普通高等学校基础课辅导用书

大学数学

典型题解析

(线性代数与概率统计分册)

主编 陈 仲

编者 陈 仲

范红军

南京大学出版社

普通高等学校基础课辅导用书

大学数学典型题解析

(线性代数与概率统计分册)

主编 陈　仲
编者 陈　仲
　　 范红军

南京大学出版社

内容简介

本书根据教育部制定的《高等数学课程教学基本要求》编写. 考虑学生考研的要求，编写时参照了教育部制定的考研《数学考试大纲》. 全书含两个分册，本册是线性代数与概率统计分册，内容为行列式、矩阵、向量、线性方程组、矩阵的对角化、二次型、随机事件和概率、随机变量及其概率分布、随机变量的数字特征、大数定律和中心极限定理、数理统计初步、参数估计和假设检验.

本书从大学数学教材和习题集中，从高校历年期中考试、期末考试试题中，以及从历年硕士研究生入学考试题中，精选了 800 余例典型题，逐条详细解析，指出可能发生的错误，总结解题方法和技巧，指导学生举一反三，触类旁通.

本书可作为高等学校大学数学课程的教学参考书，习题课教材，以及考研复习用书.

图书在版编目(CIP)数据

大学数学典型题解析. 线性代数与概率统计分册/
陈仲主编. 一南京：南京大学出版社，2006.6
普通高等学校基础课辅导用书
ISBN 7-305-04735-X

Ⅰ.大... Ⅱ.陈... Ⅲ.高等数学一高等学校一
解题 Ⅳ.013-44

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2006)第 044198 号

书　　名	**大学数学典型题解析(线性代数与概率统计分册)**
编 著 者	陈　仲　范红军
出版发行	南京大学出版社
社　　址	南京市汉口路 22 号　邮编 210093
电　　话	025-83596923　025-83592317　传真 025-83328362
网　　址	http://press.nju.edu.cn
电子邮件	nupress1@public1.ptt.js.cn sales@press.nju.edu.cn(销售部)
印　　刷	南京京新印刷厂
开　　本	850×1168　1/32　印张 10.375　字数 258 千
版　　次	2006 年 6 月第 1 版第 1 次印刷
ISBN	7-305-04735-X/O·377
定　　价	15.80 元

前　言

大学数学是高等学校理、工、文科各系的公共必修基础课.学习大学数学,除掌握数学的基本概念、基本理论和基本方法外,更重要的是使自己受到良好的科学训练,得到数学思维方法、逻辑推理能力的培养,获得一定的数学素养,为学习专业课和后续课打下扎实的基础.因此要学好大学数学成了每个大学生的共识.

大学数学是一门系统、严谨的学科,内容多,教学进度快,致使相当多的刚进入大学的大学生感到学习困难.我们编写这本书的宗旨就是指导大学生学好大学数学.

本书根据教育部制定的《高等数学课程教学基本要求》编写,并参照了教育部制定的全国硕士研究生入学统一考试《数学考试大纲》.按其内容分为两个分册(高等数学分册,线性代数与概率统计分册),第一分册包括一元函数微积分、空间解析几何、多元函数微积分、无穷级数、常微分方程;第二分册包括行列式、矩阵、向量、线性方程组、矩阵的对角化、二次型、随机事件和概率、随机变量及其概率分布、随机变量的数字特征、大数定律和中心极限定理、数理统计初步、参数估计与假设检验.全书共 22 章,每章分两部分,第一部分是“基本概念与内容提要”,列出主要概念、基本内容,并对其中的重要内容和主要定理作详细叙述,希望读者能掌握这些内容,它是学好大学数学的基础.第二部分是“典型习题与试题解析”,编者从有关教材与习题集中,从历年高校期中考试、期末考试试题中,以及从历年硕士研究生入学考试题(包括统考与单独考试)中,精选出典型题共 800 余例,逐条详细解析,对重要题目深入分析研究,总结出解题方法和技

巧,并指出可能发生的错误.这些典型题解析内容广、类型多、技巧强,是本书的核心内容.编者希望通过典型题解析,指导大学生如何解题,做到举一反三,触类旁通.各类学生可根据自己的专业要求,选学本书;文科学生和对大学数学要求较低的学生,对书中的难题可以删略.解题能力虽不是大学数学教学的全部内容,但它是学好大学数学的试金石.读者如能阅读好本书的典型题解析,定能提高分析能力,掌握解题技巧,提升应试水平.为了帮助读者检测学习效果,全书共设置11份阶段复习试题(书末附有试题答案与提示).

参与本书编写和资料收集整理工作的还有黄卫华、陈庆、李明、吴汀和潘新华.

本书可供高等学校学生作为学习大学数学课程的教学参考书,可供准备考研的人员作为复习备考用书,可供高等学校教师作为习题课教材或教学参考书.

由于编者水平所限,书中缺点和错误难免,恳请读者批评、指正.

陈 仲

目　　录

1 行列式

1.1 基本概念与内容提要

1）行列式的定义

n 阶行列式

$$\det \boldsymbol{A} = |\boldsymbol{A}| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

定义为

(1) 当 $n=1$ 时，$\det(a_{11}) \xlongequal{\text{def}} a_{11}$；

(2) 当 $n>1$ 时，

$$|\boldsymbol{A}| \xlongequal{\text{def}} \sum_{j=1}^{n}(-1)^{1+j}a_{1j}M_{1j} = \sum_{j=1}^{n}a_{1j}A_{1j},$$

这里 M_{ij} 是 $\boldsymbol{A}$ 中元素 a_{ij} 的余子式，A_{ij} 是 $\boldsymbol{A}$ 中元素 a_{ij} 的代数余子式.

2）* 行列式的性质[①]

(1) 转置行列式的值不变，即 $|\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}|=|\boldsymbol{A}|$.

(2) 两行交换，行列式的值反号.

(3) 某一行的公因子可提出去.

---

① 本书中标“*”的内容为重点.

(4) 某行乘以常数 k 后加到另一行上去，行列式的值不变.

3)* 几个常用公式

(1) 分块行列式

$$\begin{vmatrix} \boldsymbol{A} & \boldsymbol{O} \\ \boldsymbol{O} & \boldsymbol{B} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \boldsymbol{A} & \boldsymbol{O} \\ \boldsymbol{C}_1 & \boldsymbol{B} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \boldsymbol{A} & \boldsymbol{C}_2 \\ \boldsymbol{O} & \boldsymbol{B} \end{vmatrix} = |\boldsymbol{A}||\boldsymbol{B}|.$$

(2) 范德蒙行列式

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ a_1 & a_2 & \cdots & a_n \\ a_1^2 & a_2^2 & \cdots & a_n^2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_1^{n-1} & a_2^{n-1} & \cdots & a_n^{n-1} \end{vmatrix} = \prod_{1\leqslant i<j\leqslant n}(a_j - a_i).$$

(3) 可按任一行(或列)展开

$$|\boldsymbol{A}| = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}\boldsymbol{A}_{ij} \qquad (1 \leqslant i \leqslant n),$$

$$|\boldsymbol{A}| = \sum_{i=1}^{n} a_{ij}\boldsymbol{A}_{ij} \qquad (1 \leqslant j \leqslant n).$$

1.2 典型习题与试题解析

例 1.1 求

$$\boldsymbol{D}_4 = \begin{vmatrix} a_1 & 0 & 0 & b_1 \\ 0 & a_2 & b_2 & 0 \\ 0 & b_3 & a_3 & 0 \\ b_4 & 0 & 0 & a_4 \end{vmatrix}.$$

解析 按第一行展开得

$$\boldsymbol{D}_4 = a_1 \begin{vmatrix} a_2 & b_2 & 0 \\ b_3 & a_3 & 0 \\ 0 & 0 & a_4 \end{vmatrix} - b_1 \begin{vmatrix} 0 & a_2 & b_2 \\ 0 & b_3 & a_3 \\ b_4 & 0 & 0 \end{vmatrix}$$

$$= a_1 a_4 \begin{vmatrix} a_2 & b_2 \\ b_3 & a_3 \end{vmatrix} - b_1 b_4 \begin{vmatrix} a_2 & b_2 \\ b_3 & a_3 \end{vmatrix}$$

$$= (a_1 a_4 - b_1 b_4)(a_2 a_3 - b_2 b_3).$$

例 1.2 求

$$\boldsymbol{D}_n = \begin{vmatrix} n & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 2 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & n-1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \end{vmatrix}.$$

解析 逐次按第 1 列展开得

$$\boldsymbol{D}_n = n \begin{vmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \\ 0 & 0 & \cdots & 2 & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ n-1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \end{vmatrix}$$

$$= n(n-1)(-1)^{n-1+1} \begin{vmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \\ 0 & 0 & \cdots & 2 & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ n-2 & 0 & \cdots & 0 & 0 \end{vmatrix}$$

$$= n(n-1)(n-2)(-1)^{n+(n-1)} \begin{vmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \\ 0 & 0 & \cdots & 2 & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ n-3 & 0 & \cdots & 0 & 0 \end{vmatrix}$$

$$= n(n-1)(n-2)\cdots 3 \cdot (-1)^{n+(n-1)+\cdots+4} \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 0 \end{vmatrix}$$

$$= n!(-1)^{3+4+\cdots+n} = (-1)^{\frac{1}{2}(n-2)(n+3)} n!$$

$$= (-1)^{\frac{1}{2}n(n+1)+1} n!.$$

例 1.3　设 a_{ij} 为 1 或 $-1(i,j=1,2,\cdots,n)$，则

$$\boldsymbol{D}_n=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}= \qquad (\quad)$$

A. 奇数　　B. 偶数　　C. 0　　D. 不确定

解析　$\boldsymbol{D}_n$ 的展开式中含 $n!$项，每一项都是不相同的 a_{ij} 的乘积，所以每一项是 1 或 -1，设 $n!$项中有 k 项为 -1，则 $n!$项中有 $n!-k$ 项为 1，于是 $\boldsymbol{D}_n=-k+(n!-k)=n!-2k$. 即 $\boldsymbol{D}_n$ 必为偶数，选(B).

例 1.4　设 $\boldsymbol{A}$ 为 m 阶矩阵，$\boldsymbol{B}$ 为 n 阶矩阵，且 $|\boldsymbol{A}|=a$，$|\boldsymbol{B}|=b$，求 $\begin{vmatrix} \boldsymbol{O} & \boldsymbol{A} \\ \boldsymbol{B} & \boldsymbol{O} \end{vmatrix}$.

解析　将 $\boldsymbol{A}$ 中每一列逐次与它的前一列对调，直至调为 $\begin{vmatrix} \boldsymbol{A} & \boldsymbol{O} \\ \boldsymbol{O} & \boldsymbol{B} \end{vmatrix}$ 的形式，则一共调换了 $m\times n$ 次，故

$$\begin{vmatrix} \boldsymbol{O} & \boldsymbol{A} \\ \boldsymbol{B} & \boldsymbol{O} \end{vmatrix}=(-1)^{m\cdot n}\begin{vmatrix} \boldsymbol{A} & \boldsymbol{O} \\ \boldsymbol{O} & \boldsymbol{B} \end{vmatrix}=(-1)^{m\cdot n}\,|\boldsymbol{A}||\boldsymbol{B}|=(-1)^{mn}ab.$$

例 1.5　求方程

$$f(x)=\begin{vmatrix} x & a & b & c \\ a & x & b & c \\ a & b & x & c \\ a & b & c & x \end{vmatrix}=0$$

的根.

解析　用加边后化零法，

$$f(x)=(x+a+b+c)\begin{vmatrix} 1 & a & b & c \\ 1 & x & b & c \\ 1 & b & x & c \\ 1 & b & c & x \end{vmatrix}$$

$$= (x+a+b+c)\begin{vmatrix} 1 & a & b & c \\ 0 & x-a & 0 & 0 \\ 0 & b-a & x-b & 0 \\ 0 & b-a & c-b & x-c \end{vmatrix}$$

$$= (x+a+b+c)\begin{vmatrix} x-a & 0 & 0 \\ b-a & x-b & 0 \\ b-a & c-b & x-c \end{vmatrix}$$

$$= (x+b+b+c)(x-a)(x-b)(x-c) = 0,$$

故 $f(x)=0$ 的根为 a，b，c，$-(a+b+c)$.

例 1.6 求方程

$$f(x) = \begin{vmatrix} x-2 & x-1 & x-2 & x-3 \\ 2x-2 & 2x-1 & 2x-2 & 2x-3 \\ 3x-3 & 3x-2 & 4x-5 & 3x-5 \\ 4x & 4x-3 & 5x-7 & 4x-3 \end{vmatrix} = 0$$

的根.

解析 分析题给行列式的特征，可化为下三角分块行列式. 各列减第一列得

$$f(x) = \begin{vmatrix} x-2 & 1 & 0 & -1 \\ 2x-2 & 1 & 0 & -1 \\ 3x-3 & 1 & x-2 & -2 \\ 4x & -3 & x-7 & -3 \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} x-2 & 1 & 0 & 0 \\ 2x-2 & 1 & 0 & 0 \\ 3x-3 & 1 & x-2 & -1 \\ 4x & -3 & x-7 & -6 \end{vmatrix}.$$

应用下三角分块行列式的计算公式得

$$f(x) = \begin{vmatrix} x-2 & 1 \\ 2x-2 & 1 \end{vmatrix}\begin{vmatrix} x-2 & -1 \\ x-7 & -6 \end{vmatrix} = -x(-5x+5) = 0,$$

所以 $x=0$，1 为 $f(x)=0$ 的两个根.

例 1.7 设

$$|\boldsymbol{A}|=\begin{vmatrix}2&1&-3&5\\1&1&1&2\\4&2&3&1\\2&5&8&7\end{vmatrix},$$

$|\boldsymbol{A}|$ 中元素 a_{ij} 的余子式记为 M_{ij}，a_{ij} 的代数余子式记为 A_{ij}，求

(1) $A_{41}+A_{42}+A_{43}+A_{44}$；

(2) $M_{41}+M_{42}+M_{43}+M_{44}$.

解析 (1) 将 $|\boldsymbol{A}|$ 中第 4 行改为 $(1\quad 1\quad 1\quad 1)$，并按第 4 行展开得

$$\sum_{j=1}^{4}A_{4j}=\begin{vmatrix}2&1&-3&5\\1&1&1&2\\4&2&3&1\\1&1&1&1\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}2&1&-3&5\\1&1&1&2\\4&2&3&1\\0&0&0&-1\end{vmatrix}$$

$$=-\begin{vmatrix}2&1&-3\\1&1&1\\4&2&3\end{vmatrix}=-\begin{vmatrix}1&1&-4\\0&1&0\\2&2&1\end{vmatrix}=-\begin{vmatrix}1&-4\\2&1\end{vmatrix}$$

$$=-9.$$

(2) 将 $|\boldsymbol{A}|$ 中第 4 行改为 $(-1\quad 1\quad -1\quad 1)$，并按第 4 行展开得

$$\sum_{j=1}^{4}M_{4j}=\begin{vmatrix}2&1&-3&5\\1&1&1&2\\4&2&3&1\\-1&1&-1&1\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}2&-1&-5&1\\1&0&0&0\\4&-2&-1&-7\\0&2&0&3\end{vmatrix}$$

$$=-\begin{vmatrix}-1&-5&1\\-2&-1&-7\\2&0&3\end{vmatrix}=-\begin{vmatrix}1&5&-1\\2&1&7\\2&0&3\end{vmatrix}$$

$$=-\begin{vmatrix} -9 & 0 & -36 \\ 2 & 1 & 7 \\ 2 & 0 & 3 \end{vmatrix}=-\begin{vmatrix} -9 & -36 \\ 2 & 3 \end{vmatrix}=-45.$$

例 1.8 求行列式

$$\boldsymbol{D}_4=\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ a & b & c & d \\ a^2 & b^2 & c^2 & d^2 \\ a^4 & b^4 & c^4 & d^4 \end{vmatrix}.$$

解析 考虑 5 阶范德蒙行列式

$$\begin{aligned}\boldsymbol{V}_5=&\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ a & b & c & d & x \\ a^2 & b^2 & c^2 & d^2 & x^2 \\ a^3 & b^3 & c^3 & d^3 & x^3 \\ a^4 & b^4 & c^4 & d^4 & x^4 \end{vmatrix}\\ =&(x-a)(x-b)(x-c)(x-d)(d-a)(d-b)(d-c)\cdot\\ &(c-a)(c-b)(b-a),\end{aligned}$$

则 $\boldsymbol{D}_4$ 为 $\boldsymbol{V}_5$ 中元素 x^3 的余子式 M_{45}. 由于 $\boldsymbol{V}_5$ 中元素 x^3 的代数余子式 A_{45} 为 $\boldsymbol{V}_5$ 的展开式中 x^3 的系数,所以

$$A_{45}=-(a+b+c+d)(d-a)(d-b)(d-c)(c-a)(c-b)(b-a).$$

于是 $$\begin{aligned}\boldsymbol{D}_4&=M_{45}=-A_{45}\\&=(a+b+c+d)(d-a)(d-b)(d-c)(c-a)(c-b)(b-a).\end{aligned}$$

例 1.9 求

$$\boldsymbol{D}_n=\begin{vmatrix} 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & \cdots & \frac{1}{n} \\ 2 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 3 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ n & 0 & 0 & \cdots & 1 \end{vmatrix}.$$

解析　第 2 列乘以 2,第 3 列乘以 3,…,第 n 列乘以 n;同时第 2 行除以 2,第 3 行除以 3,…,第 n 行除以 n 得

$$\boldsymbol{D}_n = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & 0 & 0 & \cdots & 1 \end{vmatrix},$$

第 i 列乘以(-1)加到第 1 列$(i=2, \cdots, n)$得

$$\boldsymbol{D}_n = \begin{vmatrix} 2-n & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \end{vmatrix} = 2-n.$$

例 1.10　求

$$\boldsymbol{D}_n = \begin{vmatrix} 1-a & a & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ -1 & 1-a & a & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1-a & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1-a & a \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & -1 & 1-a \end{vmatrix}.$$

解析　加边后按第 1 列展开得

$$\begin{aligned} \boldsymbol{D}_n &= \begin{vmatrix} 1 & a & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 1-a & a & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1-a & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1-a & a \\ -a & 0 & 0 & \cdots & -1 & 1-a \end{vmatrix} \\ &= \boldsymbol{D}_{n-1} + (-1)^{n+1}(-a)a^{n-1} \\ &= \boldsymbol{D}_{n-1} + (-a)^n \qquad \text{(依此类推)} \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= \boldsymbol{D}_{n-2} + (-a)^{n-1} + \cdots + (-a)^n \\
&= \boldsymbol{D}_2 + (-a)^3 + (-a)^4 + \cdots + (-a)^n \\
&= 1 - a + a^2 - a^3 + a^4 - \cdots + (-1)^n a^n.
\end{aligned}
$$

例 1.11　求行列式

$$
\boldsymbol{D}_n = \begin{vmatrix} 1-x & 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 \\ 0 & 1-x & 1 & \cdots & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1-x & \cdots & 1 & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1-x & 1 \\ x & x & x & \cdots & x & 1 \end{vmatrix}.
$$

解析　逐次作变换：第 n 列减去第 $n-1$ 列，…，第 2 列减去第 1 列，再按第 1 行展开，

$$
\boldsymbol{D}_n = \begin{vmatrix} 1-x & x & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 1-x & x & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1-x & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1-x & x \\ x & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1-x \end{vmatrix}
$$

$$
= (1-x)\begin{vmatrix} 1-x & x & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 1-x & x & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1-x & x \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1-x \end{vmatrix} +
$$

$$
(-1)^{n+1}x\begin{vmatrix} x & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 1-x & x & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 1-x & x & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & x & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1-x & x \end{vmatrix}
$$

$$= (1-x)^n + (-1)^{n+1}x^n = (1-x)^n - (-x)^n.$$

例 1.12　求行列式

$$\boldsymbol{D}_n = \begin{vmatrix} x & a & a & \cdots & a & a \\ b & x & a & \cdots & a & a \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ b & b & b & \cdots & x & a \\ b & b & b & \cdots & b & x \end{vmatrix}.$$

解析　(1) 当 $a=b$ 时，用加边后化零法，

$$\boldsymbol{D}_n = (x+(n-1)a)\begin{vmatrix} 1 & a & a & \cdots & a \\ 0 & x-a & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & x-a \end{vmatrix}$$

$$= (x+(n-1)a)(x-a)^{n-1}.$$

(2) 当 $a\neq b$ 时，

$$\boldsymbol{D}_n = \begin{vmatrix} x-a & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ b & x & a & \cdots & a & a \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ b & b & b & \cdots & x & a \\ b & b & b & \cdots & b & x \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a & a & a & \cdots & a & a \\ b & x & a & \cdots & a & a \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ b & b & b & \cdots & x & a \\ b & b & b & \cdots & b & x \end{vmatrix}$$

$$= (x-a)\boldsymbol{D}_{n-1} + a\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 \\ b & x & a & \cdots & a & a \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ b & b & b & \cdots & x & a \\ b & b & b & \cdots & b & x \end{vmatrix}$$

$$= (x-a)\boldsymbol{D}_{n-1} + a\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ b & x-b & a-b & \cdots & a-b & a-b \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ b & 0 & 0 & \cdots & x-b & a-b \\ b & 0 & 0 & \cdots & 0 & x-b \end{vmatrix}$$