教育部高职高专规划教材

高等数学

马成东　陈丽萍　主编
齐宪生　主审

化学工业出版社
教材出版中心

教育部高职高专规划教材

高等数学

马成东　陈丽萍　主编
齐宪生　主审

化学工业出版社
教材出版中心
·北京·

本教材编写中切实贯彻了“以应用为目的，以必需、够用为度”的原则。内容包括：函数与极限、导数与微分、中值定理与导数的应用、不定积分、定积分及其应用、多元函数微分学、多元函数积分学、无穷级数、常微分方程共九章。书末附有初等数学中的常用公式、简单不定积分表、习题答案与提示等。

全书精简扼要、条理清晰、深入浅出、通俗易懂，例题、习题难易适度，注重数形结合，注重培养应用意识，适用于各类高职高专院校、成人高校及本科院校开办的二级职业技术学院和民办高校两年制或三年制（少学时）工程类、经济管理类专业。

图书在版编目（CIP）数据

高等数学/马成东，陈丽萍主编.—北京：化学工业出版社，2006.6
教育部高职高专规划教材
ISBN 7-5025-8832-9

Ⅰ.高… Ⅱ.①马…②陈… Ⅲ.高等数学-高等学校：技术学院-教材 Ⅳ.O13

中国版本图书馆 CIP 数据核字（2006）第 071020 号

教育部高职高专规划教材
高 等 数 学
马成东 陈丽萍 主编
齐宪生 主审
责任编辑：张双进
责任校对：李 林
封面设计：潘 峰
*
化学工业出版社
教材出版中心 出版发行
（北京市朝阳区惠新里 3 号 邮政编码 100029）
购书咨询：(010)64982530
(010)64918013
购书传真：(010)64982630
http://www.cip.com.cn
*
新华书店北京发行所经销
北京市振南印刷有限责任公司印刷
三河市宇新装订厂装订
开本 787mm×1092mm 1/16 印张 16½ 字数 428 千字
2006 年 8 月第 1 版 2006 年 8 月北京第 1 次印刷
ISBN 7-5025-8832-9
定 价：25.00 元

出 版 说 明

高职高专教材建设工作是整个高职高专教学工作中的重要组成部分。改革开放以来，在各级教育行政部门、有关学校和出版社的共同努力下，各地先后出版了一些高职高专教育教材。但从整体上看，具有高职高专教育特色的教材极其匮乏，不少院校尚在借用本科或中专教材，教材建设落后于高职高专教育的发展需要。为此，1999 年教育部组织制定了《高职高专教育专门课课程基本要求》（以下简称《基本要求》）和《高职高专教育专业人才培养目标及规格》（以下简称《培养规格》），通过推荐、招标及遴选，组织了一批学术水平高、教学经验丰富、实践能力强的教师，成立了“教育部高职高专规划教材”编写队伍，并在有关出版社的积极配合下，推出一批“教育部高职高专规划教材”。

“教育部高职高专规划教材”计划出版 500 种，用 5 年左右时间完成。这 500 种教材中，专门课（专业基础课、专业理论与专业能力课）教材将占很高的比例。专门课教材建设在很大程度上影响着高职高专教学质量。专门课教材是按照《培养规格》的要求，在对有关专业的人才培养模式和教学内容体系改革进行充分调查研究和论证的基础上，充分汲取高职、高专和成人高等学校在探索培养技术应用型专门人才方面取得的成功经验和教学成果编写而成的。这套教材充分体现了高等职业教育的应用特色和能力本位，调整了新世纪人才必须具备的文化基础和技术基础，突出了人才的创新素质和创新能力的培养。在有关课程开发委员会组织下，专门课教材建设得到了举办高职高专教育的广大院校的积极支持。我们计划先用2～3年的时间，在继承原有高职高专和成人高等学校教材建设成果的基础上，充分汲取近几年来各类学校在探索培养技术应用型专门人才方面取得的成功经验，解决新形势下高职高专教育教材的有无问题；然后再用2～3年的时间，在《新世纪高职高专教育人才培养模式和教学内容体系改革与建设项目计划》立项研究的基础上，通过研究、改革和建设，推出一大批教育部高职高专规划教材，从而形成优化配套的高职高专教育教材体系。

本套教材适用于各级各类举办高职高专教育的院校使用。希望各用书学校积极选用这批经过系统论证、严格审查、正式出版的规划教材，并组织本校教师以对事业的责任感对教材教学开展研究工作，不断推动规划教材建设工作的发展与提高。

教育部高等教育司

2001 年 4 月 3 日

前　言

本教材根据教育部最新制定的《高职高专教育数学课程教学基本要求》和《高职高专教育专业人才培养目标及规格》编写。编写过程中根据高职高专数学教学的特点，结合高职高专学校高等数学教学现状、特点及职业教育的特色，在继承原有教材建设成果的基础上，充分汲取近年来高职高专院校数学课程教学改革的成功经验，切实贯彻“以应用为目的，以必需、够用为度”的原则。体现了重能力、重应用、重素质、求创新的总体思路。

本书内容包括：函数与极限、导数与微分、中值定理与导数的应用、不定积分、定积分及其应用、多元函数微分学、多元函数积分学、无穷级数、常微分方程共九章。

全书内容分模块、分层次编排。一元函数微积分为基础模块，其中微积分在经济中的应用和实例，供经济管理类、工程类各专业选用。其余各模块为应用模块，供不同专业选用。鉴于高等数学的学习需要用到较多的代数、几何、三角等初等数学知识，书后附有初等数学中的常用公式，简易积分表、习题参考答案等，供学生学习查用参考。

全书精简扼要，条理清楚，通俗易懂，例题、习题难易适度。在编写中努力体现下述特点：降低理论深度、加强应用、强化能力培养；尽可能做到深入浅出，从具体到抽象，循序渐进，注意系统性、科学性，根据共性精选内容；注重几何直观与物理解释，重视培养学生空间想像能力、抽象概括能力、逻辑推理能力。

由于本书分层次编写，既照顾到了文、理兼收的专业和数学基础差的学生，也照顾了希望专接本的学生。因此，适用于各类高职高专院校、成人高校及本科院校开办的二级职业技术学院和民办高校两年制成三年制（少学时）工程类、经济管理类各专业。

本书由马成东、陈丽萍主编；参加编写的有王福清、赵文岭、于珍、张剑波。其中第一章由王福清执笔，第二章、第三章由马成东执笔，第四章、第五章由赵文岭执笔，第六章、第七章、第八章由陈丽萍执笔，第九章由于珍执笔。齐宪生对全书进行了审阅。

由于编者水平有限，书中不妥之处，敬请读者多提宝贵意见。

编　者

2006 年 5 月

目　　录

第一章　函数与极限

初等数学主要研究不变的量和不变的图形，而高等数学主要研究变化的量和变化的图形．变量之间的依赖关系就是函数关系，函数是高等数学中最重要的基本概念之一，是微积分最基本的研究对象．

极限概念是高等数学的基本概念，微积分的其他概念，如函数的连续性、函数的导数、定积分等，都可用极限概念来表述．因此，极限概念和极限运算是本章的重点．

连续性是函数的重要性质之一，它与函数的极限是密切相关的．

通过本章的学习要掌握以下内容．

① 函数、分段函数、复合函数、反函数、初等函数等概念；

② 掌握函数的基本性质及函数定义域的计算方法；

③ 数列极限与函数极限的描述性定义，掌握极限的计算方法；

④ 掌握无穷小与极限的关系以及无穷小阶的比较；

⑤ 掌握函数连续性的定义及间断点的定义，能准确地求出函数的连续区间，找出函数的间断点并进行分类；

⑥ 能利用函数的连续性求函数的极限；

⑦ 能分析闭区间上连续函数的性质．

第一节　函　　数

一、函数

1．函数的定义

先来看两个例子．

【例 1-1】 自由落体的路程 s 与时间 t 由公式

$$s=\frac{1}{2}gt^2$$

确定，t 的值确定了，s 的值就随之确定，设落体着地的时刻为 T，则当 t 取 0 到 T 之间任何值时，由公式就计算得 s 为 0 到 $\frac{1}{2}gT^2$ 之间的某一值．

【例 1-2】 正方形的面积 s 与它的边长 x 存在确定的依赖关系

$$s=x^2 \qquad x\in R^+$$

边长 x 的值确定了，面积 s 的值就随之确定了．

上面两个例子都反映了在同一过程中有着两个互有联系的起着变化的量（这些在过程中起着变化的量，称为变量，对于在过程中保持不变的量，则称为常量）．

当第一个量在某数集内取值时，按一定的规则，第二个量在另一数集内有惟一确定的一个值与之对应，函数概念正是从这样一些事实中抽象出来的．

定义 1 设 x、y 是两个变量，D 是一个给定的数集，如果对于每个数 $x\in D$，按照某一确定的对应法则 f，都有惟一确定的数 y 与之相对应，则称 y 是 x 的函数，记作 $y=f(x)$．

数集 D 叫做这个函数的定义域. x 叫做自变量. y 叫做因变量.

当 x 取数值 $x_0\in D$ 时，与 x_0 对应的 y 的数值称为函数在点 x_0 处的函数值. 记作 $f(x_0)$. 全体函数值集合

$$f(D)=\{y|y=f(x),x\in D\}$$

称为函数 f 的值域.

如上述例 1-1 中，关系式 $s=\frac{1}{2}gt^2$ 确定了一个定义在区间 $[0, T]$ 上以 t 为自变量的函数. 例 1-2 中关系式 $s=x^2$ 则确定了一个定义在区间 $(0, +\infty)$ 上以 x 为自变量的函数.

由上述定义可知，决定一个函数必须知道定义域 D，对应法则 f 和值域 $f(D)$，而值域 $f(D)$ 是由定义域 D 通过 f 而惟一确定. 于是定义域 D 和对应法则 f 就成为确定函数的两个要素，从而记号

$$y=f(x),\qquad x\in D$$

也就表达了一个实值函数.

关于函数概念，还有以下两点值得注意.

① 两个函数相同，是指它们的定义域和对应法则分别相同. 有相同的对应法则，但定义域不同，还不能说两个函数相同. 例如，$f(x)\equiv 1$，$x\in(-\infty,+\infty)$ 和 $g(x)=\frac{x}{x}$, $x\in(-\infty,0)\cup(0,+\infty)$ 是不相同的函数，两个相同的函数，其对应法则的表达形式可能不同. 例如，$f(x)\equiv 1$，$x\in(-\infty,+\infty)$ 和 $g(x)=\sin^2x+\cos^2x$. $x\in(-\infty, +\infty)$，表面形式上不同，实际上是相同的.

② 在函数定义中，对每一个 x，只能有惟一的一个 y 与它对应，这种函数称为单值函数. 如果在函数定义中，允许同一个 x 值可以和不止一个 y 值相对应，则称它为多值函数. 但在本书范围内，只讨论单值函数.

2. 函数的表示法

表示函数的方法主要有以下三种：

(1) 解析法　当函数的对应法则用数学式子给出时，称这种表示函数的方法为解析法. 例：

$$y=x^3+3x^2+5x+4(x>1);\qquad y=\sin x+\cos x,x\in(-\infty,+\infty)$$

都是解析法表示的函数，它将是今后表示函数的主要形式.

(2) 列表法　若函数 f: $D\to M$，可用一个含有自变量 x 的值与函数 $f(x)$ 的对应值的表格来表示，则称为列表法. 通常所用的三角函数表、对数表等都是用列表法表达函数的例子.

(3) 图像法　在直角坐标系中，用一对有序实数 (x, y) 表示一个点，把这些点连接起来表示 y 与 x 之间的函数关系，这种由图像给出函数的对应法则的方法称为图像法.

3. 分段函数

一个函数也可以在其定义域的不同部分用不同的解析式表示，如

$$f(x)=\begin{cases}x^2 & x\in(0,+\infty)\\ \dfrac{1}{2} & x=0\\ x+1 & x\in(-\infty,0)\end{cases}$$

这种形式的函数，称为分段函数. 其对应法则就是：若自变量 x 的值在 $(0, +\infty)$ 内取值. 则其函数值为 $f(x)=x^2$，若 $x=0$，则有 $f(0)=\frac{1}{2}$，若 x 在 $(-\infty, 0)$ 内取值，则其函数值为 $f(x)=x+1$.

二、函数的简单性质

1. 函数的有界性

若存在某正数 k，对一切 $x\in D$，函数 $f(x)$ 有

$$|f(x)|\leqslant k,$$

就叫做函数 $f(x)$在 D 内有界.

有界函数图像的特点是它完全落在平行于 x 轴的两直线 $y=k$ 和 $y=-k$ 之间.

如三角函数 $f(x)=\sin x$，$g(x)=\cos x$ 在整个数轴上是有界的，因为对一切实数 x，有 $|\sin x|\leqslant 1$和$|\cos x|\leqslant 1$.

函数 $y=x^3$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上无界.

2. 函数的单调性

若函数 $f(x)$，$x\in D$. 对于 D 中任意两个数 x_1、x_2，当 $x_1<x_2$ 时，总有

① $f(x_1)<f(x_2)$，则称 $f(x)$ 在 D 上单调递增；

② $f(x_1)>f(x_2)$，则称 $f(x)$ 在 D 上单调递减.

满足这些条件的函数，统称为单调函数.

例如，函数 $f(x)=x^2$ 在区间 $[0,+\infty)$ 内是单调增加的，在区间 $(-\infty,0]$ 内是单调减少的；在区间 $(-\infty,+\infty)$ 内函数 $f(x)=x^2$ 不是单调的.

又例如，函数 $f(x)=x^3$ 在区间 $(-\infty,+\infty)$ 内是单调递增的.

3. 函数的奇偶性

设函数 $y=f(x)$ 的定义域 D 关于原点对称.（即若 $x\in D$，则必有 $-x\in D$）

① 若对任何 $x\in D$，有 $f(-x)=-f(x)$，称 $f(x)$ 为奇函数.

② 若对任何 $x\in D$，有 $f(-x)=f(x)$，称 $f(x)$ 为偶函数.

例如，$f(x)=x^2$ 是偶函数，因为 $f(-x)=(-x)^2=x^2=f(x)$，$f(x)=x^3$ 是奇函数，因为 $f(-x)=(-x)^3=-x^3=-f(x)$.

奇函数的图像关于原点对称. 偶函数的图像关于纵轴对称.

4. 周期函数

设函数 $y=f(x)$，若存在常数 $k\neq 0$. 使得 $f(x+k)=f(x)$恒成立. 则 $f(x)$ 叫做周期函数，k 叫做 $f(x)$ 的周期. 显然，若 k 为 $f(x)$ 的一个周期，则 $2k$，$3k$，…，也都是它的周期，故周期函数一定有无数多个周期. 通常所说周期函数的周期是指最小正周期.

例如，函数 $\sin x$，$\cos x$ 都是以 2π 为周期的周期函数；函数 $\tan x$ 是以 π 为周期的周期函数.

三、反函数

自变量与因变量的关系往往是相对的，故不仅要研究变量 y 随变量 x 变化而变化的状况，有时也要研究变量 x 随变量 y 变化而变化的状况. 例如，由静止状态自由下落的物体，其运动由函数

$$s=\frac{1}{2}gt^2\quad t\in[0,T]\tag{1-1}$$

表示，知道 t 就可算出 s. 但是，如果问题是要由物体下落的距离 s 来确定所需的时间 t. 那就要由式（1-1）解出 t，把它表示为 s 的函数：

$$t=\sqrt{\frac{2s}{g}},\quad s\in[0,H]\tag{1-2}$$

式中，H 是物体在开始下落时与地面的距离，由式（1-1）与式（1-2）这对函数，可以引出反函数的概念.

定义 2 设函数
$$y=f(x),\quad x\in D \tag{1-3}$$
其值域为 $f(D)$，若对于 $f(D)$ 中每一个值 y_0，D 中只有一个值 x_0 使得
$$f(x_0)=y_0$$
令 x_0 与 y_0 相对应，便可在 $f(D)$ 上确定一个函数，这个函数称为函数式（1-3）的反函数，记作
$$x=f^{-1}(y)\qquad y\in f(D) \tag{1-4}$$
由定义看到，函数 $f(x)$ 也是函数 $f^{-1}(y)$ 的反函数，或者说它们是互为反函数．而且 $f(x)$ 的定义域与 $f^{-1}(y)$ 的值域相同，$f(x)$ 的值域与 $f^{-1}(y)$ 的定义域相同．

注意：式（1-4）中是以 y 为自变量，x 为因变量．若按习惯仍把 x 作为自变量的记号，y 为因变量的记号，则函数 $y=f(x)$，$x\in D$ 的反函数式（1-4）可写为
$$y=f^{-1}(x),\qquad x\in f(D)$$

【例 1-3】 设函数分别为
$$y=2x+3,\qquad y=x^3$$
则它们的反函数分别为
$$x=\frac{y-3}{2},\quad x=\sqrt[3]{y}$$
按习惯可写作：$y=\dfrac{x-3}{2}$，$y=\sqrt[3]{x}$.

依照定义，如果把 $y=f(x)$ 与 $y=f^{-1}(x)$ 画在同一坐标系上，可以看出，反函数的图像与原来函数的图像关于直线 $y=x$ 是对称的，如图 1-1 所示．

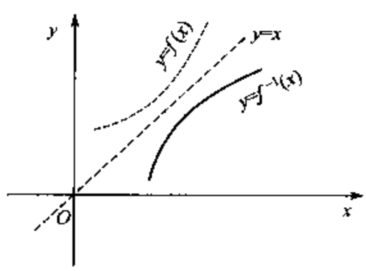


图 1-1

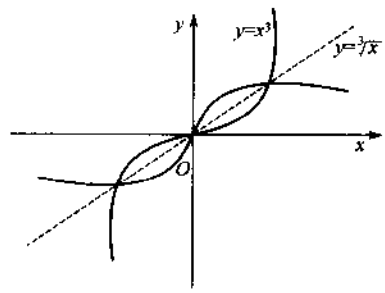


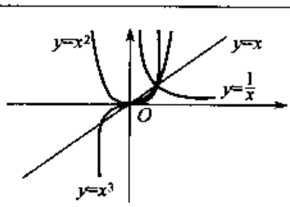
图 1-2

而图 1-2 表示函数 $y=x^3$ 及其反函数 $y=\sqrt[3]{x}$ 的图像．

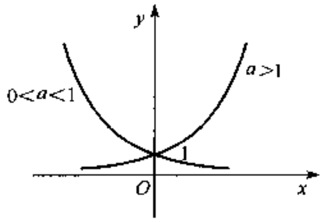
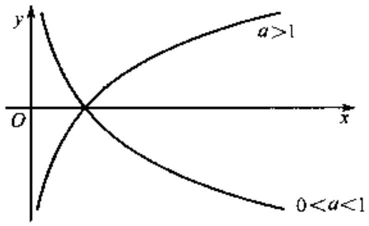
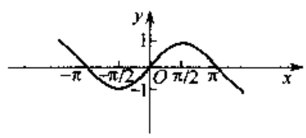
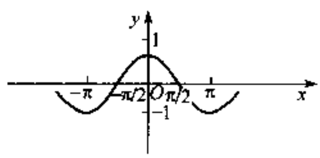
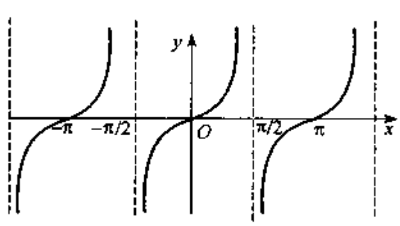
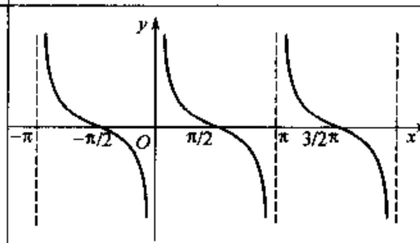
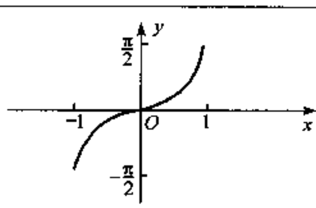
四、基本初等函数

基本初等函数是指幂函数、指数函数、对数函数、三角函数和反三角函数．下面介绍它们的一些简单性质和图像，如表 1-1 所示．

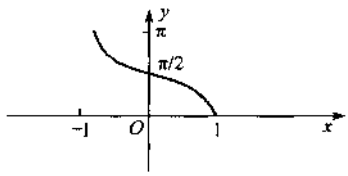
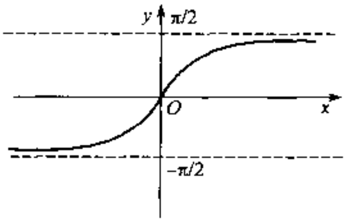
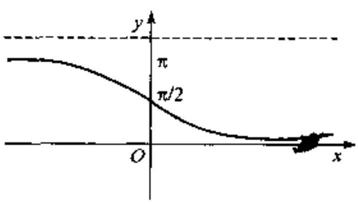
表 1-1 基本初等函数的图形及其主要性质

函　数	图　像	定义域	值　域	主要性质
幂函数 $y=x^a$（a 是常数）		随 a 的不同而不同，但在 $(0,+\infty)$ 内总有定义	随 a 的不同而不同	若 $a>0$，x^a 在 $[0,+\infty)$ 内单调增加；若 $a<0$，x^a 在 $(0,+\infty)$ 内单调减少

续表

函　数	图　像	定义域	值　域	主要性质
指数函数 $y=a^x$（a 是常数 $a>0$，$a\neq1$）		$(-\infty,+\infty)$	$(0,+\infty)$	$a^0=1$ 若 $a>1$，a^x 单调增加； 若 $0<a<1$，a^x 单调减少； 直线 $y=0$ 为函数图形的水平渐近线
对数函数 $y=\log_a x$　a 是常数 $a>0$ 且 $a\neq1$		$(0,+\infty)$	$(-\infty,+\infty)$	$\log_a 1=0$ 若 $a>1$，$\log_a x$ 单调增加； 若 $0<a<1$，$\log_a x$ 单调减少； 直线 $x=0$ 为函数图像的垂直渐近线
正弦函数 $y=\sin x$		$(-\infty,+\infty)$	$[-1,1]$	周期为 2π 奇函数
余弦函数 $y=\cos x$		$(-\infty,+\infty)$	$[-1,1]$	周期为 2π 偶函数
正切函数 $y=\tan x$		$(2n-1)\frac{\pi}{2}<x<(2n+1)\frac{\pi}{2}$（$n=0,\pm1,\pm2,\cdots$）	$(-\infty,+\infty)$	周期为 π 奇函数 直线 $x=(2n+1)\frac{\pi}{2}$ 为函数图像的垂直渐近线（$n=0,\pm1,\pm2,\cdots$）
余切函数		$n\pi<x<(n+1)\pi$（$n=0,\pm1,\pm2,\cdots$）	$(-\infty,+\infty)$	周期为 π 奇函数 直线 $x=n\pi$ 为函数图像的垂直渐近线（$n=0,\pm1,\pm2,\cdots$）
反正弦函数 $y=\arcsin x$		$[-1,1]$	$\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$	单调增加 奇函数

续表

函　数	图　像	定义域	值　域	主要性质
反余弦函数 $y=\arccos x$		$[-1,1]$	$[0,\pi]$	单调减少
反正切函数 $y=\arctan x$		$(-\infty,+\infty)$	$\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)$	单调增加 奇函数 直线 $y=\pm\frac{\pi}{2}$ 为函数图像的水平渐近线
反余切函数 $y=\operatorname{arccot} x$		$(-\infty,+\infty)$	$(0,\pi)$	单调减少 直线 $y=0$ 及 $y=\pi$ 为函数图像的水平渐近线

五、复合函数

先看一个例子，设

$$y=u^2,\ u=\sin x.$$

代入则得 $y=\sin^2 x$，所以说函数 $y=\sin^2 x$ 是由 $y=u^2$ 及 $u=\sin x$ 复合而成的复合函数.

定义 3　已知两个函数

$$y=f(u),\ u\in D,\ u=g(x),\ x\in E$$

设 $u=g(x)$ 的值域为 W. 且 $W\subset D$，那么对于每个 $x\in E$，都有确定的数值 $u\in W$ 与 x 对应. 由于 $W\subset D$，所以又通过函数 $y=f(u)$ 对应 y 的一个惟一值，因此，对于每一个 $x\in E$，变量 y 都有一个确定的值与之相对应. 这就得到一个确定在 E 上的函数. 记作

$$y=f(g(x)),\ x\in E.$$

它们由函数 $y=f(u)$ 与 $u=g(x)$ 经过复合运算所得到，故称它为复合函数. 其中 $y=f(u)$ 常称为外函数. $u=g(x)$ 称为内函数. u 为中间变量.

例如，函数 $y=\arctan u$ 及 $u=x^2$ 复合而成函数 $y=\arctan x^2$.

复合函数也可以由两个以上的函数复合而成. 例如，函数

$y=\sqrt{\tan x^2}$ 是由函数 $y=\sqrt{u}$，$u=\tan v$，$v=x^2$

相继复合而成.

注意：不是任何两个函数都可以复合成一个复合函数的.

例如，$y=\arcsin u$ 及 $u=2+x^2$ 就不能复合成一个复合函数，因为 $u=2+x^2$ 的值域 $[2,+\infty)$ 与 $y=\arcsin u$ 的定义域 $[-1,1]$ 没有交叉.

六、初等函数

由常数及基本初等函数经过有限次四则运算及有限次的复合步骤所构成，并且可以用一

个式子表示的函数，叫做初等函数．例如，

$$y=\sqrt{1+x^2},\ y=\cos^2 x,\ y=x\sin x+2^x-\frac{1}{x}$$

都是初等函数.

习题 1-1

1. 求下列函数的定义域.

(1) $f(x)=\frac{1}{3x+2}$；　(2) $f(x)=\sqrt{5-4x}$；　(3) $f(x)=\sqrt{x^2-9}$；

(4) $f(x)=\sqrt{\frac{x-3}{x+2}}$；　(5) $f(x)=\log_3(6x-9x^2)$；　(6) $f(x)=\arcsin(x-3)$.

2. 已知函数 $f(x)$ 的定义域是 $[0,1]$，求 $f(2x)$ 的定义域.

3. 下列各题中，函数 $f(x)$ 和 $g(x)$ 是否相同？为什么？

(1) $f(x)=x-1$，$g(x)=\sqrt{(x-1)^2}$；　(2) $f(x)=4\lg x$，$g(x)=2\lg x^2$；

(3) $f(x)=\sqrt{1-\sin^2 x}$，$g(x)=\cos x$；　(4) $f(x)=\lg x-2$，$g(x)=\lg\frac{x}{100}$.

4. 判断下列函数的奇偶性.

(1) $f(x)=x^3+\frac{4}{x}$；　(2) $f(x)=x^4+4x^2+5$；　(3) $f(x)=x^{\frac{1}{4}}$；

(4) $f(x)=x^2+2x+1$；　(5) $f(x)=e^x+e^{-x}$；　(6) $f(x)=(x-1)\sqrt{\frac{x+1}{x-1}}$.

5. 求下列函数的反函数.

(1) $y=\frac{1}{2}x+3$；　(2) $y=\frac{1-x}{1+x}$；　(3) $y=x^{\frac{2}{3}}$ $(x\leqslant 0)$；　(4) $y=x^2-2x+3$ $(x\leqslant 1)$.

6. 求复合函数，并求该函数在特定点的函数值.

(1) $y=u^3$，$u=\cos x$，$x=\frac{\pi}{3}$；　(2) $y=e^u$，$u=1-x^2$，$x=1$；

(3) $y=\sqrt{u}$，$u=\sin x$，$x=\frac{\pi}{2}$；　(4) $y=\ln u$，$u=x^2+x+1$，$x=-1$.

第二节　极　　限

一、数列的极限

按照一定次序排列着的一列数.

$$x_1,\ x_2,\ \cdots,\ x_n,\ \cdots$$

就叫做数列，可简记作 $\{x_n\}$，其中 x_n 称为该数列的通项.

例如：$\frac{1}{2},\ \frac{2}{3},\ \frac{3}{4},\ \cdots,\ \frac{n}{n+1},\ \cdots$；

$\frac{1}{2},\ \frac{1}{4},\ \frac{1}{8},\ \cdots,\ \frac{1}{2^n},\ \cdots$；

$1,\ -1,\ 1,\ \cdots,\ (-1)^{n+1},\ \cdots$；

都是数列的例子.

观察数列 $\left\{\frac{n}{n+1}\right\}$，可看到随着 n 的无限增大，$\frac{n}{n+1}$ 而无限地接近于 1，数列 $\left\{\frac{1}{2^n}\right\}$ 的通项随着 n 的无限增大而无限地接近于 0，这两个例子反映了一类数列的某种公共特性，即对于数列 $\{x_n\}$，存在某个常数 a，随着 n 的无限增大，x_n 能无限地接近于这个常数 a，这就

是数列极限的概念，常数 a 就称为数列 x_n 的极限，或称数列 x_n 收敛于 a. 记作

$$\lim_{n\to\infty} x_n=a \quad 或 \quad x_n\to a(n\to\infty) \tag{1-5}$$

如果数列没有极限，就说数列是发散的. 如

$\left\{\frac{1}{n}\right\}$，即 1，$\frac{1}{2}$，$\frac{1}{3}$，…，$\frac{1}{n}$，…收敛并以 0 为极限.

$\left\{3+\frac{(-1)^n}{n}\right\}$，即 2，$3+\frac{1}{2}$，$3-\frac{1}{3}$，…，$3+\frac{(-1)^n}{n}$…收敛并以 3 为极限.

$\{n^2\}$ 即 1，4，9，…，n^2…不收敛.

二、函数的极限

1. $x\to\infty$时函数 $f(x)$ 的极限

设函数 $f(x)$ 定义在 $[a, +\infty)$ 上，类似于数列的情形，研究当 x 无限增大时，对应的函数值 $f(x)$ 能否无限地接近于某一常数 A.

【例 1-4】 $f(x)=\frac{1}{x^2}$. 当 x 无限增大时，所对应的函数值 $f(x)$ 无限地接近于常数 0.

【例 1-5】 $f(x)=\arctan x$. 当 x 无限增大时它们对应的函数值 $f(x)$ 无限地接近于常数$\frac{\pi}{2}$.

称这种情形为函数 $f(x)$ 有极限，定义如下.

定义 1 设 $f(x)$ 是定义在 $[a, +\infty)$ 上的函数. A 是一个确定的数. 若当 x 无限增大时. 它们对应的函数值 $f(x)$ 无限地接近于常数 A. 则称常数 A 为函数 $f(x)$ 当 $x\to\infty$时的极限. 记作

$$\lim_{x\to\infty} f(x)=A \quad 或 \quad f(x)\to A(x\to\infty) \tag{1-6}$$

由此可联想到，当 x 无限减少时，若 $f(x)$ 的值无限地接近于某一个确定的数 A，则可相应地定义 $x\to-\infty$时，$f(x)$ 的极限.

2. $x\to x_0$ 时函数 $f(x)$ 的极限

现在讨论当 x 无限（趋于）接近于某一常数 x_0，且 $x\neq x_0$ 时，函数的变化趋势.

【例 1-6】 函数 $f(x)=3x+2$，当 x 趋于 1 时，可以看到它所对应的函数值 $f(x)$ 就趋于 5.

【例 1-7】 函数 $f(x)=\frac{x^2-9}{x-3}$ 当 $x\neq3$ 时，$f(x)=x+3$. 由此可见，当 x 不等于 3 而趋于 3 时，对应的函数值 $f(x)$ 就趋于 6.

上述两个例子和 $x\to\infty$时极限存在情形相仿. 这里是“当 x 趋于 x_0 但不等于 x_0 时，对应的函数值 $f(x)$ 就趋于某一常数 A”. 这两个“趋于”反映了 $f(x)$ 与 A 和 x 与 x_0 无限接近程度之间的联系.

定义 2 设函数 $f(x)$ 在点 x_0 的某个空心邻域内有定义. A 是常数. 若当 x 趋于 x_0 时. 它们对应的函数值 $f(x)$ 趋于常数 A. 则常数 A 就叫做函数 $f(x)$ 当 x 趋于 x_0 时的极限. 记作

$$\lim_{x\to x_0} f(x)=A \quad 或 \quad f(x)\to A(x\to x_0) \tag{1-7}$$

如：$f(x)=x+8$ 当 $x\to1$ 时，以 9 为极限，记作$\lim\limits_{x\to1}(x+8)=9$.

$f(x)=\frac{x^2-4}{x-2}$ 当 $x\to2$ 时，以 4 为极限，记作$\lim\limits_{x\to2}\frac{x^2-4}{x-2}=4$.

有些函数在其定义域上某些点，它的左侧与右侧所用的解析式不同，或函数仅在其某一

侧有定义，这时函数在这些点上的极限问题只能单侧地加以讨论.

例如函数

$$f(x)=\begin{cases}x+1 & x\geqslant 0\\ x-1 & x<0\end{cases}$$

当 x 大于 0 而趋于 0 时，按 $x+1$ 考察它的函数值的变化趋势. 当 x 小于 0 而趋于 0 时，则按 $x-1$ 考察它的变化趋势. 又如函数 $f(x)=\sqrt{1-x^2}$ 在其定义区间 $[-1,1]$ 端点 $x=\pm 1$ 处的极限，也只能考察大于 -1 而趋于 -1 的情形与小于 1 而趋于 1 的情形.

单侧极限的定义如下。

定义 3　设函数 $f(x)$ 在 $(x_0, x_0+\delta)$ [或 $(x_0-\delta, x_0)$] 内有定义. A 是一个确定的数. 若当 x 大于 x_0 而趋于 x_0 时（x 小于 x_0 而趋于 x_0 时），它们对应的函数值 $f(x)$ 趋于常数 A，则常数 A 就叫做函数 $f(x)$ 当 x 趋于 x_0 时的右（左）极限，记作

$$\lim_{x\to x_0^+} f(x)=A \quad (\lim_{x\to x_0^-} f(x)=A)\text{或 } f(x_0+0)=A(f(x_0-0)=A) \tag{1-8}$$

或

$$f(x)\to A(x\to x_0^+)(f(x)\to A(x\to x_0^-)) \tag{1-9}$$

右极限和左极限皆称为单侧极限. 容易证明：函数 $f(x)$ 当 $x\to x_0$ 时极限存在的充分必要条件是左极限及右极限存在且相等，即

$$\lim_{x\to x_0^+} f(x)=\lim_{x\to x_0^-} f(x)=A \tag{1-10}$$

因此，即使 $f(x_0-0)$ 和 $f(x_0+0)$ 都存在，但它们不相等，则 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$ 仍不存在.

【例 1-8】　函数

$$f(x)=\begin{cases}x-1 & x<0\\ 0 & x=0\\ x+1 & x>0\end{cases}$$

当 $x\to 0$ 时，$f(x)$ 的极限不存在.

三、极限运算法则

该部分主要是建立极限的四则运算法则. 通过这些法则. 可以求出某些函数的极限. 下面的定理记号 lim 下而没有标明自变量的变化过程. 实际上对 $x\to x_0$ 及 $x\to\infty$ 都是成立的.

定理 1　若 $\lim f(x)=A$, $\lim g(x)=B$. 则 $\lim[f(x)\pm g(x)]$ 存在，且

$$\lim[f(x)\pm g(x)]=\lim f(x)\pm\lim g(x)=A\pm B \tag{1-11}$$

该定理可推广到有限个函数的情形. 若 $\lim f_i(x)$ $(i=1, 2, \cdots, n)$ 都存在，则

$$\lim[f_1(x)\pm f_2(x)\pm\cdots\pm f_n(x)]=\lim f_1(x)\pm\lim f_2(x)\pm\cdots\pm\lim f_n(x)$$

定理 2　若 $\lim f(x)=A$，$\lim g(x)=B$，则 $\lim[f(x)\cdot g(x)]$ 存在，且

$$\lim[f(x)\cdot g(x)]=\lim f(x)\cdot\lim g(x)=A\cdot B \tag{1-12}$$

该定理可推广到有限个函数的情形，若 $\lim f_i(x)(i=1,2,\cdots,n)$都存在，则

$$\lim[f_1(x)\cdot f_2(x)\cdots f_n(x)]=\lim f_1(x)\cdot\lim f_2(x)\cdots\lim f_n(x) \tag{1-13}$$

推论 1　$$\lim[cf(x)]=c\lim f(x)\quad (c\text{ 是常数}) \tag{1-14}$$

即求极限时，常数因子可以提到极限符号外而去.

推论 2　$\lim[f(x)]^n=[\lim f(x)]^n$　(n 是正整数)

定理 3　若 $\lim f(x)=A$，$\lim g(x)=B$. 且 $B\neq 0$，则 $\lim\dfrac{f(x)}{g(x)}$存在，且

$$\lim\frac{f(x)}{g(x)}=\frac{\lim f(x)}{\lim g(x)}=\frac{A}{B} \tag{1-15}$$