示: 注意集合运算与不等式的联系.

例 9 设全集 $I = \{(x, y) | x \in \mathbf{R}, y \in \mathbf{R}\}$, 集合 $M = \{(x, y) | \frac{y-3}{x-2} = 1\}, N = \{(x, y) | y \neq x+1\}$, 那么 $\complement_I (M \cup N)$ 等于 ()

- A. $\emptyset$ B. $\{(2, 3)\}$ C. $(2, 3)$ D. $\{(x, y) | y = x+1\}$

解 选 B. 集合 M 是由直线 $y = x+1$ 除去点 $(2, 3)$ 后的点组成的, 集合 N 是由坐标平面上不在直线 $y = x+1$ 上的点组成的, 因此 $M \cup N$ 是由坐标平面上除去点 $(2, 3)$ 的点组成的, 它关于坐标平面上的点组成的集合 I 的补集 $\complement_I (M \cup N) = \{(2, 3)\}.$

提示: 集合的运算与解析几何的联系.

跟踪训练一

1. 给定下列关系: ① $\emptyset \subsetneq A$ ② $\emptyset \subseteq \emptyset$ ③ $\emptyset \in \{\emptyset\}$ ④ $\emptyset \in \{\emptyset\}$. 其中正确的个数为 ()

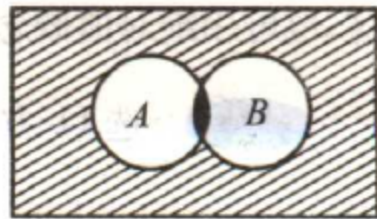
- A. 4 个 B. 3 个 C. 2 个 D. 1 个

2. 设 $\{1, 2\} \subseteq A \subseteq \{1, 2, 3, 4, 5\}$, 那么满足上述关系的集合 A 的数目是 ()

- A. 2 个 B. 4 个 C. 6 个 D. 8 个

3. 图中的阴影部分为 ()

- A. $(A \cup B) \cap (A \cap B)$ B. $\complement_I (A \cup B) \cup (A \cap B)$
C. $\complement_I (A \cap B)$ D. $\complement_I (A \cup B)$



4. 已知集合 $M = \{x | x = m + \frac{1}{6}, m \in \mathbf{Z}\}, N = \{x | x = \frac{n}{2} -$