新世纪高职高专基础课系列教材

线性代数

Linear Algebra

NEUPRESS
东北大学出版社

新世纪高职高专基础课系列教材

线 性 代 数

Linear Algebra

东北大学出版社

· 沈 阳 ·

图书在版编目（CIP）数据

线性代数 / 刘艳杰，谢延波，吴智华主编 .— 沈阳：东北大学出版社，2004.8（2006.1 重印）
ISBN 7-81102-021-1

Ⅰ.线…　Ⅱ.①刘…②谢…③吴…　Ⅲ.线性代数　Ⅳ.O151.2

中国版本图书馆 CIP 数据核字（2004）第 072514 号

出 版 者：东北大学出版社
地址：沈阳市和平区文化路 3 号巷 11 号
邮编：110004
电话：024—83687331（市场部）　83680267（社务室）
传真：024—83680180（市场部）　83680265（社务室）
E-mail：neuph @ neupress.com
http：//www.neupress.com
印 刷 者：沈阳市第六印刷厂
发 行 者：东北大学出版社
幅面尺寸：184mm × 260mm
印　　张：9.5
字　　数：243 千字
出版时间：2004 年 8 月第 1 版
印刷时间：2006 年 1 月第 3 次印刷
责任编辑：郝蕴卿　刘宗玉
封面设计：唐敏智
责任校对：吴乃萍
责任出版：秦　力

定　　价：15.00 元

前　　言

进入21世纪以后，我国的高职高专教育有了突飞猛进的发展，但教材建设却略显滞后。特别是近年来学制缩短、人才需求变化等诸多因素的影响，对教材，特别是基础课教材又提出了更新、更严格的要求。正是在这种形势下，我们在总结多年的高职高专数学教学经验、探索高职高专数学教学的发展动向、分析国内外同类教材发展趋势的基础上，编写出适用于理工类高职高专各专业使用的《线性代数》一书。

本书是依据教育部制定的"高职高专教育线性代数课程教学基本要求"而编写的，遵循的是"以应用为目的，以必需、够用为度"的原则，并充分考虑到相当多的学校线性代数课程学时减少这一实际情况。为此，确立编写本书的指导思想为：重视概念，强调应用，侧重计算。本书的特色也体现在下述几个方面：

1. 重视基本概念

线性代数内容虽然抽象，但其中每一个基本概念都有自己的实际应用背景，力求从身边的实际问题出发，自然地引出基本概念，以激发学生的兴趣和求知欲。在弄清基本概念的基础上，理顺基本概念和各个概念之间的联系，提高教学效果。在教学理念上不过分强调严密论证、研究过程，而更多的是让学生体会线性代数的本质以及线性代数的价值。

2. 强调实际应用

本着学习数学是为了使用数学这一宗旨，并考虑到高职高专教育的目标是培养应用性人才，书中选择了一些与生产实践相关的例题和习题，以提高学生应用线性代数知识解决实际问题的意识和能力。

3. 侧重运算、解题能力

根据高职学生的特点，力求内容深入浅出、论证简明易懂，侧重于运算、解题能力的训练，让学生在弄清基本概念的基础上熟悉运算过程、掌握解题方法，最后达到增加运算速度、提高解题能力的目的。每章均附有与教学内容密切联系的习题，并在书末给出答案。

考虑到不同专业的需求有所差别，一些章节用"*"号标出，供相关专业选择。同时也考虑到"专升本"的需要，有些章节的内容略有加深，也给出了少量的带"*"号的习题。

全书共有5章，内容包括行列式、矩阵及其运算、矩阵的初等变换与线性方程组、向量组的线性相关性、相似矩阵与二次型。

本书主要适于用做高等职业学校、高等专科学校、成人高等学校及本科院校举办的二级职业技术学院理工类各专业的高等数学课的教材。

由于水平所限，加之时间仓促，书中难免有不足甚至是错误之处，敬请读者不吝赐教。

作　者

2004年2月

《线性代数》编写人员

主　　　编：刘艳杰　谢延波　吴智华

副　主　编：黄己立　王月山　崔令霞

其他编写人员：（以姓氏笔画为序）

王为民　王金芝　胡忠盛

赵玉怀　栗　磊　滕　勇

目　录

引　言

高等数学、线性代数、概率论与数理统计是高等院校的数学基础课程，是描述现代科学技术的基础数学语言，是工具．学生们只有掌握了这三门数学基础课程，才能更好地学习后继的专业课程．

在自然科学、社会科学和人文科学中，普遍存在着其内在的科学规律，怎样阐述清楚，线性代数便是常用的工具．

有人说："在现代社会，除了算术以外，线性代数是应用最广泛的数学学科了．"

既然如此，让我们来看一看，线性代数有哪些内容：

中学数学的一个重要内容是求解线性(一次)方程组，例如，对于方程组

$$\begin{cases} 2x + 3y = 8 \\ 4x + \quad y = 6 \end{cases}$$

解此方程组的方法只有一个：消元法．

一个一般性的问题是：

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 = b_2 \end{cases}$$

其中 x_1，x_2 是变量，而 a_{11}，a_{12}，b_1，a_{21}，a_{22}，b_2是常数．

解此方程组有没有一个一般性的规律可循呢？数学家在探索其规律的过程中，用到三个工具，即

- 行列式
- 矩阵
- 向量

行列式、矩阵及向量的概念，还有其性质的讨论结果，构成一门数学分支——线性代数．

第一章　行列式

第一节　二阶和三阶行列式

在介绍行列式的概念之前，我们先构造一个数学玩具：把 4 个数放在一个正方形的四个角上，再加上两条竖线，即

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}$$

规定这个玩具对应于一个结果：两个对角线上的数的乘积之差．即

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$$

例如：

$$\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 1 \end{vmatrix} = 2\times 1 - 3\times 4 = -10$$

a_{11}和 a_{22}所在方向的对角线称为**主对角线**，a_{12}和 a_{21}所在方向的对角线称为**副对角线**．

定义 1　4 个数 a_{11}，a_{12}，a_{21}，a_{22}，称

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$$

为一个**二阶行列式**；a_{11}，a_{12}所在的行称为**第 1 行**，记为 r_1(r 来源于英语 row)，a_{12}，a_{22}所在的列称为**第 2 列**，记为 c_2(c 来源于英语 column)，因其共有两行两列，所以称为**二阶行列式**．a_{21}是在第 2 行第 1 列的**元素**．

一般地用 a_{ij}表示第 i 行，第 j 列的元素．i 是**行标**，j 是**列标**．现在，

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$$

可叙述为：二阶行列式的对应值是主对角线元素之积与副对角线元素之积的差．此法则称为**对角线法则**．

此玩具有什么用途？

对前面的方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 = b_1 & (1) \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 = b_2 & (2) \end{cases}$$

求其解，用消元法，先消掉 x_1 所在的项，

$(2)\times a_{11}$，$(1)\times a_{21}$为

$$\begin{cases} a_{11}a_{21}x_1+a_{11}a_{22}x_2=a_{11}b_2 & (3) \\ a_{21}a_{11}x_1+a_{21}a_{12}x_2=a_{21}b_1 & (4) \end{cases}$$

$(3)-(4)$，得

$$x_2=\frac{a_{11}b_2-a_{21}b_1}{a_{11}a_{22}-a_{21}a_{12}}=\frac{\begin{vmatrix} a_{11} & b_1 \\ a_{21} & b_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}}$$

再消去 x_2 所在的项，

$(1)\times a_{22}$，$(2)\times a_{12}$为

$$\begin{cases} a_{11}a_{22}x_1+a_{12}a_{22}x_2=a_{22}b_1 & (5) \\ a_{12}a_{21}x_1+a_{12}a_{22}x_2=a_{12}b_2 & (6) \end{cases}$$

$(5)-(6)$，得

$$x_1=\frac{b_1a_{22}-b_2a_{12}}{a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}}=\frac{\begin{vmatrix} b_1 & a_{12} \\ b_2 & a_{22} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}}$$

我们发现其规律为：

若记

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}$$

是方程组的**系数行列式**，则

$$D_1=\begin{vmatrix} b_1 & a_{12} \\ b_2 & a_{22} \end{vmatrix}$$

是用常数项$\begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \end{bmatrix}$替换 D 的第 1 列所得的行列式；

$$D_2=\begin{vmatrix} a_{11} & b_1 \\ a_{21} & b_2 \end{vmatrix}$$

是用常数项$\begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \end{bmatrix}$替换 D 的第 2 列所得的行列式.

若 $D\neq 0$ 时，方程组的解恰好是：

$$x_1=\frac{D_1}{D},\quad x_2=\frac{D_2}{D}$$

此规律被称为 **Cramer** 定理.

例 1 求解二元线性方程组

$$\begin{cases}2x+3y=8\\4x+\ \ y=6\end{cases}$$

解

$$D=\begin{vmatrix}2&3\\4&1\end{vmatrix}=2-12=-10\neq 0$$

$$D_1=\begin{vmatrix}8&3\\6&1\end{vmatrix}=8-18=-10$$

$$D_2=\begin{vmatrix}2&8\\4&6\end{vmatrix}=12-32=-20$$

故

$$x_1=\frac{D_1}{D}=1,\quad x_2=\frac{D_2}{D}=2$$

同理类推，用对角线法则可定义三阶行列式如下：

$$\begin{vmatrix}a_{11}&a_{12}&a_{13}\\a_{21}&a_{22}&a_{23}\\a_{31}&a_{32}&a_{33}\end{vmatrix}=a_{11}a_{22}a_{33}+a_{21}a_{32}a_{13}+a_{31}a_{12}a_{23}-a_{13}a_{22}a_{31}-a_{23}a_{32}a_{11}-a_{33}a_{12}a_{21}$$

其中 $a_{11}a_{22}a_{33}$，$a_{21}a_{32}a_{13}$，$a_{31}a_{12}a_{23}$ 来源于三条主对角线上三个元素的乘积，前面加正号；$-a_{13}a_{22}a_{31}$，$-a_{23}a_{32}a_{11}$，$-a_{33}a_{12}a_{21}$ 来源于三条副对角线上三个元素的乘积，前面加负号. 或看下图：

$$\left|\begin{array}{ccc|c|ccc}a_{11}&a_{12}&a_{13}&&a_{11}&a_{12}&a_{13}\\a_{21}&a_{22}&a_{23}&&a_{21}&a_{22}&a_{23}\\a_{31}&a_{32}&a_{33}&&a_{31}&a_{32}&a_{33}\end{array}\right|$$

例 2 计算三阶行列式

$$D=\begin{vmatrix}1&1&1\\3&2&-1\\3&1&2\end{vmatrix}$$

$$D_1=\begin{vmatrix}6&1&1\\4&2&-1\\11&1&2\end{vmatrix}$$

$$D_2=\begin{vmatrix}1&6&1\\3&4&-1\\3&11&2\end{vmatrix}$$

$$D_3=\begin{vmatrix}1 & 1 & 6\\3 & 2 & 4\\3 & 1 & 11\end{vmatrix}$$

解 $D=1\times2\times2+3\times1\times1+3\times1\times(-1)-1\times2\times3-(-1)\times1\times1-2\times1\times3$

$\quad=-7$

$D_1=6\times2\times2+4\times1\times1+11\times1\times(-1)-1\times2\times11-(-1)\times1\times6-2\times1\times4$

$\quad=-7$

$D_2=1\times4\times2+3\times11\times1+3\times6\times(-1)-1\times4\times3-(-1)\times11\times1-2\times6\times3$

$\quad=-14$

$D_3=1\times2\times11+3\times1\times6+3\times1\times4-6\times2\times3-4\times1\times1-11\times1\times3$

$\quad=-21$

实际上，D，D_1，D_2，D_3 来自于线性方程组

$$\begin{cases}x_1+x_2+x_3=6\\3x_1+2x_2-x_3=4\\3x_1+x_2+2x_3=11\end{cases}$$

第二节　行列式按行展开

计算三阶行列式时有如下规律：

$$D=\begin{vmatrix}a_{11} & a_{12} & a_{13}\\a_{21} & a_{22} & a_{23}\\a_{31} & a_{32} & a_{33}\end{vmatrix}$$

$$=a_{11}a_{22}a_{33}+a_{21}a_{32}a_{13}+a_{31}a_{12}a_{23}-a_{13}a_{22}a_{31}-a_{23}a_{32}a_{11}-a_{33}a_{12}a_{21}$$

$$=a_{11}(a_{22}a_{33}-a_{23}a_{32})-a_{12}(a_{21}a_{33}-a_{23}a_{31})+a_{13}(a_{21}a_{32}-a_{22}a_{31})$$

$$=a_{11}\begin{vmatrix}a_{22} & a_{23}\\a_{32} & a_{33}\end{vmatrix}-a_{12}\begin{vmatrix}a_{21} & a_{23}\\a_{31} & a_{33}\end{vmatrix}+a_{13}\begin{vmatrix}a_{21} & a_{22}\\a_{31} & a_{32}\end{vmatrix}$$

$$\begin{vmatrix}\cancel{a_{11}} & \cancel{a_{12}} & \cancel{a_{13}}\\\cancel{a_{21}} & a_{22} & a_{23}\\\cancel{a_{31}} & a_{32} & a_{33}\end{vmatrix},\quad\begin{vmatrix}\cancel{a_{11}} & \cancel{a_{12}} & \cancel{a_{13}}\\a_{21} & \cancel{a_{22}} & a_{23}\\a_{31} & \cancel{a_{32}} & a_{33}\end{vmatrix},\quad\begin{vmatrix}\cancel{a_{11}} & \cancel{a_{12}} & \cancel{a_{13}}\\a_{21} & a_{22} & \cancel{a_{23}}\\a_{31} & a_{32} & \cancel{a_{33}}\end{vmatrix}$$

把 a_{ij} 所在的行和列都划掉，剩下的元素保持原来的相对位置不变而构成的新行列式称为元素 a_{ij} 的**余子式**，记作 M_{ij}.

记 $A_{ij}=(-1)^{i+j}M_{ij}$，称 A_{ij} 为元素 a_{ij} 的**代数余子式**.

上述三阶行列式可记为：

$$D=a_{11}A_{11}+a_{12}A_{12}+a_{13}A_{13}$$

即，三阶行列式等于它的第 1 行的每个元素与其对应**代数余子式**的乘积之和.

如果定义一阶行列式$|a_{11}|=a_{11}$，上述展开之规律同样适用于二阶行列式，即

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}A_{11}+a_{12}A_{12}$$

$$A_{11}=(-1)^{1+1}a_{22}=a_{22}$$

$$A_{12}=(-1)^{1+2}a_{21}=-a_{21}$$

例 3 按第 1 行展开计算行列式

$$D=\begin{vmatrix} 2 & 1 & 2 \\ -4 & 3 & 1 \\ 2 & 3 & 5 \end{vmatrix}$$

解 $D=\begin{vmatrix} 2 & 1 & 2 \\ -4 & 3 & 1 \\ 2 & 3 & 5 \end{vmatrix}$

$$=2\times(-1)^{1+1}\begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 3 & 5 \end{vmatrix}+1\times(-1)^{1+2}\begin{vmatrix} -4 & 1 \\ 2 & 5 \end{vmatrix}+2\times(-1)^{1+3}\begin{vmatrix} -4 & 3 \\ 2 & 3 \end{vmatrix}$$

$$=10$$

行列式按第 1 行展开的规律还可以类推为如下定理.

定理 1 三阶行列式等于它的任一行(或任一列)的每个元素与它所对应的代数余子式的乘积之和，即

$$D=a_{i1}A_{i1}+a_{i2}A_{i2}+a_{i3}A_{i3}$$

$$=\sum_{j=1}^{3}a_{ij}A_{ij}\quad(i=1,\ 2,\ 3)$$

或

$$D=a_{1j}A_{1j}+a_{2j}A_{2j}+a_{3j}A_{3j}=\sum_{i=1}^{3}a_{ij}A_{ij}\quad(j=1,\ 2,\ 3)$$

例如，例 3 中的行列式按第 2 行展开为

$$\begin{vmatrix} 2 & 1 & 2 \\ -4 & 3 & 1 \\ 2 & 3 & 5 \end{vmatrix}=-4\times(-1)^{2+1}\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 5 \end{vmatrix}+3\times(-1)^{2+2}\begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 5 \end{vmatrix}+1\times(-1)^{2+3}\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 2 & 3 \end{vmatrix}$$

$$=10$$

按第 3 列展开为

$$\begin{vmatrix} 2 & 1 & 2 \\ -4 & 3 & 1 \\ 2 & 3 & 5 \end{vmatrix}=2\times(-1)^{1+3}\begin{vmatrix} -4 & 3 \\ 2 & 3 \end{vmatrix}+1\times(-1)^{2+3}\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 2 & 3 \end{vmatrix}+5\times(-1)^{3+3}\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ -4 & 3 \end{vmatrix}$$

$$=10$$

例 4 计算行列式

$$D=\begin{vmatrix}1 & 0 & -3\\ 2 & 0 & -1\\ -3 & 4 & 2\end{vmatrix}$$

解　第 2 列有两个元素为零，按第 2 列展开较好.

$$D=\begin{vmatrix}1 & 0 & -3\\ 2 & 0 & -1\\ -3 & 4 & 2\end{vmatrix}=4\times(-1)^{3+2}\begin{vmatrix}1 & -3\\ 2 & -1\end{vmatrix}=-20$$

第三节　n 阶行列式

我们的问题更进一步，讨论 n 阶的行列式.

画 n 条平行的水平直线，再画 n 条平行的铅直直线，有 n^2 个交叉点，每个交叉点上填一个数，这样构成 n^2 个数组成的数表.

定义 2　由 n 行，n 列共 n^2 个数组成的数表，用下列符号来记

$$D=\begin{vmatrix}a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n}\\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n}\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn}\end{vmatrix}$$

规定：当 $n=1$ 时，

$$D=|a_{11}|=a_{11}$$

当 $n\geqslant 2$ 时，

$$\begin{aligned}D&=a_{11}A_{11}+a_{12}A_{12}+\cdots+a_{1n}A_{1n}\\ &=\sum_{j=1}^{n}a_{1j}A_{1j}\end{aligned}$$

其中 A_{1j} 为元素 a_{1j} 的代数余子式.

我们称

$$D=\begin{vmatrix}a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n}\\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n}\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn}\end{vmatrix}$$

为 **n 阶行列式.**

注意：n 阶行列式最终是一个数值.

例 5　求四阶行列式的值

$$D=\begin{vmatrix}1&2&3&4\\0&1&2&3\\1&0&2&3\\1&2&0&3\end{vmatrix}$$

解 按第 1 行展开

$$D=\begin{vmatrix}1&2&3&4\\0&1&2&3\\1&0&2&3\\1&2&0&3\end{vmatrix}$$

$$=1\times(-1)^{1+1}\begin{vmatrix}1&2&3\\0&2&3\\2&0&3\end{vmatrix}+2\times(-1)^{1+2}\begin{vmatrix}0&2&3\\1&2&3\\1&0&3\end{vmatrix}+$$

$$3\times(-1)^{1+3}\begin{vmatrix}0&1&3\\1&0&3\\1&2&3\end{vmatrix}+4\times(-1)^{1+4}\begin{vmatrix}0&1&2\\1&0&2\\1&2&0\end{vmatrix}$$

$$=\begin{vmatrix}1&2&3\\0&2&3\\2&0&3\end{vmatrix}-2\begin{vmatrix}0&2&3\\1&2&3\\1&0&3\end{vmatrix}+3\begin{vmatrix}0&1&3\\1&0&3\\1&2&3\end{vmatrix}-4\begin{vmatrix}0&1&2\\1&0&2\\1&2&0\end{vmatrix}$$

$$=6-2\times(-6)+3\times6-4\times6=12$$

例 6 **计算下三角行列式**(对角线以上的元素全为 0)

$$D_1=\begin{vmatrix}a_{11}&&&0\\a_{21}&a_{22}&&\\\vdots&\vdots&\ddots&\\a_{n1}&a_{n2}&\cdots&a_{nn}\end{vmatrix}$$

及

$$D_2=\begin{vmatrix}0&&&a_{1n}\\&&a_{2,n-1}&a_{2n}\\&⋰&\vdots&\vdots\\a_{n1}&\cdots&a_{n,n-1}&a_{nn}\end{vmatrix}$$

解 连续按第 1 行展开

$$D_1 = a_{11}\begin{vmatrix} a_{22} & & & 0 \\ a_{32} & a_{33} & & \\ \vdots & \vdots & \ddots & \\ a_{n2} & a_{n3} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

$$= a_{11}a_{22}\begin{vmatrix} a_{33} & & & 0 \\ a_{43} & a_{44} & & \\ \vdots & \vdots & \ddots & \\ a_{n3} & a_{n4} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

$$= \cdots\cdots = a_{11}a_{22}a_{33}\cdots a_{nn}$$

注意：这种下三角行列式的值为主对角线上所有元素之积．要记住结果，以后有用．

$$D_2 = a_{1n}(-1)^{1+n}\begin{vmatrix} 0 & & & a_{2,n-1} \\ & & a_{3,n-2} & a_{3,n-1} \\ & \iddots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{n,n-2} & a_{n,n-1} \end{vmatrix}$$

$$= a_{1n}a_{2,n-1}(-1)^{1+n}\cdot(-1)^{1+(n-1)}\begin{vmatrix} 0 & & a_{3,n-2} \\ & \iddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{n,n-2} \end{vmatrix}$$

$$= a_{1n}a_{2,n-1}a_{3,n-2}(-1)^{1+n}\cdot(-1)^{1+(n-1)}\cdot(-1)^{1+(n-2)}\begin{vmatrix} 0 & & a_{4,n-3} \\ & \iddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{n,n-3} \end{vmatrix}$$

$$= \cdots\cdots$$

$$= a_{1n}a_{2,n-1}a_{3,n-2}\cdots a_{n1}(-1)^{1+n+[1+(n-1)]+[1+(n-2)]+\cdots+[1+1]}$$

$$= a_{1n}a_{2,n-1}a_{3,n-2}\cdots a_{n1}(-1)^{\frac{(3+n)n}{2}}$$

其中$(-1)^{\frac{(3+n)n}{2}}$的 $3+n$ 可用$n+1$或 $n-1$ 代替，用 $n-1$ 代替 $n+3$，即

$$D_2 = (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}a_{1n}a_{2,n-1}a_{3,n-2}\cdots a_{n1}$$

注意：这种下三角行列式的值为副对角线上所有元素之积，再乘以$(-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}$．

在 n 阶行列式中，所有的行与列地位相同．因此与三阶行列式一样，n 阶行列式也可按任一行或任一列展开．结果如下．

定理 2 n 阶行列式等于它的任一行(或任一列)的每个元素与其对应的代数余子式的乘积之和，即

$$D = a_{i1}A_{i1} + a_{i2}A_{i2} + \cdots + a_{in}A_{in}$$

$$= \sum_{j=1}^{n} a_{ij}A_{ij} \quad (i=1,\ 2,\ \cdots,\ n)$$

或

$$D=a_{1j}A_{1j}+a_{2j}A_{2j}+\cdots+a_{nj}A_{nj}$$

$$=\sum_{i=1}^{n}a_{ij}A_{ij}\quad(j=1,\ 2,\ \cdots,\ n)$$

例 7 计算行列式

$$D=\begin{vmatrix}1&2&3&4\\4&3&2&0\\-1&-1&-1&-1\\3&2&1&0\end{vmatrix}$$

解 第 4 列的零元素最多，可按第 4 列展开.

$$D=4\times(-1)^{1+4}\begin{vmatrix}4&3&2\\-1&-1&-1\\3&2&1\end{vmatrix}+(-1)\times(-1)^{3+4}\begin{vmatrix}1&2&3\\4&3&2\\3&2&1\end{vmatrix}$$

$$=-4\begin{vmatrix}4&3&2\\-1&-1&-1\\3&2&1\end{vmatrix}+\begin{vmatrix}1&2&3\\4&3&2\\3&2&1\end{vmatrix}$$

$$=-4\times0+0=0$$

例 8 计算**上三角行列式**(对角线以下的元素全为 0)

$$D_3=\begin{vmatrix}a_{11}&a_{12}&\cdots&a_{1n}\\&a_{22}&\cdots&a_{2n}\\&&\ddots&\vdots\\0&&&a_{nn}\end{vmatrix}$$

及

$$D_4=\begin{vmatrix}a_{11}&a_{12}&\cdots&a_{1n}\\\vdots&\vdots&⋰&\\a_{n-1,1}&a_{n-1,2}&&\\a_{n1}&&&0\end{vmatrix}$$

解 连续按第 1 列展开.

$$D_3=a_{11}\begin{vmatrix}a_{22}&\cdots&a_{2n}\\&\ddots&\vdots\\0&&a_{nn}\end{vmatrix}$$

$$=\cdots=a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}$$

连续按第 n 行展开.