福建名校系列
高中新教材同步导学丛书

共享名校资源
齐奏高考凯歌

把名校搬回家
把名师请进家

名校学案

读“福建名校”
上北大、清华

缔造高考传奇
奔向美好前程

主　　编：郑　勇
执行主编：林　风

数学

高中二年级（上）

福建教育出版社　《名校学案》编委会

高中新教材同步导学丛书

名校学案

高中二年级(上) **数学**

主　　编：郑　勇
执行主编：林　风

《名校学案》编委会编

福建教育出版社

图书在版编目（CIP）数据

名校学案．数学．高中二年级．上/《名校学案》编委会．—福州：福建教育出版社，2004.8（2006.7 重印）
（高中新教材同步导学丛书）
ISBN 7－5334－3947－3

Ⅰ．名… Ⅱ．名… Ⅲ．数学课—高中—教学参考资料 Ⅳ．G634

中国版本图书馆CIP数据核字（2004）第080509号

责任编辑：黄旭凌
封面设计：谢从荣　季凯闻

高中新教材同步导学丛书
名校学案・数学
高中二年级（上）
《名校学案》编委会
主　编　郑　勇

出　版	福建教育出版社 （福州梦山路27号　邮编：350001　电话：0591－83726971 83725592　传真：83726980　网址：www.fep.com.cn）
经　销	福建闽教图书有限公司
印　刷	闽侯青圃印刷厂 （闽侯青口镇　邮编：350119）
开　本	889毫米×1194毫米　1/16
印　张	11
字　数	414千
版　次	2005年8月第2版 2006年7月第2次印刷
书　号	ISBN 7－5334－3947－3/G・3144
定　价	13.20元

如发现本书印装质量问题，影响阅读，
请向出版科（电话：0591－83726019）调换。

本册执行主编简介

林风： 福州三中特级教师、中学高级教师、福建省中学骨干教师、福建省“百千万工程人选”，福州市骨干教师培训班导师、福州市学科校际教研员、福州市高中数学学科中心组成员，福州市名师工作室(数学)，现任福建省数学学会理事，福州市数学学会常务理事、副秘书长。在全国、省级刊物上发表论文数十篇，主编和参加编写的教学用书有三十多本，制作的计算机课件多件在全国、省级评比中获一、二等奖，撰写的十多篇论文在全国、省级、市级以上论文评选中获一、二等奖，参加指导的学生在全国、省级数学竞赛中多次获一等奖、二等奖。

高中新教材同步导学丛书	
语文 高中一年级（上、下）	地理 高中三年级（全一册）
语文 高中二年级（上、下）	思想政治 高中一年级（上、下）
语文 高中三年级（全一册）	思想政治 高中二年级（上、下）
数学 高中一年级（上、下）	思想政治 高中三年级（全一册）
数学 高中二年级（上、下）	物理 高中一年级（全一册）
数学 高中三年级（选修Ⅰ）(全一册)	物理 高中二年级（全一册）
数学 高中三年级（选修Ⅱ）(全一册)	物理 高中三年级（全一册）
英语 高中一年级（上、下）	化学 高中一年级（全一册）
英语 高中二年级（上、下）	化学 高中二年级（全一册）
英语 高中三年级（全一册）	化学 高中三年级（全一册）
生物 高中二年级（上、下）	中国近代现代史（上、下）
生物 高中三年级（全一册）	世界近代现代史（上、下）
地理 高中一年级（上、下）	中国古代史（全一册）
地理 高中二年级（全一册）	

高中毕业班总复习指要	
语文（高中毕业班总复习指要）	数学（高中毕业班总复习指要）
英语（高中毕业班总复习指要）	物理（高中毕业班总复习指要）
化学（高中毕业班总复习指要）	思想政治（高中毕业班总复习指要）
历史（高中毕业班总复习指要）	地理（高中毕业班总复习指要）
生物（高中毕业班总复习指要）	

高考适应性训练	
语文（高考适应性训练）	数学（高考适应性训练）
英语（高考适应性训练）	物理（高考适应性训练）
化学（高考适应性训练）	思想政治（高考适应性训练）
历史（高考适应性训练）	地理（高考适应性训练）
生物（高考适应性训练）	

高考测试与评价	
语文（高考测试与评价）	数学（高考测试与评价）
英语（高考测试与评价）	物理（高考测试与评价）
化学（高考测试与评价）	思想政治（高考测试与评价）
历史（高考测试与评价）	地理（高考测试与评价）
生物（高考测试与评价）	

泉州第一中学

敦 品 力 学

校长：

泉州第五中学

严谨 勤奋 求实 进取

校长：

龙岩第一中学

弘毅守志，任重道远

校长：

南平第一中学

诚 毅 勤 实

校长：

三明第二中学

团结 严谨 求实 创新

校长：

此为试读，需要完整PDF请访问：www.ertongbook.com

《福建名校系列》丛书编委名单

主　　任：李　迅、陈江汉

执行主任：黄　旭

编　　委：（以姓氏笔画为序）

任　勇（厦门第一中学　校长）
李　迅（福州第一中学　校长）
吴永源（南平第一中学　校长）
邱　伟（三明第二中学　校长）
陈江汉（厦门双十中学　校长）
林　群（龙岩第一中学　校长）
郑　勇（福州第三中学　校长）
洪立强（泉州第五中学　校长）
翁乾明（福建师大附中　校长）
黄　旭（福建教育出版社　副社长、副总编辑）
赖东升（泉州第一中学　校长）

出版说明

名校就是品牌，名校就是旗帜，名校代表了某种方向。名校的精髓是名师。为此，福建教育出版社组织了一批名校的名师合力编写了《名校学案——高中新教材同步导学》丛书。丛书以培养能力为导向，以新课改理念为指针，以高考获胜为目标，以期让优秀学生潜能得到最大限度发挥，让比较好的学生更上一个台阶，让一般学生进入良好的行列。

饱孕新一代教改理念的新教材将逐步进入校园。在这场“教育改革”中，考试内容和模式也将逐渐变化，新的学习策略正在生成。新陈代谢之际，各大名校的教学优势、学习策略将成为“杀手锏”。编写这套教辅读物，就是为了使这种学习策略能够成为众多学生容易共享的资源。同时，精心打造一套优质的高中同步导学的教辅品牌也是我们多年的夙愿。

市场上教辅读物林立。而在我省高考实行自主命题形势下，由省内各学科名师主理的直接备战高考的辅导用书却是凤毛麟角。众所周知，省内一线名师是我省高考自主命题人才库的重要组成部分，因此，我们这部丛书具有不言而喻的实战性和权威性。

本丛书与教材同步配套，从高一到高三全程贯通，涵盖各科，丛书结合随堂教学并注重导学，着力于基础知识基本能力的全面掌握，并结合渗透学生分析问题和解决问题能力的培养，主要面向一、二级达标校的学生。同时以点带面，全面提升其他各级中学教学水平和学业成绩，力求为提高我省高中教学质量和高考成绩作出贡献。

丛书力求体现教改新理念，又避免花哨，从栏目设置到内容编写，做到简明实用，返璞归真，从而真正体现了学生的主体地位。

本书以章或单元、节或课为单位编写；结构上分为“学法导航”(含重点难点提示和典型例题剖析)，“同步训练”，“单元小结”，“单元检测”，“综合测试”，以及详细的“参考答案”。在行文上，使用学生乐于接受的平易晓畅的语言。选题上体现时代感，突出人文性。

本书由林风、黄炳锋、邵东升编写，由林风统稿。

我们将密切跟踪教改动态，了解高考新情况，对丛书加以修改完善，同时欢迎读者及时指出书中的疏误，便于我们改正，为广大师生提供更优质的服务。

福建教育出版社

2005 年 5 月

学习笔记

目　录

Contents

学习笔记

第六章　不等式

第一节　不等式的性质

学法导航

重点难点提示

本节的重点是不等式的基本性质,推论及证明;难点是不等式性质中各字母的限制条件及运用不等式的性质解决一些实际问题;关键是要弄清每一性质的条件和结论,注意条件的放宽和加强,以及条件和结论之间的相互关系.

不等式的性质是证明不等式和解不等式的理论基础,不仅要正确理解,而且要熟练掌握,融会贯通.

典型例题剖析

例 1　对于实数 a、b、c,判断下列命题的真假.

(1)若 $a>b$,则 $ac<bc$;

(2)若 $a>b$,则 $ac^2>bc^2$;

(3)若 $ac^2>bc^2$,则 $a>b$;

(4)若 $a<b<0$,则 $a^2>ab>b^2$;

(5)若 $a<b<0$,则 $\frac{1}{a}<\frac{1}{b}$;

(6)若 $a<b<0$,则 $\frac{b}{a}>\frac{a}{b}$;

(7)若 $a<b<0$,则 $|a|>|b|$;

(8)若 $a<b<0$,则 $\frac{b}{a}<1$;

(9)若 $c>a>b>0$,则 $\frac{a}{c-a}>\frac{b}{c-b}$;

(10)若 $a>b$,$\frac{1}{a}>\frac{1}{b}$,则 $a>0$,$b<0$.

解　(1)因 c 的正负或是否为零并不知道,无法判断 ac 与 bc 的大小,所以是假命题;

(2)因 $c^2\geqslant 0$,所以 $c=0$ 时有 $ac^2=bc^2$,故为假命题;

(3)由 $ac^2>bc^2$ 知 $c\neq 0$,$c^2>0$,所以是真命题;

(4)由 $\begin{cases}a<b\\a<0\end{cases}\Rightarrow a^2>ab$,又 $\begin{cases}a<b\\b<0\end{cases}\Rightarrow ab>b^2$,所以是真命题;

(5)由 $a<b<0\Rightarrow\frac{1}{ab}>0$,由 $\begin{cases}a<b<0\\\frac{1}{ab}>0\end{cases}\Rightarrow\frac{1}{a}>\frac{1}{b}$,所以是假命题;

(6)由上题可知

$$a<b<0\Rightarrow\frac{1}{a}>\frac{1}{b}\Rightarrow\begin{cases}-a>-b>0\\-\frac{1}{b}>-\frac{1}{a}>0\end{cases}\Rightarrow\frac{a}{b}>\frac{b}{a},$$

所以是假命题;

(7)由数及绝对值的概念可知为真命题;

(8)由 $a<b<0\Rightarrow -a>-b>0\Rightarrow\frac{-b}{-a}=\frac{b}{a}<1$,所以是真命题;

(9)因 $-a<-b\Rightarrow 0<c-a<c-b\Rightarrow\frac{1}{c-a}>\frac{1}{c-b}>0$,

又有 $a>b>0$,$\therefore\frac{a}{c-a}>\frac{b}{c-b}$是真命题;

(10)因 $\begin{cases}a-b>0\\\frac{1}{a}-\frac{1}{b}>0\end{cases}\Rightarrow\frac{b-a}{ab}>0\Rightarrow ab<0$,

又有 $a>b$,所以 $a>0$,$b<0$ 是真命题.

评析　通过本组例题可以加深对不等式性质的理解,这里有许多似是而非的问题一定要弄清弄懂,(1)~(4)是考查对性质4的理解,这是应用性质定理时易错的地方,特别要注意在不等式两边同乘(除)一数(式)时,必须能确定是正、是负、还是零.(5)~(10)是涉及命题真假的问题,如果是真命题,应说明理由或进行推证,在推证过程中应紧扣定义性质,并要注意特殊情况.对于假命题要找出错因,并经过推导修改成真命题,这对深刻理解、牢固掌握知识是大有益处的.

例 2　(1999年上海高考题)若 $a<b<0$,则下列结论中正确的命题是(　　).

A. $\frac{1}{a}>\frac{1}{b}$和$\frac{1}{|a|}>\frac{1}{|b|}$均不能成立

B. $\frac{1}{a-b}>\frac{1}{b}$和$\frac{1}{|a|}>\frac{1}{|b|}$均不能成立

C. 不等式$\frac{1}{a-b}>\frac{1}{a}$和$(a+\frac{1}{b})^2>(b+\frac{1}{a})^2$均不能成立

D. 不等式$\frac{1}{|a|}>\frac{1}{|b|}$和$(a+\frac{1}{b})^2>(b+\frac{1}{a})^2$均不能成立

解　$\because b<0$,$\therefore -b>0$,$\therefore a-b>a$.

又$\because a-b<0$,$a<0$,$\therefore\frac{1}{a-b}<\frac{1}{a}$,故$\frac{1}{a-b}>\frac{1}{a}$不成立.

$\because a<b<0$,$\therefore|a|>|b|$,$\therefore\frac{1}{|a|}<\frac{1}{|b|}$,故$\frac{1}{|a|}>\frac{1}{|b|}$不成立.

另外,A 中$\frac{1}{a}>\frac{1}{b}$成立,C 与 D 中$(a+\frac{1}{b})^2>(b+\frac{1}{a})^2$成立.

学习笔记

其证明如下：$\because a<b<0,\frac{1}{b}<\frac{1}{a}<0$,

$\therefore a+\frac{1}{b}<b+\frac{1}{a}<0,\therefore |a+\frac{1}{b}|>|b+\frac{1}{a}|$.

故$(a+\frac{1}{b})^2>(b+\frac{1}{a})^2$. 当$a=-2,b=-1$时，代入B检验知，命题均是假命题，因此选B.

评析 不等式性质是高考的考点之一．只有熟悉不等式的基本性质，才能心明眼亮，判断准确．

例3 设$60<a<84,28<b<33$，求$a+b,a-b,\frac{a}{b}$的范围．

解 由$\begin{cases}60<a<84\\28<b<33\end{cases}$得$88<a+b<117$,

由$\begin{cases}-33<-b<-28\\60<a<84\end{cases}$得$27<a-b<56$,

又$\frac{1}{33}<\frac{1}{b}<\frac{1}{28},\therefore\frac{20}{11}<\frac{a}{b}<3$.

评析 这是一个典型的不等式性质应用的问题，在许多数学问题中都要涉及到，务必要准确掌握．

例4 设a,b是两个实数，给出下列条件：①$a+b>1$；②$a+b=2$；③$a+b>2$；④$a^2+b^2>2$；⑤$ab>1$. 其中能推出“a,b中至少有一个数大于1”的条件是(　　).

A.②③　　B.①②③　　C.③④⑤　　D.③

解 此题③必符合题意．现考察②，取$a=b=1$，满足$a+b=2$，但a,b都不大于1，故排除A、B；考察⑤，取$a=-1,b=-2$，满足$ab>1$，但a,b都小于1，排除C，选D.

评析 作为选择题，解答讲究“巧”、“快”、“准”．解答此类问题最常用的方法就是特值法．当命题对某些特殊情况不成立时就可以断定命题是假命题，要判断一个命题是真命题则要做一般性的证明．

例5 (2003年济宁市第二次模拟考试题)若$m、n$是自然数，则$m+n>mn$成立的充要条件是(　　).

A. $m、n$都等于1　　B. $m、n$都不等于2

C. $m、n$都大于1　　D. $m、n$至少有一个等于1

解 $\because m+n>mn,\therefore(m-1)(n-1)<1$,

$\because m,n\in\mathbf{N},\therefore(m-1),(n-1)\in\{$非负整数$\}$.

则$(m-1)(n-1)=0,\therefore m=1$或$n=1$，故选D.

评析 寻找充要条件就是要进行命题的等价变换，本题解法中“$\because m+n>mn,\therefore(m-1)(n-1)<1$”是巧妙的转化．

例6 实数$a、b、c、d$满足下列条件：①$d>c$；②$a+b=c+d$；③$a+d<b+c$. 将$a、b、c、d$按照从大到小的次序排列，并证明你的结论．

解 $\left.\begin{matrix}③\Rightarrow d-b<c-a\\②\Rightarrow c-a=b-d\end{matrix}\right\}\Rightarrow\begin{cases}d-b<b-d\\a-c<c-a\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}d<b,\\a<c.\end{cases}$再由①得$b>d>c>a$.

评析 本题条件较多，从何处入手是解题的关键．如果两两比较，证明就复杂了，因此要找到一个合理的程序(即先从③②着手)，就可以轻松解题，一气呵成．

例7 若二次函数$y=f(x)$的图象过原点，且$1\leqslant f(-1)\leqslant2,3\leqslant f(1)\leqslant4$，求$f(-2)$的范围．

解法1 $\because$二次函数$y=f(x)$的图象过原点，

$\therefore$设$f(x)=ax^2+bx(a\neq0)$,

$\therefore\begin{cases}f(1)=a+b,\\f(-1)=a-b;\end{cases}$

$\therefore\begin{cases}a=\frac{1}{2}[f(1)+f(-1)],\\b=\frac{1}{2}[f(1)-f(-1)].\end{cases}$

$\because f(-2)=4a-2b=3f(-1)+f(1)$.

又$\because1\leqslant f(-1)\leqslant2,3\leqslant f(1)\leqslant4$,

$\therefore6\leqslant f(-2)\leqslant10$.

解法2 设$f(x)=ax^2+bx(a\neq0)$，由已知得

$\begin{cases}3\leqslant f(1)=a+b\leqslant4,\\1\leqslant f(-1)=a-b\leqslant2.\end{cases}$又$f(-2)=4a-2b$,

设存在实数x,y使得$4a-2b=x(a+b)+y(a-b)$，即$4a-2b=(x+y)a+(x-y)b$,

$\therefore\begin{cases}4=x+y,\\-2=x-y;\end{cases}$即$\begin{cases}x=1,\\y=3.\end{cases}$

$\therefore3\leqslant a+b\leqslant4,3\leqslant3(a-b)\leqslant6$,

$\therefore6\leqslant f(-2)=4a-2b=(a+b)+3(a-b)\leqslant10$.

评析 同向不等式只能相加，不能相减．解法2的巧妙在于对所求的问题用已知不等式表示，然后利用同向不等式性质求解．

同步训练6.1

A

1. 下列命题中正确的是(　　).

A. 若$a>b$则$a^2>b^2$　　B. 若$a^2>b^2$则$a>b$

C. 若$a>|b|$则$a^2>b^2$　　D. 若$a>b$则$a^2>b^2$

2. $a>b,c\in\mathbf{R}$，则(　　).

A. $(ac)^2\geqslant(bc)^2$　　B. $\frac{a}{c^2}>\frac{b}{c^2}$

C. $ac^2\geqslant bc^2$　　D. $\frac{c^2}{a}<\frac{c^2}{b}$

3. 若$a<b<0,d>c>0$，则下列不等式中错误的是(　　).

A. $\frac{c}{a}>\frac{c}{b}$　　B. $ad>bc$

C. $a^2>b^2$　　D. $a-d<b-c$

4. (2001年上海春季高考题)若$a、b$为实数，则$a>b>0$是$a^2>b^2$的(　　).

A. 充分不必要条件　　B. 必要不充分条件

C. 充要条件　　D. 既非充分条件也非必要条件

5. 下列命题中正确的是(　　).

A. 若$x^2>x$，则$x>0$　　B. 若$x>0$，则$x^2>x$

C. 若$x<0$，则$x^2>x$　　D. 若$x^2>x$，则$x<0$

6.下列命题正确的是(　　).

A. $a>b\Rightarrow ac^2>bc^2$

B. $a-b<0,c>1\Rightarrow\frac{c-1}{b}<\frac{c-1}{a}$

C. $a>b,c>d\Rightarrow(a-b)^2>(d-c)^2$

D. $a>b>0,c>d>0\Rightarrow\frac{a}{d}>\frac{b}{c}$

7.若 a、$b\in\mathbf{R}$,且 $a>b$,则(　　).

A. $a^2>b^2$　　B. $\frac{b}{a}<1$

C. $\lg(a-b)>0$　　D. $(\frac{1}{2})^a<(\frac{1}{2})^b$

8. $2^{\cos 2}$与 $\log_{\frac{1}{2}}\sin 2$ 的大小关系是________.

9.已知 $a<b<0,c>0$,在下列空白处填上恰当的不等号:

①若 $ad>bd$,则 d ____ 0;　②$(a-2)c$ ____ $(b-2)c$;

③$\sqrt{|a|}$ ____ $\sqrt{|b|}$;　④$\frac{c}{a}$ ____ $\frac{c}{b}$.

10.已知 $12<a<60,15<b<36$,则 $a-b,\frac{a}{b}$ 的取值范围是________.

11.用不等式的性质说明:

(1)已知 $a>b>0,c>d>0$,那么$\frac{a}{d}>\frac{b}{c}$;

(2)已知 $a>b>0,d<c<0$,那么$\frac{\sqrt{a}}{c}<\frac{\sqrt{b}}{d}$.

12.已知 $-\frac{\pi}{2}\leqslant\alpha<\beta\leqslant\frac{\pi}{2}$,求$\frac{\alpha-\beta}{2}$的范围.

13.已知 $x>0,x\neq1,f(x)=\log_x 3x,g(x)=2\log_x 2$,试比较 $f(x)$与$g(x)$的大小.

B

1.设$\frac{1}{a}<\frac{1}{b}<0$,则有(　　).

A. $a^2>b^2$　　B. $a+b>2\sqrt{ab}$

C. $ab<b^2$　　D. $a^2+b^2>|a|+|b|$

2.若 $-1<\alpha<\beta<1$,则下列各式中成立的是(　　).

A. $-2<\alpha-\beta<0$　　B. $-2<\alpha-\beta<-1$

C. $-1<\alpha-\beta<0$　　D. $-1<\alpha-\beta<1$

3.(1999 年成都市毕业班第一次诊断性检测题)若 $m<n,p<q$ 且$(p-m)(p-n)>0,(q-m)(q-n)<0$,则 m,n,p,q 的大小顺序是(　　).

A. $m<p<q<n$　　B. $p<m<q<n$

C. $p<m<n<q$　　D. $m<p<n<q$

4.已知 $xz^2>yz^2(z\neq0)$则下面各式中成立的是(　　).

A. $z^x>z^y$　B. $\frac{1}{x}<\frac{1}{y}$　C. $\frac{1}{x}\neq\frac{1}{y}$　D. $x^z>y^z$

5.(2003 年北京春季高考题)设 a、b、c、$d\in\mathbf{R}$,且 $a>b,c>d$,则下列结论中正确的是(　　).

A. $a+c>b+d$　　B. $a-c>b-d$

C. $ac>bd$　　D. $\frac{a}{d}>\frac{b}{c}$

6.若 $a-c>b-d,c>d$,则(　　).

A. $a>b$　　B.已知条件矛盾

C. a、b 大小不定　　D.仅当 c、$d<0$ 时,$a>b$

7.已知 $a>b,b>c$,则下列不等式不成立的是(　　).

A. $a+b>b+c$　　B. $a-b>b-c$

C. $a(b-c)>b(b-c)$　　D. $\frac{a}{b-c}>\frac{b}{b-c}$

8.(2004 年北京高考题)如果 a、b、c 满足 $c<b<a$ 且 $ac<0$,那么下列选项中不一定成立的是(　　).

A. $ab>ac$　　B. $c(b-a)>0$

C. $cb^2<ab^2$　　D. $ac(a-c)<0$

9.若 $a>b>c,a+b+c=0$,则有(　　).

A. $ab>ac$　B. $ac>bc$　C. $ab>bc$　D.以上皆错

10.已知 $a\geqslant1$,则$\sqrt{a+1}-\sqrt{a}$与$\sqrt{a}-\sqrt{a-1}$的大小关系是________.

11.在"充分、必要、充要、非充分非必要"中选择适当的词句填空:

(1) $a>b,c>d$ 是 $a+c>b+d$ 的____条件;

(2) $a+b>2,ab>1$ 是 $a>1$ 且 $b>1$ 的____条件;

(3) $\frac{a}{b}>1$ 是 $a>b$ 的____条件;

(4) $|x-y|<2\varepsilon$ 是$|x-a|<\varepsilon$ 且$|y-a|<\varepsilon$ 的____条件.

12.(1999 年孝感质检题)已知 $a>b,c<d$,
求证:$a-c>b-d$.

13.已知 $a,b\in\mathbf{R}$,求使不等式 $a>b$ 与$\frac{1}{a}>\frac{1}{b}$同时成立的充要条件.

学习笔记

此为试读,需要完整PDF请访问: www.ertongbook.com

学习笔记

*14. 有一所学校，原来是一个长方形布局，市政府对这所学校进行规划，需改成正方形布局，但要求要么保持原面积不变，要么保持原周长不变，那么这所学校应选哪种布局最有利？

第二节　比较法

学法导航

重点难点提示

本节的重点是不等式证明的比较法；难点是在比较过程中，如何进行式子的化简，比较法是证明不等式最常用、最基本的方法，比较法有求差比较与求商比较两种基本途径．学习中要注意以下两点：

1. 由于 $a>b\Leftrightarrow a-b>0$，因此证明 $a>b$，只需证明 $a-b>0$，其步骤是①作差；②变形，整理成积或完全平方的形式，目的是便于确定符号；③判断，下结论．求差比较法的变形技巧主要有：转化与配方、因式分解与分类讨论、判别式法．该比较法尤其适用于具有多项式结构特征的不等式的证明．

2. 由于当 $b>0$ 时，$a>b\Leftrightarrow \frac{a}{b}>1$，因此求商比较法的基本思路是：①作商；②将商变形；③判断商与 1 的大小关系；④得出结论．当然一定要注意 $b>0$ 的前提条件．该法尤其适用于幂、指数不等式的证明．

典型例题剖析

例 1　已知 $x\neq 0$，比较 $(x^2+1)^2$ 与 x^4+x^2+1 的大小．

分析　由于两个代数式是多项式形式，所以比较大小时以求差比较法为好．

解　$\because (x^2+1)^2-(x^4+x^2+1)$

$=x^4+2x^2+1-x^4-x^2-1=x^2$

又 $\because x\neq 0$，$\therefore x^2>0$，$\therefore (x^2+1)^2>x^4+x^2+1$.

评析　应用求差比较法，当差式的符号不能确定时应分类讨论．本题若没有 $x\neq 0$ 这一条件，则 $x^2\geqslant 0$，从而 $(x^2+1)^2$ 大于或等于 x^4+x^2+1.

例 2　已知 a、b 都是正数，并且 $a\neq b$，

求证：$a^5+b^5>a^2b^3+a^3b^2$.

证明　$(a^5+b^5)-(a^2b^3+a^3b^2)=(a^5-a^3b^2)+(b^5-a^2b^3)=a^3(a^2-b^2)-b^3(a^2-b^2)=(a^2-b^2)(a^3-b^3)=(a-b)^2(a+b)(a^2+ab+b^2)$

$\because a,b$ 都是正数，$\therefore a+b, a^2+ab+b^2>0$,

又 $\because a\neq b$，$\therefore (a-b)^2>0$,

$\therefore (a-b)^2(a+b)(a^2+ab+b^2)>0$.

即 $a^5+b^5>a^2b^3+a^3b^2$.

评析　在两个代数式的大小比较过程中，常常要进行式子的变换，因此熟悉和掌握常用的数式的变换的公式是很重要的．差式比较法的变形技巧常常要涉及因式分解、配方法、判别式法等．

本题的一般性结论是：若 $a>0,b>0,m>0,n>0$，则 $a^{m+n}+b^{m+n}\geqslant a^mb^n+a^nb^m$.

例 3　设 $a>b>0$，$m=\sqrt{a}-\sqrt{b}$，$n=\sqrt{a-b}$，比较 m,n 大小．

解　$\because a>b>0$，$\therefore \sqrt{a}>\sqrt{b}$.

$\therefore \sqrt{a}-\sqrt{b}>0$，$\sqrt{ab}>b$.

$\because (\sqrt{a}-\sqrt{b})^2-(\sqrt{a-b})^2$

$=a+b-2\sqrt{ab}-(a-b)=2(b-\sqrt{ab})<0$

$\therefore (\sqrt{a}-\sqrt{b})^2<(\sqrt{a-b})^2$,

$\therefore \sqrt{a}-\sqrt{b}<\sqrt{a-b}$，即 $m<n$.

评析　本题是处理根式大小比较的一种有效的方法，即先比较其平方的大小，再确定原来两式的大小．

例 4　已知 $a>2,b>2$，试比较 $a+b$，ab 的大小．

解法 1　$\because ab-(a+b)=(a-1)(b-1)-1$.

$\because a>2,b>2$，$\therefore a-1>1,b-1>1$,

$\therefore (a-1)(b-1)>1$，$\therefore (a-1)(b-1)-1>0$,

$\therefore ab-(a+b)>0$，$\therefore ab>a+b$.

解法 2　$\frac{a+b}{ab}=\frac{1}{a}+\frac{1}{b}$，$\because a>2,b>2$,

$\therefore \frac{1}{a}<\frac{1}{2},\frac{1}{b}<\frac{1}{2}$,

$\therefore \frac{1}{a}+\frac{1}{b}<\frac{1}{2}+\frac{1}{2}=1$,

又 $ab>4>0$，$\therefore ab>a+b$.

评析　比较法的两种证法，步骤清楚，解题中的变形方法各有特点，熟悉各种式子的常用变形方法才能融会贯通，解题时才会水到渠成．

例 5　设 $a>0$ 且 $a\neq 1$ 比较 $\log_a(a^3+1)$ 与 $\log_a(a^2+1)$ 的大小．

解　$(a^3+1)-(a^2+1)=a^2(a-1)$

当 $0<a<1$ 时，

$\because a^2>0,a-1<0$，则 $a^3+1<a^2+1$,

$\therefore \log_a(a^3+1)>\log_a(a^2+1)$;

当 $a>1$ 时，

$\because a^2>0,a-1>0$，则 $a^3+1>a^2+1$,

$\therefore \log_a(a^3+1)>\log_a(a^2+1)$;

$\therefore$ 总有 $\log_a(a^3+1)>\log_a(a^2+1)$.

例 6　设 $a,b\in \mathbf{R}^+$，求证：$a^ab^b\geqslant (ab)^{\frac{a+b}{2}}$.

证明　作商比较 $\frac{a^ab^b}{(ab)^{\frac{a+b}{2}}}=a^{\frac{a-b}{2}}b^{\frac{b-a}{2}}=(\frac{a}{b})^{\frac{a-b}{2}}$.

当 $a=b$ 时，$(\frac{a}{b})^{\frac{a-b}{2}}=1$，即 $a^ab^b=(ab)^{\frac{a+b}{2}}$，

当 $a>b>0$ 时，$\frac{a}{b}>1$，$\frac{a-b}{2}>0$，$\therefore(\frac{a}{b})^{\frac{a-b}{2}}>1$，

即 $a^ab^b>(ab)^{\frac{a+b}{2}}$；

当 $b>a>0$ 时，$0<\frac{a}{b}<1$，$\frac{a-b}{2}<0$，

$\therefore(\frac{a}{b})^{\frac{a-b}{2}}>1$，

即 $a^ab^b>(ab)^{\frac{a+b}{2}}$；综上知 $a^ab^b\geqslant(ab)^{\frac{a+b}{2}}$.

评析　求商后表达式不能确定是否大于(小于、等于)1时要进行分类讨论.对于分式型、指数型的表达式的大小比较，一般可以优先考虑用求商比较法.

例7　已知 $a,b,c\in\mathbf{R}$，求证：$a^2+b^2+c^2+4\geqslant ab+3b+2c$.

证法1　$a^2+b^2+c^2+4-(ab+3b+2c)$

$=\frac{1}{4}[4a^2+4b^2-4ab-12b+4c^2-8c+16]$

$=\frac{1}{4}[(2a-b)^2+3(b-a)^2+4(c-1)^2]\geqslant0.$

即原不等式成立.

证法2　$a^2+b^2+c^2+4-(ab+3b+2c)$

$=a^2-ab+b^2+c^2+4-3b-2c.$

设 $y=a^2-ba+b^2+c^2+4-3b-2c$，

$\Delta=(-b)^2-4\times1\times(b^2+c^2+4-3b-2c)$

$=b^2-4b^2-4c^2-16+12b+8c$

$=-3(b^2-4b+4)-4(c^2-2c+1)$

$=-3(b-2)^2-4(c-1)^2\leqslant0.$

二次项系数为 $1>0$. $\therefore y$ 恒大于等于零. $\therefore a^2+b^2+c^2+4\geqslant ab+3b+2c$.

评析　在利用求差比较法证明不等式时，常要配方和因式分解.证法2利用函数思想构造函数，并通过判别式求证，构思巧妙，简明流畅，是一种值得学习的证法.

例8　设 $f(x)=\log_x3x+1$，$g(x)=2\log_x2+1$，其中 $x>0$，且 $x\neq1$，试比较 $f(x)$ 和 $g(x)$ 的大小.

解　考查作差比较大小.

$f(x)-g(x)=\log_x3x-\log_x4=\log_x\frac{3x}{4}$

($\log_x\frac{3}{4}x$ 的正负取决于 x，$\frac{3}{4}x$ 与1的大小，故分三类讨论)

(1)当 $\frac{3}{4}x=1$，即 $x=\frac{4}{3}$ 时，$\log_x\frac{3}{4}x=0$，

$\therefore f(x)=g(x)$；

(2)当 $0<x<1$ 且 $0<\frac{3}{4}x<1$ 或 $x>1$ 且 $\frac{3}{4}x>1$，

即 $0<x<1$ 或 $x>\frac{4}{3}$ 时，$\log_x\frac{3}{4}x>0$，

$\therefore f(x)>g(x)$；

(3)当 $1<x<\frac{4}{3}$ 时，$\log_x\frac{3}{4}x<0$，

$\therefore f(x)<g(x)$.

评析　由于 $\log_x\frac{3x}{4}$ 的底数和真数都是变数，因此要分两级进行分类讨论.

例9　设绝对值小于1的全体实数的集合为 S，在 S 中定义一种运算 $*$，使得 $a*b=\frac{a+b}{1+ab}$，

求证：如果 a,b 都属于 S，那么 $a*b$ 也属于 S.

证明　$\because a,b$ 属于 S，$\therefore-1<a<1,-1<b<1$，

这时$(\frac{a+b}{1+ab})^2-1=\frac{(a+b)^2-(1+ab)^2}{(1+ab)^2}$

$=-\frac{(1-a^2)(1-b^2)}{(1+ab)^2}\leqslant0$，

$\therefore-1<\frac{a+b}{1+ab}<1$，因此$\frac{a+b}{1+ab}\in S$.

评析　在新的知识背景下解决问题是当前数学试题的一种新的题型.此类问题涉及的数学知识并不多，但却可以有效地考查数学思想和方法.本题要注意“$*$”和“$+$”的运算意义，本题的解法也可以用函数的单调性加以解决.即不妨把 b 固定，只要证明 $f(a)=a*b=\frac{a+b}{1+ab}$ 在区间$(-1,1)$上是增函数就可以获解.

同步训练6.2

A

1.已知 a、b、m 为正实数，则不等式$\frac{a+m}{b+m}>\frac{a}{b}$(　　).

A.当 $a<b$ 时成立　　B.当 $a>b$ 时成立

C.是否成立与 m 有关　　D.一定成立

2.若 $a<b<0$，则下列不等式关系中不能成立的是(　　).

A.$\frac{1}{a}>\frac{1}{b}$　　B.$\frac{1}{a-b}>\frac{1}{a}$

C.$|a|>|b|$　　D.$a^2>b^2$

3.若 $a>0,b>0,m>0$，且 $a<b$，则下列不等式中恒成立的是(　　).

A.$\frac{a}{b}<\frac{a+m}{b+m}<1$　　B.$\frac{a}{b}\geqslant\frac{a+m}{b+m}$

C.$\frac{a}{b}\leqslant\frac{a+m}{b+m}\leqslant1$　　D.$1<\frac{a+m}{b+m}<\frac{b}{a}$

4.设 $a,b\in\mathbf{R}$，下面的不等式成立的是(　　).

A.$a^2+3ab>b^2$　　B.$ab-a>b+ab$

C.$\frac{a}{b}<\frac{a+1}{b+1}$　　D.$a^2+b^2\geqslant2(a-b-1)$

5.若 $m>1,n<1$，则下列两式的大小关系为 $mn+1$ ____ $m+n$.

6.设 $a,b\in\mathbf{R}$，则 a^2+b^2+ab+1 与 $a+b$ 的大小关系是________.

7.已知 $a\in\mathbf{R}$，求证：$3(1+a^2+a^4)\geqslant(1+a+a^2)^2$.

学习笔记

8. 若 $2x+4y=1$，比较 x^2+y^2 与 $\frac{1}{20}$ 的大小.

9. 已知 $0<\theta<\pi, a>0, b>0$，比较 a^2+b^2 与 $2ab\sin\theta$ 的大小．并说明 a, b, θ 在什么条件下 a^2+b^2 与 $2ab\sin\theta$ 相等.

10. 建筑学规定，民用住宅的窗户面积必须小于地板面积，但按采光标准，窗户面积与地板面积之比应不小于 10%，并且这个比越大，住宅的采光条件越好，问同时增加相等的窗户面积和地板面积，住宅的采光条件是变好了还是变坏了？

11. 甲乙两人同时同地沿同一路线走到同一地点，甲有一半时间以速度 m 行走，另一半时间以速度 n 行走；乙有一半路程以速度 m 行走，另一半路程以速度 n 行走，如果 $m\neq n$，问：甲乙两人谁先到达指定地点？

B

1. $a>1$ 是 $\frac{1}{a}<1$ 成立的(　　).

A. 充分非必要条件　　B. 必要非充分条件

C. 充分必要条件　　D. 既不充分也不必要条件

2. 已知 $a>b>0$，则下列各式中成立的是(　　).

A. $\frac{2a+b}{a+2b}=\frac{a}{b}$　　B. $\frac{2a+b}{a+2b}>\frac{a}{b}$

C. $\frac{2a+b}{a+2b}=\frac{b}{a}$　　D. $\frac{2a+b}{a+2b}<\frac{a}{b}$

3. 已知 $0<a<b$，则 $x=0.9^b\cdot 0.8^a$ 和 $y=0.9^a\cdot 0.8^b$ 的大小关系是(　　).

A. $x>y$　　B. $x<y$　　C. $x=y$　　D. 不能确定

4. 下列不等式中正确的是(　　).

A. $5^{10}<10^5$　　B. $5^{44}<4^{55}$

C. $3^x+7^x>10^x(x>1)$　　D. $\cos^n x<\sin^n x(0<x<\frac{\pi}{4}, n\in\mathbf{N}^*)$

5. (2003 年东北三校第二次联考题)若 $a, b\in\mathbf{R}$，则 $\frac{1}{a^3}>\frac{1}{b^3}$ 成立的一个充分不必要条件是(　　).

A. $ab>0$　　B. $b>a$　　C. $a<b<0$　　D. $ab(a-b)<0$

6. 已知下列不等式：

①$x^2+3>2x(x\in\mathbf{R})$；

②$a^5+b^5>a^3b^2+a^2b^3(a, b\in\mathbf{R})$；

③$a^2+b^2\geqslant 2(a-b-1)$.

其中正确的序号是________

7. 设 $P=a^2b^2+5, Q=2ab-a^2-4a$，若 $P>Q$，则实数 a, b 满足的条件为________.

8. 已知 a、b 是互不相等的正数，

求证：$\frac{a}{b^2}+\frac{b}{a^2}>\frac{1}{a}+\frac{1}{b}$.

9. 已知 a、b 是正实数，求证：$\frac{a}{\sqrt{b}}+\frac{b}{\sqrt{a}}\geqslant\sqrt{a}+\sqrt{b}$.

10. 已知直角三角形的内切圆半径为 1，求此三角形面积的最小值.

11. (2000 年上海统考题)比较 $1+\frac{\sqrt{2}}{a}$ 与 $\sqrt[3]{2-(1-\frac{\sqrt{2}}{a})^3}$ 的大小.

*12. 已知 $f(x)$ 是定义在 $[-1,1]$ 上的奇函数，且 $f(1)=1$，m、$n\in[-1,1]$，$m+n\neq 0$ 时有 $\frac{f(m)+f(n)}{m+n}>0$，

(1)用定义证明 $f(x)$ 在 $[-1,1]$ 上是增函数；

(2)解不等式：$f(x+\frac{1}{2})<f(\frac{1}{x-1})$.

学习笔记

第三节　算术平均数和几何平均数

（第一课时）

学法导航

重点难点提示

本节重点是利用均值不等式公式证明不等式.

学习中要注意以下几点：

1. $a^2+b^2\geqslant 2ab$ 要求条件 $a,b\in\mathbf{R}$.

$\frac{a+b}{2}\geqslant\sqrt{ab}$ 要求条件 $a>0$ 且 $b>0$.

2. "当且仅当"即"充分必要"条件.

3. 利用均值不等式公式证明时，必须满足三个条件：一正、二定、三相等.

典型例题剖析

例 1　已知 a、b、c 是不全相等的正数，

求证：$a(b^2+c^2)+b(c^2+a^2)+c(a^2+b^2)>6abc$.

证明　$\because b^2+c^2\geqslant 2bc$，$a>0$，

$\therefore a(b^2+c^2)\geqslant 2abc$.　①

同理 $b(c^2+a^2)\geqslant 2abc$，　②

$c(a^2+b^2)\geqslant 2abc$.　③

因为 a、b、c 不全相等，所以 $b^2+c^2\geqslant 2bc$，$c^2+a^2\geqslant 2ca$，$a^2+b^2\geqslant 2ab$ 三式不能全取"="号，从而①、②、③三式也不能全取"="号.

$\therefore a(b^2+c^2)+b(c^2+a^2)+c(a^2+b^2)>6abc$.

评析　本题采用的是"化整为零"的策略，由于左边的三个式子是轮换对称的，因此只要对一个式子进行认真的研究，其余两个同理可得.同时本题对于结论中关于">"的说明使得整个证明"滴水不漏".

例 2　a、b、$c\in\mathbf{R}^+$，且 $abc=1$，

求证：$\sqrt{a}+\sqrt{b}+\sqrt{c}\leqslant\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}$.

证明　由左、右各是三项相加，可能是三个同向不相等式相加得来，

$\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}=\frac{ab+bc+ac}{abc}=ab+bc+ac$.

$\because a,b,c\in\mathbf{R}^+$，　$\therefore ab+bc\geqslant 2\sqrt{ab^2c}=2\sqrt{b}$.

同理 $bc+ac\geqslant 2\sqrt{bc^2a}=2\sqrt{c}$，

$ca+ab\geqslant 2\sqrt{ca^2b}=2\sqrt{a}$，

三式相加化简即可得到 $\sqrt{a}+\sqrt{b}+\sqrt{c}\leqslant\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}$.

评析　本题是条件不等式的证明，用好用活条件是证题的关键.本题对于左右两边对称的不等式问题提供了一种常用的证法，即两两结合利用均值不等式证明.同时熟悉有关此类问题的结论对于提高解题速度是大有好处的.如 $a^2+b^2+c^2\geqslant ab+bc+ca$，$a+b+c\geqslant\sqrt{bc}+\sqrt{ab}+\sqrt{ca}(a,b,c>0)$

例 3　求证：$\sqrt{a^2+b^2}+\sqrt{b^2+c^2}+\sqrt{c^2+a^2}\geqslant\sqrt{2}(a+b+c)$.

证明　$\because a^2+b^2+(a^2+b^2)\geqslant 2ab+(a^2+b^2)$.

即 $2(a^2+b^2)\geqslant(a+b)^2$，$\therefore\sqrt{2(a^2+b^2)}\geqslant a+b$，

同理：$\sqrt{2(b^2+c^2)}\geqslant b+c$，$\sqrt{2(c^2+a^2)}\geqslant c+a$，

三式相加化简得

$\sqrt{a^2+b^2}+\sqrt{b^2+c^2}+\sqrt{c^2+a^2}\geqslant\sqrt{2}(a+b+c)$.

评析　本题证法中"$a^2+b^2+(a^2+b^2)\geqslant 2ab+(a^2+b^2)$"巧妙地利用了不等式的性质和均值不等式，令人称奇叫好.证题过程中的一个结论"$\sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}}\geqslant\frac{a+b}{2}$"是不等式中的一个重要结论，它在不等式证明中有广泛的应用.

在不等式的研究中常用的四种平均数的大小关系：

$a\geqslant\sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}}\geqslant\frac{a+b}{2}\geqslant\sqrt{ab}\geqslant\frac{2}{\frac{1}{a}+\frac{1}{b}}\geqslant b(a>b>0)$.

（它们分别表示平方平均、算术平均、几何平均、调和平均）

例 4　（2000年临沂市统考题）已知 a、b、c 为不全相等的正数.求证：$\frac{b+c-a}{a}+\frac{c+a-b}{b}+\frac{a+b-c}{c}>3$.

证明　左 $=(\frac{b}{a}+\frac{a}{b})+(\frac{c}{b}+\frac{b}{c})+(\frac{a}{c}+\frac{c}{a})-3$

$\because a$、b、c 为不全相等的正数.

$\therefore\frac{b}{a}+\frac{a}{b}\geqslant 2$，$\frac{c}{b}+\frac{b}{c}\geqslant 2$，$\frac{a}{c}+\frac{c}{a}\geqslant 2$ 且等号不同时成立.

$\therefore(\frac{b}{a}+\frac{a}{b})+(\frac{c}{b}+\frac{b}{c})+(\frac{a}{c}+\frac{c}{a})-3>6-3=3$.

即 $\frac{b+c-a}{a}+\frac{c+a-b}{b}+\frac{a+b-c}{c}>3$.

评析　对式子进行适当的变形是不等式证明的一个特点，也是一个难点，变形的形式很多，常见的是拆、并，也可乘一个数或加上一个数等.

例 5　若 $a,b\in\mathbf{R}^+$，且 $a+b=1$，求证：

$(1+\frac{1}{a})(1+\frac{1}{b})\geqslant 9$.

证法 1　$(1+\frac{1}{a})(1+\frac{1}{b})=1+\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{ab}$

$=1+\frac{2}{ab}\geqslant 1+\frac{2}{(\frac{a+b}{2})^2}=9$.

证法 2　$(1+\frac{1}{a})(1+\frac{1}{b})=(1+\frac{a+b}{a})(1+\frac{a+b}{b})$

$=(2+\frac{b}{a})(2+\frac{a}{b})=5+2(\frac{b}{a}+\frac{a}{b})\geqslant 9$.

评析　对于表面上看不能用均值不等式的问题，要依据条件将结论进行适当的变形.

学习笔记

例6 已知 a、b、c 都是正数，且 a、b、c 成等比数列，求证：$a^2+b^2+c^2>(a-b+c)^2$

证明 左－右 $=2(ab+bc-ac)$ $\because a$、b、c 成等比数列，

$\therefore b^2=ac$，又 $\because a,b,c$ 都是正数，

所以 $0<b=\sqrt{ac}\leqslant\frac{a+c}{2}<a+c$，

$\therefore a+c>b$，

$\therefore 2(ab+bc-ac)=2(ab+bc-b^2)$

$=2b(a+c-b)>0$，

$\therefore a^2+b^2+c^2>(a-b+c)^2$.

评析 求差比较法是不等式证明的一种基本方法，求差比较法的解题的程序是：作差—变形—判断差式的符号．在本题证明中通过基本不等式 $\frac{a+c}{2}\geqslant\sqrt{ac}$ 作"桥梁"是不等式证明中常用的方法和技巧，要理解和熟悉，注意到本题的结论中只有"<"而不是"$\leqslant$"，因此需要进行放缩，证明中的难点在于利用了 $\frac{a+c}{2}<a+c$ 进行适当地放缩．放缩"度"的控制因题而异，平时要注意归纳总结．

例7 已知 a、b、$c\in\mathbf{R}^+$，求证：$\frac{bc}{a}+\frac{ac}{b}+\frac{ab}{c}\geqslant a+b+c$.

证明 a、b、$c\in\mathbf{R}^+$，$\therefore \frac{bc}{a}+\frac{ac}{b}\geqslant 2\sqrt{\frac{abc^2}{ab}}=2c$，

$\therefore \frac{bc}{a}+\frac{ac}{b}\geqslant 2c$，

同理，$\frac{bc}{a}+\frac{ab}{c}\geqslant 2b$，$\frac{ac}{b}+\frac{ab}{c}\geqslant 2a$.

$\therefore 2(\frac{bc}{a}+\frac{ac}{b}+\frac{ab}{c})\geqslant 2(a+b+c)$，

$\therefore \frac{bc}{a}+\frac{ac}{b}+\frac{ab}{c}\geqslant a+b+c$.

评析 原式是关于 a、b、c 的轮换对称式，对于这种题型最常用的手段就是两两结合并利用均值不等式，巧妙结合，一气呵成．

同步训练 6.3

A

1.已知 $a>b>0$，则下列不等式成立的是（　　）．

A. $a>b>\frac{a+b}{2}>\sqrt{ab}$　　B. $a>\frac{a+b}{2}>\sqrt{ab}>b$

C. $a>\frac{a+b}{2}>b>\sqrt{ab}$　　D. $a>\sqrt{ab}>\frac{a+b}{2}>b$

2.已知 x，y 均为正数，且 $x\neq y$，则下列四个数中最小的一个是（　　）．

A. $\frac{1}{2}(\frac{1}{x}+\frac{1}{y})$　　B. $\frac{1}{x+y}$

C. $\frac{1}{\sqrt{xy}}$　　D. $\sqrt{\frac{1}{2(x^2+y^2)}}$

3.（2004年山西省实验中学高三年级阶段测试题）若 $a>b>0$，则下面不等式正确的是（　　）．

A. $\frac{2ab}{a+b}<\frac{a+b}{2}<\sqrt{ab}$　　B. $\sqrt{ab}\leqslant\frac{2ab}{a+b}\leqslant\frac{a+b}{2}$

C. $\frac{2ab}{a+b}<\sqrt{ab}<\frac{a+b}{2}$　　D. $\sqrt{ab}<\frac{2ab}{a+b}<\frac{a+b}{2}$

4. $a>0$ 且 $a\neq 1$，$M=(1+a^n)(1+a)^n$，$N=2^{n+1}\cdot a^n$ $(n\in\mathbf{N}^*)$，M、N 之间的大小关系是（　　）．

A. $M>N$　　B. $M<N$

C. $M=N$　　D. M、N 大小关系不定

5.若 $x,y\in\mathbf{R}$ 且 $x+2y=5$，则 3^x+9^y 的最小值是（　　）．

A. 10　　B. $6\sqrt{3}$　　C. $4\sqrt{6}$　　D. $18\sqrt{3}$

6.已知全集 $U=\mathbf{R}$，集合 $M=(b,\frac{a+b}{2})$，$N=(\sqrt{ab},a)$，其中 $a>b>0$，则 $M\cap\complement_U N$ 为（　　）．

A. $(b,\sqrt{ab})$　　B. $(\sqrt{ab},\frac{a+b}{2})$

C. $(-\infty,\frac{a+b}{2})\cup(a,+\infty)$　　D. $(b,\frac{a+b}{2})$

7.不等式 $\frac{a}{b}+\frac{b}{a}>2$ 成立的充要条件是________.

8.已知 $a>0,b>0,c>0$，求证：$\frac{b+c}{a}+\frac{c+a}{b}+\frac{a+b}{c}\geqslant 6$.

9.证明 $\lg x+\log_x 10\geqslant 2$ 或 $\lg x+\log_x 10\leqslant -2$.

10.求证：$\sqrt{a^2+c}\cdot\sqrt{b^2+c}\leqslant\frac{1}{2}(a^2+b^2)+c$.

11.已知 $a>0,b>0,c>0,d>0$，求证：$\frac{ad+bc}{bd}+\frac{bc+ad}{ac}\geqslant 4$.

12. 已知 $x\geqslant 0, y\geqslant 0$,

求证:$\frac{1}{2}(x+y)^2+\frac{1}{4}(x+y)\geqslant x\sqrt{y}+y\sqrt{x}$.

B

1. [2000 年普通高等学校招生全国统一考试题(广东卷)]

若 $a>b>1$, $P=\sqrt{\lg a\cdot\lg b}$, $Q=\frac{1}{2}(\lg a+\lg b)$, $R=\lg(\frac{a+b}{2})$,则(　　).

A. $R<P<Q$　　B. $P<Q<R$

C. $Q<P<R$　　D. $P<R<Q$

2. (2004 年湖南高考题)设 $a>0, b>0$,则以下不等式中不恒成立的是(　　).

A. $(a+b)(\frac{1}{a}+\frac{1}{b})\geqslant 4$　　B. $a^3+b^3\geqslant 2ab^2$

C. $a^2+b^2+2\geqslant 2a+2b$　　D. $\sqrt{|a-b|}\geqslant\sqrt{a}-\sqrt{b}$

3. 若 $x>0, y>0$ 且 $x+y\leqslant 4$,则下列不等式恒成立的是(　　).

A. $\frac{1}{x+y}\leqslant\frac{1}{4}$　　B. $\frac{1}{x}+\frac{1}{y}\geqslant 1$

C. $\sqrt{xy}\geqslant 2$　　D. $\frac{1}{xy}\geqslant 1$

4. 已知 $a、b、c$ 均大于 1,且 $\log_a c\cdot\log_b c=4$,则下列各式中一定正确的是(　　).

A. $ac\geqslant b$　　B. $ab\geqslant c$　　C. $bc\geqslant a$　　D. $ab\leqslant c$

5. 设 x, y 为正数,且 $x+y=1$,则使 $\sqrt{x}+\sqrt{y}\leqslant a$ 恒成立的 a 的最小值是(　　).

A. $\frac{\sqrt{2}}{2}$　　B. $\sqrt{2}$　　C. 2　　D. $2\sqrt{2}$

6. (2001 年全国春季高考题)若实数 $a、b$ 满足 $a+b=2$,则 3^a+3^b 的最小值是(　　).

A. 18　　B. 6　　C. $2\sqrt{3}$　　D. $2\sqrt[4]{3}$

7. 设 $a、b$ 为正数,则 $a+\frac{1}{b}$, $b+\frac{1}{c}$, $c+\frac{1}{a}$ 这三个数(　　).

A. 都不大于 2　　B. 至少有一个不大于 2

C. 都不小于 2　　D. 至少有一个不小于 2

8. 设 $a、b$ 为正数,α 为锐角,$M=(a+\frac{1}{\sin\alpha})(b+\frac{1}{\cos\alpha})$, $N=(\sqrt{ab}+\sqrt{2})^2$,则 M 与 N 的大小关系是____.

9. 若正数 $a、b$ 满足 $ab=a+b+3$,则 ab 的取值范围是________.

10. 若 $a>b>c$,求证:$\frac{1}{a-b}+\frac{1}{b-c}\geqslant\frac{4}{a-c}$.

11. 已知 $x\geqslant 0$,求证:$\frac{2+x}{1+x}\cdot\sqrt{1+(1+x)^2}\geqslant 2\sqrt{2}$.

12. 在△ABC 中,$A、B、C$ 分别是 a, b, c 所对的角,若 a, b, c 成等差数列,求 B 的范围.

*13. 已知 $a、b、c$ 为正数,n 是正整数,且 $f(n)=\lg\frac{a^n+b^n+c^n}{3}$,求证:$2f(n)\leqslant f(2n)$.

第三节　算术平均数和几何平均数

(第二课时)

学法导航

重点难点提示

1. "和定积最大,积定和最小",即两个正数的和为定值,则可求其积的最大值;积为定值,则可求其和的最小值.

2. 连续使用这两个公式中的任一个或两个,要注意不等式取到最值时等号是否成立.

3. 运用均值不等式证明不等式时,要注意利用"凑"(凑项、凑因子)的技巧.

4. 关于两数和与积的不等式常常利用均值不等式进行放缩.

学习笔记

此为试读,需要完整PDF请访问: www.ertongbook.com