丘成桐主编

数学翻译丛书

基础偏微分方程

Basic Partial Differential Equations

David Bleecker George Csordas

李俊杰 译

高等教育出版社

Higher Education Press

丘成桐主编

数学翻译丛书

基础偏微分方程

Basic Partial Differential Equations

■ David Bleecker George Csordas

■ 李俊杰 译

高等教育出版社
Higher Education Press

International Press

图字: 01-2006-2701
ORIGINAL ENGLISH LANGUAGE EDITION PUBLISHED BY
International Press Incorporated, Boston
P. O. Box 2872
Cambridge, MA 02238-2872

图书在版编目 (CIP) 数据

基础偏微分方程 / (美) 布利克 (Bleecker, D.), (美) 科达斯 (Csordas, G.); 李俊杰译. — 北京: 高等教育出版社, 2006.6
(数学翻译丛书 / 丘成桐主编)
书名原文: Basic Partial Differential Equations
ISBN 7-04-019158-X

I.基… II.①布…②科…③李… III.偏微分方程-高等学校-教学参考资料 IV.0175.2

中国版本图书馆 CIP 数据核字 (2006) 第 047208 号

出版发行	高等教育出版社	购书热线	010-58581118
社　　址	北京市西城区德外大街 4 号	免费咨询	800-810-0598
邮政编码	100011	网　　址	http://www.hep.edu.cn
总　　机	010-58581000		http://www.hep.com.cn
		网上订购	http://www.landraco.com
经　　销	蓝色畅想图书发行有限公司		http://www.landraco.com.cn
印　　刷	唐山市润丰印务有限公司	畅想教育	http://www.widedu.com
开　　本	787×960　1/16	版　　次	2006 年 6 月第 1 版
印　　张	43.25	印　　次	2006 年 6 月第 1 次印刷
字　　数	760 000	定　　价	69.00 元

本书如有缺页、倒页、脱页等质量问题, 请到所购图书销售部门联系调换。

物 料 号　19158-00

《数学翻译丛书》序

改革开放以后，国内大学逐渐与国外的大学增加交流. 无论到国外留学或邀请外地学者到中国访问的学者每年都有增长，对中国的科学现代化都大有帮助. 但是在翻译外国文献方面的工作尚不能算多. 基本上所有中国的教科书都还是由本国教授撰写，有些已经比较陈旧，追不上时代了. 很多国家，例如俄罗斯、日本等，都大量翻译外文书本来增长本国国民的阅读内容，对数学的研究都大有裨益. 高等教育出版社和海外的国际出版社有见及此，开始计划做有系统的翻译，由王元院士领导，北京的晨兴数学中心和杭州的浙江大学数学科学研究中心共同组织数学教授进行这个工作. 参与的教授很多，有杨乐院士，刘克峰教授等等. 我们希望这套翻译书能够使我们的大学生有更多的角度来看数学，丰富他们的知识. 海外的出版公司如美国数学学会等多有帮助，我们谨此鸣谢.

丘成桐 (Shing-Tung Yau)
2005年1月

谨以此书献给 Marie 和 Beverly,

他们一直比我们更热切地期待着本书的完成.

原书前言

依赖于空间和时间变量的量, 常由基于内在的物理原理的微分方程来支配. 偏微分方程 (偏微) 不仅精确地表示这些法则, 而且有助于根据系统的初始状态和给定的外部影响来预测系统的行为. 因此偏微在各种形式的科学和工程技术中的作用, 或者说, 它对可度量的量合乎常规平滑的、可预测的变化方面所做的努力, 是怎么评价都不为过的.

根据对本书内容 15 年的讲授以及从学生中来的大量反馈，我们认为本书对具有一年半微积分知识的大学生来说是一本在偏微方面很具可读性的入门书，它不需要用到更多的数学知识. 特别，学生可以没有学过线性代数课程，甚至没有学过常微分方程课程就能理解本书的内容. 就如本书书名所揭示的那样，我们的着重点只在我们认为这个学科最本质的方面，至于一些其他的重要主题，比如像偏微分方程组，只是提及一下. 然而即使是对一个特殊的班, 本书的内容都无法在一个学期中讲完. 由于偏微学科的广泛关联性, 我们觉察到确实有再加一个学期的要求, 而这种要求大多是不能满足的, 部分原因是由于缺少在时间和篇幅上适合大二学生使用的书. 粗略地看一下本书的目录或索引会发现, 其中有些主题被认为是相当高深的 (如最大值原理、Fourier 变换、拟线性偏微、球面调和函数、流形上的偏微、复变量理论、Fourier 级数一致收敛条件）. 然而, 尽管数学权威们 (也许不是有意的) 造成了一般的印象, 但任何证实了的数学结果或概念, 不管它有多“高深”, 都能把它分解为几个初等的、简单的部分，这些部分

对想尝试的学生来说都是容易理解的. 对于本书的那些所谓的“高深”主题的处理, 我们认为已成功地达到连我们自己都感到惊讶的程度. 要使本书写成对那些才学过标准的大一/大二微积分课程的学生，即使是那些已经对所学的微积分忘了差不多的学生, 完全是自封闭的, 对我们是一种不断的和值得的挑战. 我们已成功地教授了那些在学期初回忆不起来如何去求解 $y'(x) = y(x), y(0) = 1$ 的学生, 其实据最初的测验, 有超过一半的学生情况就是这样. 然而，到学期结束前，同样是这些学生, 他们能够证明和理解热方程的最大值原理，能够轻松推导求解关于初边值的连续依赖性问题. 实际上,“高深的论题” 本身很少是难的, 但如果 (为了追求优雅) 花很少的时间向学生去解释, 去诱导的话, 那么它们看上去是难的.

我们避免那种先证明兴趣索然的最一般形式的结果, 然后用它们去导出大量特例的意向. 总的来说, 我们从很多解答出来的例子中归纳出结果和方法. 等学生知道了足够多的例子之后, 对一般情况的论证就不仅是理解而且是常能预料到了. 特别, 对那些刚知道正弦和余弦的学生一开始就讲授 Sturm-Liouville 理论, 然后作为特例, 讲典型的边值问题, 我们觉得这样的做法是不明智的，尽管 Sturm-Liouville 理论对边值问题提供了千篇一律的处理方法. 我们采取的是反过来的做法. 在讲授了各种简单的热方程的边界条件和 Fourier 级数之后, 学生们就可以把 Sturm-Liouville 理论作为学过的内容的自然延续, 然后来学习和欣赏它. 从例子到定理这样的过程自然会导致书的篇幅增加, 但学生用这种方式学得更快且更有效果. 简言之, 从地基往上建房比从屋顶往下建容易. 在这样的教学过程中也许会丧失某种程度的优美, 但不会牺牲严谨. 对书中每个基本结果, 我们几乎都会在某种时候给出严格的证明, 或至少给出参考文献 (如, 关于流形上特征函数展开收敛性证明的参考文献). 我们当然不建议在课堂上对什么都给出证明, 因为这将严重限制讲授的内容，而是可以指导有兴趣的学生学习书中许多详细的、完全易消化的证明. 我们以严谨的方式论述了偏微的许多解是能用相应的边值问题或初值问题的 Green 函数的积分来表示. 在大多数的偏微教科书中, 这样的积分公式是在假设这些偏微的解实际上存在的条件下推导出来的 (如果真是推导的话). 说实在的, 这需要工具去验证用这个积分所定义的函数确实是所给问题的解. 这必然涉及在积分下求导的 Leibniz 法则, 尤其当被积函数是无界时. 本书的一个特点是给出了 Leibniz 法则的完全证明 (参看附录 3), 这在其他的入门性教科书中似乎没有. 在证明中我们根据来源于 [Lewin,1986,1987] 的想法, 用 Riemann 积分的控制收敛定理的一个初等形式来代替 Lebesgue 控制收敛定理. 这样就避免了 Lebesgue 测度和 Lebesgue 积分的

概念.

解题是学习任一数学学科的主要方法. 本书包含了许多难度不一的习题, 从纯粹常规的到那些即使对最出色的学生也很有挑战性的习题. 有时人们发现虽然一些学生通过模仿步骤能得到问题的解, 但他们也许仍然不会解释或利用该解, 或者甚至仍然不理解为什么他们得到的表达式确实是所求问题的解. 我们通过加入许多需要学生去思考、去从中得出一些结论和解释所得结果的练习来避免这种悲剧发生, 而不是那种仅仅进行一些纯粹计算的练习. 因有些学生会设法先行查看书后的答案, 所以我们只列出部分解答. 然而, 解答手册 (除了部分很显然的习题, 都给出了完全的解答) 只对讲授教师提供. 我们亲自解答了全部的习题.

因为整本书的内容无法在一个学期内讲授完, 对于要求一个学期内讲授该课的教师就得决定哪些章节需要讲授. 假使有需要, 教师可考虑推行再一个学期的偏微教学. 下面, 我们概括了各章节的内容. 在此之后给出了一些建议, 对一个学期或二学季课程, 哪些章节是必须的, 哪些内容是机动的.

致谢 (略.)

David Bleecker, George Csordas
火奴鲁鲁, 1996

各章概要以及给教师的建议

第一章 (回顾与引言): 如学生学过常微课程, 那么第 1.1 节可略过不讲, 或安排为阅读. 第 1.2 和 1.3 节是一些有关偏微及其应用的必要概述, 还包括某些主题的介绍, 比如分离变量和叠加原理. 这些概念后面常会用到.

第二章 (一阶偏微): 对那些把一阶偏微看作没什么实用性的教师, 我们希望他们在决定整个略过第二章之前先读一下第二章的引言. 一阶偏微不仅在生灭过程 (即种群密度的演化)、连续介质力学以及交通流中激波的传播中有广泛应用, 而且让学生看到变量变换是怎样用来大大简化一个偏微. 顺便提一下, 仅由于在应用领域所产生的二阶偏微已经呈标准形, 我们就没有把 (常系数) 二阶线性偏微化为标准形 (如, 通过坐标旋转等方法) 选作例子和训练习题. 然而, 完整的分类定理叙述在第 1.2 节给出, 完全的证明在附录 1 中给出. 为了弥补有关二阶偏微变量变换训练少, 在第二章中有大量的有关一阶偏微的变量变换问题.

一阶偏微在应用中很少以参数化常微的标准形式出现. 虽然第三章至第八章独立于第二章, 教师应认真考虑至少讲授第 2.1 节, 该节中有当 a, b 和 c 都为常数时, $au_x + bu_y + cu = f(x, y)$ 的求解. 变系数情形在第 2.2 节. 拟线性情形在第 2.3 节. 完全非线性情形在选修的第 2.4 节.

第三章 (热方程): 第 3.1 节以热方程的推导入手. 在没有先引入 Fourier 级数的情况下解答了最简单初边值问题. 用分离变量找出热方程满足齐次边界条件 (B.C.) 的乘积解, 然后求满足初始条件的一个线性组合. 在第三章, 所选的初始温度是可由 (根据三角恒等式) 有限项适当形式的正弦和余弦的线性组合来表示. 然后学生自然会问, 如果初值不是这种情况怎么做? 换句话说, 学生自然被激发引入 Fourier 级数, 这是第四章的主题. 在第 3.2 节, 通过对第一类或第二类齐次边界条件得到温度平方的平均是非增的来证明热方程各种初边值问题的解的唯一性. 最大值原理提供了唯一性的另外一种证明方法. 先用很多例子来阐明最大值原理, 并指出用最大值原理容易得到解对初边值的连续 (一致) 依赖性. 最大值原理的证明放在第 3.2 节的最后. 第 3.3 节讨论了各种简单的与时间无关的边界条件, 但可能是非齐次的情形. 在第 3.4 节, 用 Duhamel 原理处理与时间有关的边界条件和有热源的情形. 如果时间有限, 第 3.4 节可略过或留到以后讲授, 第 3.3 节可以简单快速地讲授. 然而, 第 3.1 节无疑是任何一门初等偏微课程的内容, 我们还强烈建议第 3.2 节要相当详细地讲授.

第四章 (Fourier 级数和 Sturm-Liouville 理论): 学生在第三章注意到 Fourier 级数的需要. 在第 4.1 节, 引入函数正交的概念以及一个函数形式上展成 Fourier 级数的定义, 这个级数可能收敛也可能不收敛到该函数. 计算了许多例子, 引发出收敛性问题. 给出了对一个 C^2 函数一致逼近所需的项数估计 (证明则留到第 4.2 节给出). 通过对 Fourier 级数余项作积分估计提供了一个获得更精细估计的技巧. 第 4.2 节有 Fourier 级数在各种条件下收敛性证明的细节. 小心地指出逐点收敛与一致收敛之间的不同. 证明了分段 C^1 函数具有逐点收敛, 连续的分段 C^1 函数具有一致收敛. 如时间不充裕, 建议略过那些较冗长的证明或安排为课后阅读. 然而要有这样一个一般的认识: 在圆周上定义的函数越光滑, 它的 Fourier 级数收敛得就越迅速. 在第 4.3 节引入了 Fourier 正弦和 Fourier 余弦级数, 它们是用来处理 (至少是形式上) 初始温度不是由有限项适当形式的正弦和余弦的线性组合情形 (第三章留下的伏笔). 强调了无限项 C^2 函数的和函数未必是 C^2 的, 因此所得的形式解未必是精确解. 然而, 通过在充分

大的项数截取级数后通常能在任意给定的确定误差之内满足初始条件，这正是应用领域所需要的. 在某些假设下形式解的有效性放在第七章. Sturm-Liouville 理论是第 4.4 节内容. 现在学生已经可以领会这个主题了，它把已知的事实推广到非齐次杆和第三类边界条件情形. 借助于 Sturm-Liouville 比较定理，给出了 Sturm-Liouville 问题有无穷多个特征值的一个有说服力的证明梗概. 实际上，本书的后面部分除了第八章 (第 8.5 节) Bessel 函数有无穷多个零点的叙述之外，其他都与第 4.4 节无关. 因此，考虑到时间的压力，整个略去第 4.4 节也是可取的，但至少得告诉学生那是关于什么内容的. 我们认为第 4.3 节能够且应该快速地讲授，第 4.2 节应着重定理的叙述而不是它们的证明细节. 第 4.1 节因为后面常会用到应详细讲解.

第五章 (波方程)： 在第 5.1 节，由 Newton 方程导出作横向振动弦的波方程. 细致地解释了为什么横向振动的假设实际得到的是线性波方程而不是近似线性方程. 于是去掉了有疑问的"小"振动假设. 求解了最简单的有限弦初边值问题. 在第 5.1 节利用能量积分法还给出了这些问题解的唯一性的证明. 第 5.2 节包括无限弦波问题的 D'Alembert 解法. 包括 D'Alembert 公式的一些推论，如有限传播速度，并解释了半无限弦的镜像法. 对有限弦，镜像法提供了不同于 Fourier 级数法的又一方法. 有限弦解对初始条件的连续依赖性也是 D'Alembert 公式和镜像法的一个简单推论. 在第 5.3 节处理有限弦的各种边值问题. 除此之外，用 Duhamel 原理和 Fourier 级数法来处理非齐次波方程 (即，含有作用力的项). 第 5.1 节应该较详细讲授，完整的推导可安排为课后阅读. 第 5.2 节同样也是关键性的，如时间不够，第 5.3 节可做简单概述，以便学生知道其中论及什么内容以备今后之用.

第六章 (Laplace 方程)： 在第 6.1 节，引出 Laplace 方程并说明其解可视为稳态的温度分布. 引入 Dirichlet 问题和 Neumann 问题. 第 6.2 节是关于矩形上这些问题的求解. 由于学生熟悉分离变量和叠加，这些内容可很快讲授. 激发和应用了唯一性和最大值原理，它们的证明则留在第 6.4 节. 在第 6.3 节，利用极坐标求解圆环上和圆盘上 Dirichlet 问题和 Neumann 问题. 详细地证明了中值定理和 Poisson 积分公式，并证明了调和函数的正则性. 在第 6.4 节，证明了有界区域上调和函数的最大值原理以及 Dirichlet 问题解对边值的连续依赖性. 这些结果的重要性在前面章节已对学生详细展示过. 第 6.5 节是有关复变量理论在 Laplace 方程上的应用. 假设没有学过复变量. 不涉及 Cauchy 定理、围线积

分和留数定理, 理由很简单, 这里不需要这些. 然而, 揭示和利用了复解析函数与调和函数之间的密切联系. 此外, 用来求解稳态温度问题、流体流问题和静电学问题的共形映射的概念和作用可得心应手地加以运用. 第六章的内容都是重要的, 若在前面章节的内容用时太多的话, 就可能无法上完第六章的所有内容. 如果一定要做个选择的话, 对一个大多数是工科学生的班级, 讲授第 6.5 节而不是第 6.4 节是明智的; 然而对数学专业的班, 相反的选择是合适的.

第七章 (Fourier 变换): 即使只讲前面章节最基本的内容, 在一个学期里要上到第七章都需要开一个额外的班. 然而, 若学生打算将来学正式的复变量课程, 第六章的许多概念在那课程里都会论述. 因而略过第六章的许多内容着手第七章就成为一种有吸引力的选择. 当然, 应该考虑再引入一个学期 (或一个学季) 的偏微课程的可能性. 这种需要是存在的. 第 7.1 节引入复变量 Fourier 级数和定义了 Fourier 变换. 计算了许多例子. 在第 7.2 节, 详述了 Fourier 变换的基本性质, 这些性质使 Fourier 变换在偏微求解过程中成为有用的工具 (即, 把求导转化为乘法算子, 变换的乘法对应于卷积). 揭示了函数的正则性提高该函数 Fourier 变换的衰减率 (反之也对) 这样一个概念. 虽然这通常被认为是高深的论题, 但我们用初等的方式来处理, 而且这个概念与圆周上函数的光滑性提高它的 Fourier 系数的衰减率 (第 4.2 节[①]所包含的) 的概念有着紧密联系. 第 7.3 节讲述了反演定理、Fourier 逆变换和 Parseval 等式. 反演定理的证明则留作附篇放在第七章的最后. 在第 7.4 节用 Fourier 变换来求解偏微. 第 7.1—7.3 节可快些讲授而集中讲授第 7.4 节. 在该节中解答了无限杆上热问题以及半平面上的 Dirichlet 问题. 我们认为着重强调以下的事实是一个好的主意: Fourier 变换法不仅假定问题的解存在, 而且假定解具有一定的衰减性质. 因此, 用这种方式获得的解的积分公式, 应该通过细致地应用积分号下求导的 Leibniz 法则来独立地验证. 对一个大多数是工科学生的班来说, 只消指出这点就可, 不必给出详细的验证. 虽然在第五章已经给出波方程的 D'Alember 公式的推导, 这里也证明怎样用 Fourier 变换的技巧来获得它, 还讨论了 Dirac delta 分布. 在第 7.5 节用镜像法来求解半无限和有限杆的热问题. 出现在第四章的无穷和的形式解的有效性现在就容易处理了. 另外, 引入和应用了 Fourier 正弦和 Fourier 余弦变换.

第八章 (高维情形的偏微): 第 8.1 节把第三章到第七章中的基本概念直接推广到多个笛卡儿空间坐标的情形. 求解矩形和立方体上的热问题, 且考虑了

[①]原文误为第 3.2 节. —— 译者

长方体上的 Laplace 方程. 二重 Fourier 变换和二重 Fourier 级数就轻松地被激发和引入. 在第 8.2 节, 明确了热问题、波问题和位势问题解的构造的基石是满足边界条件的 Laplace 算子的特征函数. 这个基本事实常被隐含在分离变量过程和繁多的产生于各种坐标系的特殊函数之中. 许多函数的级数展开都归入特征函数展开的范畴. 在第 8.2 节还证明了一个二重 Fourier 级数一致收敛定理, 也讨论了二重 Fourier 变换的简单性质. 第 8.3 节开始用球坐标来研究标准的偏微. 球面上 Laplace 算子的特征函数定义为球面调和函数. 它们成为空间上 Laplace 算子的特征函数的突出部分, 并能用相应的 Legendre 函数来表示. 利用球对称解答了许多热问题和波问题. 推导出三维的 D'Alember 公式, 并讨论了 Huygen 原理. 第 8.4 节覆盖了所有特征值和球面调和函数的确定, 特征空间的维数等内容. 给出了球面 C^2 函数的 Laplace 级数一致收敛的一个完全证明. 此外, 通过利用球面调和函数和球 Bessel 函数求解许多与角度有关的问题 (如, 球内热流). 在第 8.5 节, 考虑了用柱坐标表示的偏微以及更多的用球坐标表示的偏微, 但具非平凡位势, 比如 Schrödinger 方程. 讨论了求解过程中产生的特殊函数. 虽然球 Bessel 函数能用正弦和余弦来表示, 但 (整数阶) 柱 Bessel 函数则不能, 这就是为什么放在球坐标之后处理柱坐标的原因. 考虑了一些应用问题, 从振动的圆形膜, 到 (非相对论性的) 氢原子能量水平和波函数的确定以及作为周期表基础的能量水平衰期的确定. 第 8.6 节论述了 $\mathbb{R}^n$ 中带边的紧子流形上标准的热问题、波问题和位势问题. 用易于理解的方式定义了这些子流形上的 Laplace 算子. 虽然没有证明在这些一般结构下特征函数和特征值的存在理论, 但列举了一些更具可读性的参考文献. 诚然, 特征函数难于被具体计算或逼近, 但一旦特征函数给定, 求解流形上标准的热问题、波问题和位势问题的过程就跟散布在书中其余部分的许多特殊情形很类似. 最后的章节基本上把这些特殊的情况统一合并为一个框架. 再者, 对 Laplace 算子特征值的 Weyl 渐近公式进行了讨论, 还讨论了流形的几何信息, 这些信息能从可看作是振动的频率的特征值中 "听" 出来.

在计划一个学期或两学季的教学课程时, 我们建议选择下面列出的章节, 记住标明优先的章节. 另外, 如果学生常微不太强的话就应包括第 1.1 节. 标有*号的章节可以在两个课时内上完, 而大多数教师将用大约三个课时在其他节上. 留下用来测验和检查部分回家作业的时间. 第八章或许最好留作第二个学期的课程, 或对那些超前的、有天赋和很有兴趣的学生作为课外自修计划的材料.

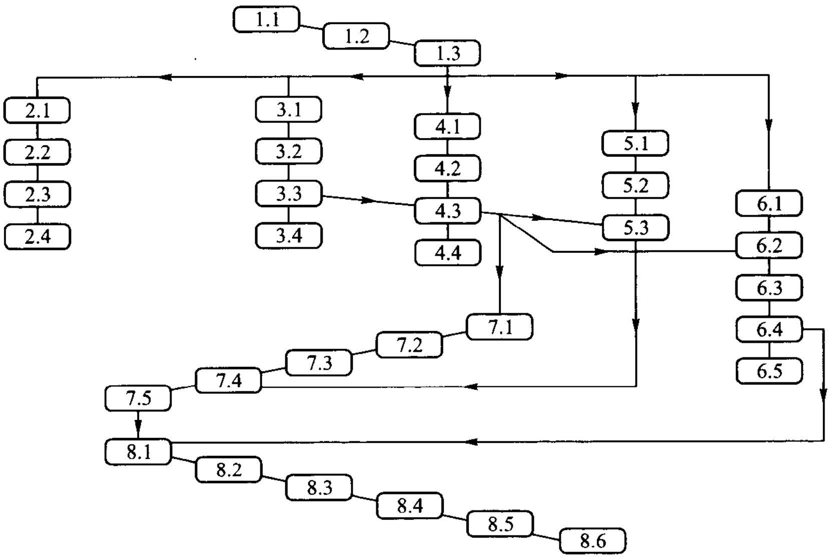
关键的章节：1.2, 1.3*, 3.1, 3.2, 4.1, 4.2, 4.3*, 5.1, 5.2, 6.1*, 6.2*, 6.3

较高要求的章节: 2.1, 3.3*, 5.3*, 6.4, 6.5, 7.1*, 7.2*, 7.3*, 7.4

超高要求的章节: 2.2, 2.3, 2.4, 3.4, 4.4, 7.5

我们特别感谢偏微和几何专家、Field 奖获得者、同仁和编辑 S.T.Yau 以及合作编辑 Julie Lynch 对本书的极大信任. 我们做了一切努力来确保不辜负这种信任.

各节的关系



1.1
1.2
1.3
2.1
2.2
2.3
2.4
3.1
3.2
3.3
3.4
4.1
4.2
4.3
4.4
5.1
5.2
5.3
6.1
6.2
6.3
6.4
6.5
7.1
7.2
7.3
7.4
7.5
8.1
8.2
8.3
8.4
8.5
8.6

目　录