

高中新课标

◎根据教育部最新教材编写◎



教材全解丛书

中学教材全解

ZHONGXUEJIAOCAI
QUANJIE

总主编 / 薛金星

高中数学

必修③

配套人民教育出版社实验教科书



陕西人民教育出版社

B版



教育部审定 2019 年 7 月第 1 次印刷



教育部审定 2019 年 7 月第 1 次印刷

中学教材全解

2019 年 7 月第 1 次印刷

QUANTUM

2019 年 7 月第 1 次印刷

高中数学

必修 1

2019 年 7 月第 1 次印刷



8

根据教育部最新教材编写

中学教材全解

高中数学必修③

配套人民教育出版社实验教科书 B 版



图书在版编目(CIP)数据

中学教材全解. 高中数学. 3:必修/薛金星主编;王金贵分册主编. —西安:陕西人民教育出版社, 2005. 3

ISBN 7—5419—9458—8

I. 中... II. ①薛... ②王... III. 数学课—高中—教学参考资料 IV. G634

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2005)第 028943 号

中学教材全解

高中数学必修③

配套人民教育出版社实验教科书 B 版

陕西人民教育出版社出版发行

(西安市长安南路 181 号)

各地书店经销 北京市昌平兴华印刷厂印刷

890×1240 毫米 32 开本 11.75 印张 310 千字

2006 年 1 月第 1 版 2006 年 1 月第 1 次印刷

ISBN 7—5419—9458—8/G·8246

定价:15.80 元

出版前言

《中学教材全解》系列丛书根据教育部最新教材编写。值此出版之际,我们祝愿《中学教材全解》将伴随您度过中学阶段的美好时光,帮您迈向日夜向往的高等学府。

这套丛书与其他同类书相比具有以下几个鲜明特色:

第一,新。

首先是教材新。本书以最新教改精神为依据,以现行初、高中最新教材为蓝本编写。其次是体例新。紧扣教材,步步推进,设题解题、释疑解难、课后自测、迁移延伸,逐次深入。其三是题型(材料)新。书中选用的题型(材料)都是按中考、高考要求精心设计挑选的,让读者耳目一新。

第二,细。

首先是对教材讲解细致入微。以语文科为例,小到字的读音、词的辨析,大到阅读训练和作文训练都在本书中有所体现。其次是重点难点详细讲析,既有解题过程又有思路点拨。其三是解题方法细,一题多解,多题一法,变通训练,总结规律。

第三,精。

首先是教材内容讲解精。真正体现围绕重点,突破难点,引发思考,启迪思维。根据考点要求,精讲精析,使学生举一反三,触类旁通。其次是问题设置精,注重典型性,避免随意性,注重迁移性,避免孤立性,实现由知识到能力的过渡。

第四,透。

首先是对教纲考纲研究得透。居高临下把握教材,立足于教材,又不拘泥于教材。其次是对学生知识储备研究得透。学习目标科学可行,注重知识“点”与“面”的联系,“教”与“学”的联系。再次是对问题讲解得透,一题多问,一题多解,培养求异思维和创新能力。

第五,全。

首先是知识分布全面。真正体现了“一册在手,学习内容全有”的编写指导思想。其次是该书的信息量大。它涵盖了中学文化课教学全部课程和教与学的全部过程,内容丰富,题量充足。再次是适用对象全面。本书着眼于面向全国重点、普通中学的所有学生,丛书内容由浅入深,由易到难,学生多学易练,学习效果显著。

本系列丛书虽然从策划、编写,再到出版,精心设计,细致操作,可谓尽心尽力,但疏漏之处在所难免,诚望广大读者批评指正。

薛金星于北师大



目 录



第一章 算法初步	(1)	新课标问题研讨	(79)
本章综合解说	(1)	高考要点阐释	(84)
1.1 算法与程序框图	(3)	本节内容总结	(85)
1.1.1 算法的概念	(3)	课后习题全解	(86)
新课标导学	(3)	1.2.2 条件语句	(87)
教材知识全解	(3)	新课标导学	(87)
典型例题解析	(8)	教材知识全解	(88)
新课标问题研讨	(16)	典型例题解析	(93)
高考要点阐释	(17)	新课标问题研讨	(110)
本节内容总结	(18)	高考要点阐释	(112)
课后习题全解	(20)	本节内容总结	(115)
1.1.2 程序框图	(22)	课后习题全解	(116)
1.1.3 算法的三种基本逻辑结构和框图表示	(22)	1.2.3 循环语句	(117)
新课标导学	(22)	新课标导学	(117)
教材知识全解	(22)	教材知识全解	(118)
典型例题解析	(30)	典型例题解析	(121)
新课标问题研讨	(54)	新课标问题研讨	(132)
高考要点阐释	(55)	高考要点阐释	(136)
本节内容总结	(57)	本节内容总结	(138)
课后习题全解	(59)	课后习题全解	(139)
1.2 基本算法语句	(69)	1.3 中国古代数学中的算法	
1.2.1 赋值、输入和输出语句	(69)	案例	(142)
新课标导学	(69)	新课标导学	(142)
教材知识全解	(69)	教材知识全解	(142)
典型例题解析	(72)	典型例题解析	(148)
		新课标问题研讨	(151)
		高考要点阐释	(152)





本节内容总结·····	(153)	课后习题全解·····	(207)
课后习题全解·····	(154)	2.2 用样本估计总体 ·····	(208)
章末总结 ·····	(157)	2.2.1 用样本的频率分布	
知识网络归纳·····	(157)	估计总体的分布·····	(208)
专题综合讲解·····	(157)	新课标导学·····	(208)
高考热点指南·····	(167)	教材知识全解·····	(209)
课后复习题全解·····	(168)	典型例题解析·····	(215)
第二章 统计 ·····	(172)	新课标问题研讨·····	(221)
本章综合解说·····	(172)	高考要点阐释·····	(224)
2.1 随机抽样 ·····	(174)	本节内容总结·····	(227)
2.1.1 简单随机抽样 ·····	(174)	课后习题全解·····	(227)
新课标导学·····	(174)	2.2.2 用样本的数字特征	
教材知识全解·····	(174)	估计总体的数字特征·····	(230)
典型例题解析·····	(178)	新课标导学·····	(230)
新课标问题研讨·····	(180)	教材知识全解·····	(230)
高考要点阐释·····	(181)	典型例题解析·····	(235)
本节内容总结·····	(183)	新课标问题研讨·····	(240)
课后习题全解·····	(183)	高考要点阐释·····	(244)
2.1.2 系统抽样 ·····	(184)	本节内容总结·····	(245)
新课标导学·····	(184)	课后习题全解·····	(245)
教材知识全解·····	(184)	2.3 变量的相关性 ·····	(248)
典型例题解析·····	(186)	新课标导学·····	(248)
新课标问题研讨·····	(190)	教材知识全解·····	(248)
高考要点阐释·····	(192)	典型例题解析·····	(253)
本节内容总结·····	(193)	新课标问题研讨·····	(258)
课后习题全解·····	(194)	高考要点阐释·····	(262)
2.1.3 分层抽样 ·····	(195)	本节内容总结·····	(263)
新课标导学·····	(195)	课后习题全解·····	(263)
教材知识全解·····	(195)	章末总结 ·····	(268)
典型例题解析·····	(198)	知识网络归纳·····	(268)
新课标问题研讨·····	(202)	专题综合讲解·····	(268)
高考要点阐释·····	(205)	高考热点指南·····	(276)
本节内容总结·····	(206)	课后复习题全解·····	(276)
		第三章 概 率 ·····	(279)
		本章综合解说·····	(279)

3.1 事件与概率	(281)	教材知识全解	(332)
新课标导学	(281)	典型例题解析	(335)
教材知识全解	(281)	新课标问题研讨	(343)
典型例题解析	(290)	高考要点阐释	(346)
新课标问题研讨	(301)	本节内容总结	(347)
高考要点阐释	(305)	课后习题全解	(348)
本节内容总结	(307)	3.4 概率的应用	(349)
课后习题全解	(308)	新课标导学	(349)
3.2 古典概型	(311)	教材知识全解	(350)
新课标导学	(311)	典型例题解析	(350)
教材知识全解	(311)	新课标问题研讨	(355)
典型例题解析	(316)	高考要点阐释	(359)
新课标问题研讨	(324)	本节内容总结	(359)
高考要点阐释	(329)	课后习题全解	(360)
本节内容总结	(329)	章末总结	(361)
课后习题全解	(330)	知识网络归纳	(361)
3.3 随机数的含义与应用		专题综合讲解	(361)
.....	(332)	高考热点指南	(366)
新课标导学	(332)	课后复习题全解	(367)

第一章

算法初步

1. 本章主要内容

本章我们主要学习算法的概念和程序框图,理解算法的基本结构、基本算法语句,了解古代算法案例,体会蕴含的算法思想,增强有条理的思考与表达能力,提高逻辑思维能力,以下四个知识点重点把握:

(1)对“算法初步”的内容,希望同学们根据本章提供的算法实例,或再选取一些熟知的算法实例,从以下三个方面加深理解:①形成算法的初步印象,体会算法是问题解决的“机械”程序,并能在有限步内获得问题的解决;②体会一个问题可能存在多种算法,有优劣之分;③感受算法学习的必要性,并初步认识二分法.通过这三个方面的学习力图把握算法的基本思想.

(2)“算法的基本结构”的内容,首先介绍了顺序结构和条件分支结构,学习了用程序框图来描述算法,通过具体的问题体会算法的这

种描述方式的优点;接着介绍了算法中的重要概念——变量,以及如何给变量赋值,学习将常数赋予变量、将含其他变量的表达式赋予变量、将含有变量自身的表达式赋予变量,理解这些赋值方式的意义,切实学会通过赋值的方式改变变量的值.

(3)“排序问题”的内容,介绍了两种排序算法:直接插入排序算法和冒泡排序算法,进一步学习变量和给变量赋值,并用程序框图描述算法.

(4)“几种基本语句”的内容,介绍了五种基本语句:赋值语句、输入语句、输出语句、条件语句和循环语句,其中条件语句介绍了两种:if 语句和复合 if 语句,循环语句介绍了两种:for 语句和 while 语句.运用这些语句描述了本章前面涉及的一些算法.

2. 本章学习要求

(1)结合熟悉的算法,把握算法的基本思想,学会用自然语言来描述算法.

(2)通过模仿、操作、探索,经历设计程序框图表达解决问题的过程.在具体问题的解决过程中(如:三元一次方程组求解等问题)理解程序框图的三种基本逻辑结构:顺序结构、条件分支结构、循环结构.

(3)通过实际问题的学习,了解构造算法的基本程序.

1.1 算法与程序框图

1.1.1 算法的概念

一、学习目标

1. 知识与技能

理解算法的概念与特点;能够使用自然语言描述算法.

2. 过程与方法

通过解决具体问题的实例,感受算法的特点,体会算法的思想,能够借助已有的知识设计解决问题的算法.

3. 情感、态度与价值观

通过算法的学习,养成有条理、有步骤地思考问题、解决问题的习惯,努力克服只注重结果而不注重过程的习惯.

二、相关知识链接

当今世界,人们把科学计算、实验和理论并列为三大科学研究方法,即人们认识世界的三大手段.算法是计算机的基础,计算机能有如此广泛而神奇的应用,除了芯片之外,主要靠软件,而软件的核心就是算法,算法思想已经逐渐成为每个现代人应具有的数字素养.

一、知识点全解

知识点 1 算法的概念

算法可以理解为由基本运算及规定的运算顺序所构成的完整的解题步骤,或看成按要求设计好的有限的确切的计算序列,并且这样的步骤或序列能够解决一类问题.例如:你想从北京去天津开会,首先要去买火车票,然后按时乘地铁到北京站,登上火车,到天津站乘电车到会场参加会议.你要买电视机,先要选好货物,然后开票,付款,拿发票,取货,乘车回家.要上大学,首先要填报名单,交报名费,拿到准考证,按时参加考试,得到录取通知书,到指定学校报到注册等.这些步骤都是按一定的顺序进行的,缺一不可,次序错了也不行.从事各种工作和活动,都必须事先想好要进行的步骤,然后按部就班地进行,才能避免产生错乱.实际上,在日常生活中,由于已养成习惯,所以人们并不意识到每件事都需要事先设什么“行动步骤”,例如:吃饭、上学、打球、做作业等,事实上都是按一定规律进行的,不要认为只有“计算”才有算法.广义地讲,为解决一个问题而采取的方法和步骤,都称为“算法”.例如:描述太极拳动作的图解,就是“太极拳的算法”,一首歌曲的乐谱,也可以称为该歌曲的算法,因为已

指定了演奏该歌曲的每一个步骤,按照它的规律就能演奏出预定的曲子.但是本节要讲述的算法,主要是解决数学问题的算法,例如:解方程 $2x+3=\frac{1}{2}(x+1)$ 的步骤是去分母、去括号、移项、合并同类项、系数化为1.这就是解方程 $2x+3=\frac{1}{2}(x+1)$ 的算法,按照这样的步骤即算法,就能达到求出未知数的目的.

学习算法的概念应注意以下几点:

(1)在数学中,现代意义上的“算法”通常是指可以用计算机来解决的某一类问题的程序或步骤,这些程序或步骤必须是明确和有效的,而且能够在有限步之内完成;

(2)通俗点说,算法就是计算机解题的过程.在这个过程中,无论是形成解题思路还是编写程序,都是在实施某种算法,前者是推理实现的算法,后者是操作实现的算法;

(3)描述算法可以有不同的方式,例如,可以用自然语言和数学语言加以叙述;也可以用算法语言给出精确的说明;或者用框图直观地显示算法的全貌.

例1 写出一个求解任意二次函数 $y=ax^2+bx+c(a\neq 0)$ 的最值的算法.

分析:由二次函数的性质知,当 $a>0$ 时,函数有最小值 $\frac{4ac-b^2}{4a}$;当 $a<0$ 时,函数有最大值 $\frac{4ac-b^2}{4a}$.

解:算法步骤用自然语言叙述如下:

S1 计算 $m=\frac{4ac-b^2}{4a}$.

S2 若 $a>0$,则函数最小值是 m ;否则,执行 S3.

S3 函数最大值是 m .

评注

设计算法时应全面考虑该问题的各种情况,否则这种算法就不一定有效.

例2 写出解方程 $2x+7=0$ 的一个算法.

分析:写出解方程的一个算法实质上是写出解一元一次方程的步骤.

算法1:第一步:移项,得 $2x=-7$;

第二步:系数化为1,得 $x=-\frac{7}{2}$;

算法2:第一步: $ax+b=0(a\neq 0)$ 的解是 $x=-\frac{b}{a}$;

第二步:将 $a=2, b=7$ 代入上式,得 $x=-\frac{7}{2}$.

评注

比较两个算法各有优点,第一个算法简单,但第二个算法优点是给出了解一元一次方程的通法,只需分清 a, b 的值,赋值而得具体方程的解,更利于在计算机上操作.

知识点 2 算法的特点

对于某一个具体问题,找到解决它的某种算法是指使用一系列运算规则能在有限步骤内求解某类问题,其中的每条规则必须是明确定义的、可行的、不能含糊其词、模棱两可,同时应对所有的初始数据(而不仅是指对某些特殊数值)有效.

算法从初始步骤开始,每一个步骤只能有一个确定的后继步骤,从而组成一个步骤序列,这个序列必须是有限的,序列的终止表示问题得到解答或指出问题没有解答.

我们过去学过的许多数学公式都是算法,加、减、乘、除运算法则以及多项式的运算法则也是算法.

算法可以概括为以下几个特点:

(1)概括性:写出的算法必须能解决这一类问题,并且能重复使用.例如课本例 1 关于二元一次方程组的求解问题,也适应于其他二元一次方程组的求解.

(2)逻辑性:也就是算法应具有正确性与顺序性.算法从初始步骤开始,分为若干明确的步骤,前一步是后一步的基础,只有执行完前一步才能进行下一步,并且每一步都具有确切的含义,从而组成了一个具有很强逻辑性的序列.

(3)有限性:一个算法必须保证执行有限步之后结束.

(4)不唯一性:求解某个问题的算法不一定是唯一的,对于一个问题可以有不同的算法,如课本 P4 解二元一次方程组的算法.

(5)普遍性:很多具体的问题,都可以设计合理的算法去解决,例如用心算、手算、计算器计算都要经过有限的、事先设计好的步骤去加以解决,同样一个工作计划、教学计划、生产流程都可称为“算法”.

例 3 给出求解方程组 $\begin{cases} 2x+y=7, & \textcircled{1} \\ 4x+5y=11 & \textcircled{2} \end{cases}$ 的一个算法.

分析 1:用高斯消去法求解.

解法 1:S1 $\textcircled{2}-\textcircled{1}\times 2$,得 $3y=-3$; \textcircled{3}

S2 解 $\textcircled{3}$ 得 $y=-1$; \textcircled{4}

S3 将 $\textcircled{4}$ 代入 $\textcircled{1}$,得 $x=4$.

分析 2:用公式法求解.

解法 2:S1 计算 $D=2\times 5-4\times 1=6$;

S2 因为 $D=6\neq 0$,所以

$$x=\frac{7\times 5-11\times 1}{6}=4,$$

$$y=\frac{11\times 2-7\times 4}{6}=-1;$$

S3 输出 $x=4, y=-1$.

评注

本题的算法1是由加减消元法求解的. 这个算法也适合一般的二元一次方程组的解法. 下面写出求方程组 $\begin{cases} A_1x+B_1y+C_1=0, & \textcircled{1} \\ A_2x+B_2y+C_2=0 & \textcircled{2} \end{cases}$ ($A_1B_2-A_2B_1 \neq 0$) 的解的

算法: 第一步: $\textcircled{2} \times A_1 - \textcircled{1} \times A_2$, 得 $(A_1B_2 - A_2B_1)y + A_1C_2 - A_2C_1 = 0$; ③

第二步: 解③, 得 $y = \frac{A_2C_1 - A_1C_2}{A_1B_2 - A_2B_1}$;

第三步: 将 $y = \frac{A_2C_1 - A_1C_2}{A_1B_2 - A_2B_1}$ 代入①, 得 $x = \frac{-B_2C_1 + B_1C_2}{A_1B_2 - A_2B_1}$.

此时我们得到了二元一次方程组的求解公式, 利用此公式可得到例3的另一个算法:

第一步: 取 $A_1=2, B_1=1, C_1=-7, A_2=4, B_2=5, C_2=-11$;

第二步: 计算 $x = \frac{-B_2C_1 + B_1C_2}{A_1B_2 - A_2B_1}$ 与 $y = \frac{A_2C_1 - A_1C_2}{A_1B_2 - A_2B_1}$;

第三步: 输出运算结果.

可见利用上述算法, 更加有利于上机执行与操作.

知识点3 设计算法的要求

(1) 写出的算法, 必须能解决一类问题(如判断一个任意整数 n 是否为质数, 求任意一个函数式的近似解), 并且能够重复使用;

(2) 要使算法尽量简单, 步骤尽量少, 算法从初始步骤开始, 每一个步骤只能有一个后继步骤, 从而组成一个步骤序列, 序列的终止表示问题得到解答或指出问题没有解答.

(3) 算法过程要能一步一步执行, 每一步执行的操作, 必须确切, 不能含糊不清, 而且在有限步后能得出结果.

例4 写出求 $1+2+3+4+5+6$ 的一个算法.

分析: 可以按逐一相加的程序进行, 也可以利用公式 $1+2+\dots+n = \frac{n(n+1)}{2}$ 进行, 也可以根据加法运算律简化运算过程.

算法1:

第一步: 计算 $1+2$ 得 3;

第二步: 将第一步中的运算结果 3 与 3 相加得到 6;

第三步: 将第二步中的运算结果 6 与 4 相加得到 10;

第四步: 将第三步中的运算结果 10 与 5 相加得到 15;

第五部: 将第四步中的运算结果 15 与 6 相加得到 21.

算法2:

第一步: 取 $n=6$;

第二步: 计算 $\frac{n(n+1)}{2}$;

第三步:输出运算结果.

算法 3:

第一步:将原式变形为 $(1+6)+(2+5)+(3+4)=3\times 7$;

第二步:计算 3×7 ;

第三步:输出运算结果.

评注

算法 1 是最原始的方法,最为繁琐,步骤较多,当加数较大比如 $1+2+3+\dots+10\,000$,再用这种方法是行不通的;算法 2 与算法 3 都是比较简单的算法,但比较而言,算法 2 最为简单,且易于在计算机上执行操作.

例 5 求半径为 2 的圆的面积,设计该问题的算法(精确度为 0.001).

分析:根据 $S=\pi r^2$ 求解,由于精确度为 0.001, π 取 3.141 6.

解:算法如下:第一步:取 $r=2$;

第二步:计算 $S=3.141\,6\times 2^2$;

第三步:输出结果;

第四步:根据精确度,确定答案.

评注

求平面图形的面积,是有公式可以套用的,在选算法时,一般选择面积公式作为解决问题的算法.

学习本节应注意的问题

1. 要在理解算法概念的基础上,掌握算法的基本思想,发展有条理的思考与表达能力,提高逻辑思维能力.

2. 通过实践领会算法的精要,也可以用它们的思想与方法解决实际问题.

二、教材题目研究

本节教材给出 3 个例题,其中例 1 是著名的“鸡兔同笼”问题,通过用解二元一次方程组的方法求解鸡兔同笼问题引出一般的二元一次方程组的算法,即高斯消去法.另外,学习本例应注意:算法实际上就是解决问题的步骤和方法,由于求解问题的出发点不同,能得到不同的算法,算法不同于求解一个具体问题的方法,它解决的是一类问题,并且能重复使用,算法要求“按部就班地做”,每一步都有唯一的结果,无论是用计算器、计算机,还是人工计算都得出相同的结果,且在有限步之内完成;例 2 是写出一个求有限整数序列中最大值的算法,用自然语言叙述比较容易理解,应注意 S_2 、 S_3 是实现将序列的整数逐一与假定的最大值进行比较,一直比到没有可比的数为止,这样符合算法程序的要求;例 3 是一个操作题,是应用 Scilab 指令解方程组,要注意用 Scilab 程序求解线性方程组,不论给出的是多少个未知数的线性方程组,只要按例 3 的格式,在 Scilab 界面上输入给定的数据,转瞬间就会输出解答.

典型例题解析

题型一 解方程(方程组)、不等式的算法

例1 给出解方程 $ax^2+bx+c=0$ (a, b, c 为实常数) 的一个算法.

分析: 分 $a=0$ 和 $a \neq 0$ 两种情况: 当 $a=0$ 时, 分 $b=0, c=0$ 或 $b=0, c \neq 0$ 或 $b \neq 0$ 三种情况; $a \neq 0$ 时, 分 $\Delta > 0, \Delta = 0, \Delta < 0$ 三种情况讨论.

解: 算法步骤如下:

第一步: 当 $a=0, b=0, c=0$ 时, 解集为全体实数;

第二步: $a=0, b=0, c \neq 0$ 时, 原方程无实数解;

第三步: $a=0, b \neq 0$ 时, 原方程的解为 $x = -\frac{c}{b}$;

第四步: $a \neq 0$ 且 $b^2 - 4ac > 0$ 时, 方程有两个不等实根

$$x_1 = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}, x_2 = \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a};$$

第五步: $a \neq 0, b^2 - 4ac = 0$ 时, 方程有两个相等实根 $x_1 = x_2 = -\frac{b}{2a}$;

第六步: $a \neq 0$ 且 $b^2 - 4ac < 0$ 时, 方程没有实数根.

评注

求方程 $ax^2+bx+c=0$ 的根必须先讨论是否是二次方程问题. $a=0$ 时, 必须讨论是不是一次方程问题. 当 $a \neq 0$ 时, 再去讨论 Δ 的符号.

变式引申: 写出解方程 $x^2 - 2x + 3 = 0$ 的一个算法.

分析: 本题是求一元二次方程的解的问题, 方法很多, 下面利用配方法、因式分解法、公式法写出这个问题的三个算法.

解: 算法1: 第一步: 将方程左边因式分解, 得 $(x-3)(x+1)=0$; ①

第二步: 由①得 $x-3=0$, ②

或 $x+1=0$; ③

第三步: 解②得 $x=3$, 解③得 $x=-1$.

算法2: 第一步: 移项, 得 $x^2 - 2x = -3$; ①

第二步: ①式两边同加1并配方, 得 $(x-1)^2 = 4$; ②

第三步: ②式两边开方, 得 $x-1 = \pm 2$; ③

第四步: 解③式得 $x=3$ 或 $x=-1$.

算法3: 第一步: 计算方程的判别式判断其符号 $\Delta = 2^2 + 4 \times 3 = 16 > 0$;

第二步: 将 $a=1, b=-2, c=-3$, 代入求根公式, 得 $x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$,

得 $x_1=3, x_2=-1$.

评注

比较三种算法,算法3更简单,步骤最少,由此我们只要有公式可以利用,利用公式解决问题是最理想、合算的算法.因此在寻求算法的过程中,首先是利用公式.下面我们设计一个求一般的一元二次方程 $ax^2+bx+c=0(a \neq 0)$ 的根的算法如下:

第一步:计算 $\Delta=b^2-4ac$;

第二步:若 $\Delta < 0$;

第三步:方程无实根;

第四步:若 $\Delta \geq 0$;

第五步:方程根 $x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2-4ac}}{2a}$.

例2 写出解二元一次方程组

$$\begin{cases} A_1x+B_1y+C_1=0, & \textcircled{1} \\ A_2x+B_2y+C_2=0 & \textcircled{2} \end{cases}$$

($A_1B_2-A_2B_1 \neq 0$) 的一个算法(提示:用加减消元法解方程组).

分析:由 $A_1B_2-A_2B_1 \neq 0$ 可知两个二元一次方程组表示的直线不平行且不重合,即两条直线必有一个交点也就是方程组必有一组解,可以用代入消元法或加减消元法解此方程组.

解:算法如下:

第一步:① $\times A_2$,得 $A_1A_2x+A_2B_1y+A_2C_1=0$; ③

第二步:② $\times A_1$,得 $A_1A_2x+A_1B_2y+A_1C_2=0$; ④

第三步:④-③,得 $(A_1B_2-A_2B_1)y+A_1C_2-A_2C_1=0$; ⑤

第四步:解⑤,得 $y = \frac{C_1A_2-C_2A_1}{A_1B_2-A_2B_1}$;

第五步:将 $y = \frac{C_1A_2-C_2A_1}{A_1B_2-A_2B_1}$ 代入①,得 $x = \frac{C_2B_1-C_1B_2}{A_1B_2-A_2B_1}$;

第六步:输出 x, y .

评注

该二元一次方程组是二元一次方程组的一般形式,实质上是推导了求 x, y 的公式,即 $x = \frac{C_2B_1-C_1B_2}{A_1B_2-A_2B_1}, y = \frac{C_1A_2-C_2A_1}{A_1B_2-A_2B_1}$, 因此给出一个系数为常数的二元一次方程组,求它的解,除了根据本题的算法以外,还可以把它当作公式使用,就有了解二元一次方程组的公式法.在我们看来记忆非常麻烦,而作为计算机来讲只要有了相关的存储单元,将各系数输入就可直接输出方程组的解.

例3 写出解方程 $px+q=0$ (其中 p, q 为常数)的一个算法.

分析:方程 $px+q=0$ 的根与 p, q 的取值关系密切.