

经全国中小学教材审定委员会 2005 年初审通过  
普通高中课程标准实验教科书

# 数学



(选修3-1)

## 数学史选讲

## SHUXUE



北京师范大学出版社

经全国中小学教材审定委员会2005年初审通过  
普通高中课程标准实验教科书

# 数学



(选修3-1)

## 数学史选讲 SHUXUE

主 编 严士健 王尚志  
副 主 编 张饴慈 李延林 张思明  
本册主编 张顺燕 王尚志  
编写人员 (按 姓 氏 笔 画 排 序)  
王尚志 刘卫锋 严士健  
张饴慈 张顺燕 赵冬歌

北京师范大学出版社  
· 北 京 ·

北京师范大学出版社出版发行  
(北京新街口外大街 19 号 邮政编码:100875)

<http://www.bnup.com.cn>

出版人:赖德胜

唐山市润丰印务有限公司印装 全国新华书店经销

开本:210 mm×297 mm 印张:7 字数:118 千字

2005 年 8 月第 1 版 2005 年 8 月第 1 次印刷

定价:6.30 元

# 引 言

在整个中小学时代,数学是我们学习时间最长的学科之一.为了更好地学习数学,我们需要了解数学的历史.学习数学的一些历史,可以帮助我们了解数学发展的来龙去脉,了解数学在现实社会中的广泛应用,了解数学在人类文明发展中的作用和意义,提高学习数学的兴趣.

一门科学的历史是这门科学中最宝贵的部分,历史不仅能给我们知识,还能给我们智慧.我们选取了一些在数学史上具有典型意义的实例,通过这些实例介绍数学的思想和方法.

通过数学史的学习,我们会明白数学知识的积累是一个一点一滴的缓慢过程.它走过了一条曲折而漫长的道路.数学家们在创造这些知识的过程中,也是跌跌碰碰地前进,并且经常犯错误.了解这些,会消除我们对天才的盲目崇拜,从而增强自己的信心.

数学史是人类文明史中最灿烂、最光辉的一页,它与人类的进步密切地交织在一起.数学已经进入我们现代生活的方方面面.无论在航天、航海,还是电视、电话、计算机等方面,数学都起着主导作用.无法想像,我们的社会生活中没有了数学,会出现什么状况.

在数学史的学习中,我们能了解到古人研究了哪些基本问题,什么问题重要,什么问题不重要,可为我们日后选择研究问题提供借鉴;我们还可以了解到,古人是如何一步一步解决问题的,方法是如何进步的;同时,观察和领悟大师们在创造知识时的心智过程,会帮助我们增长智慧.

我们将讲授一些数学家的故事,从这些故事中,我们可以看到科学家们不屈不挠、勇于探索的精神,这些故事寓意深刻,可以给我们以多方面的启发.

# 目 录

|                             |      |
|-----------------------------|------|
| 第一章 数学发展概述 .....            | (1)  |
| §1 从数学的起源、早期发展到初等数学形成 ..... | (1)  |
| 习题 1—1 .....                | (7)  |
| §2 从变量数学到现代数学 .....         | (8)  |
| 习题 1—2 .....                | (12) |
| 复习题一 .....                  | (13) |
| 第二章 数与符号 .....              | (14) |
| §1 数的表示与十进制 .....           | (14) |
| 习题 2—1 .....                | (15) |
| §2 数的扩充 .....               | (16) |
| 习题 2—2 .....                | (20) |
| §3 数学符号 .....               | (22) |
| 习题 2—3 .....                | (25) |
| 复习题二 .....                  | (26) |
| 第三章 几何学发展史 .....            | (27) |
| §1 从经验几何到演绎几何 .....         | (27) |
| 习题 3—1 .....                | (33) |
| §2 投影画与射影几何 .....           | (34) |
| 习题 3—2 .....                | (38) |
| §3 解析几何 .....               | (39) |
| 习题 3—3 .....                | (41) |
| 复习题三 .....                  | (42) |
| 第四章 数学史上的丰碑——微积分 .....      | (44) |
| §1 积分思想的渊源 .....            | (44) |
| 习题 4—1 .....                | (47) |

|              |      |
|--------------|------|
| § 2 圆周率····· | (50) |
| 习题 4—2 ····· | (53) |
| § 3 微积分····· | (54) |
| 习题 4—3 ····· | (59) |
| 复习题四 ·····   | (62) |

## 第五章 无 限····· (63)

|                  |      |
|------------------|------|
| § 1 初识无限·····    | (63) |
| 习题 5—1 ·····     | (69) |
| *§ 2 实数集的基数····· | (70) |
| 习题 5—2 ·····     | (72) |
| 复习题五 ·····       | (73) |

## 第六章 名题赏析····· (75)

|                   |      |
|-------------------|------|
| § 1 费马大定理·····    | (76) |
| 习题 6—1 ·····      | (79) |
| § 2 哥尼斯堡七桥问题····· | (80) |
| 习题 6—2 ·····      | (84) |
| § 3 高次方程·····     | (85) |
| 习题 6—3 ·····      | (89) |
| § 4 中国剩余定理·····   | (90) |
| 习题 6—4 ·····      | (93) |
| § 5 哥德巴赫猜想·····   | (94) |
| 习题 6—5 ·····      | (97) |
| 复习题六 ·····        | (98) |

## 复习小结建议····· (99)

## 附录 1 参考书目····· (102)

## 附录 2 阿基米德的平衡法推导球的体积····· (103)

## 附录 3 部分数学专业词汇中英文对照表····· (104)

## 附录 4 信息检索网址导引····· (105)

# 第一章 数学发展概述

英国科学史家丹皮尔(W. C. Dampier)曾经说过:“再没有什么故事能比科学思想发展的故事更有魅力了。”

本章将简单地介绍数学发展的基本脉络,使我们对于数学发展的特点和取得的重要成果有一个感性的认识,初步了解数学在人类发展中的意义和作用.

## §1 从数学的起源、早期发展到初等数学形成

### 一、数学的起源、早期发展

大约在 30 万年以前,人类就形成了数的概念,它对于人类文明的意义并不亚于火种的作用. 数的概念的产生可以看作数学发展的起点. 直到公元前 6 世纪,数学已经成为人类认识世界和改造世界的有力工具,我们通常把这个时期称为数学的起源与早期发展阶段. 这个阶段主要的标志是:数的概念、记数系统、算术、几何等初步形成.

#### 1. 数的概念和记数系统

人类从记录自己的“劳动成果”开始逐渐产生了数感,同时自然地感到有必要用某种方式来表示这些“劳动成果”,这便产生了记数. 不同的文明创造出了不同的记数系统. 古埃及、古巴比伦和中国的记数系统很具有代表性.

古埃及的形象数字(公元前 3400 年左右):

|    |     |      |       |        |         |          |           |            |             |
|----|-----|------|-------|--------|---------|----------|-----------|------------|-------------|
| 1  | 11  | 111  | 1111  | 11111  | 111111  | 1111111  | 11111111  | 111111111  | 1111111111  |
| 1  | 2   | 3    | 4     | 5      | 6       | 7        | 8         | 9          | 10          |
| 10 | 100 | 1000 | 10000 | 100000 | 1000000 | 10000000 | 100000000 | 1000000000 | 10000000000 |
| 11 | 12  | 20   | 40    | 70     | 100     | 200      | 1000      | 10000      |             |

古巴比伦的楔形数字(公元前2400年左右):

|     |    |    |    |    |    |    |    |    |     |
|-----|----|----|----|----|----|----|----|----|-----|
| 1   | 2  | 3  | 4  | 5  | 6  | 7  | 8  | 9  | 10  |
| 11  | 12 | 20 | 30 | 40 | 50 | 60 | 70 | 80 | 120 |
| 130 |    |    |    |    |    |    |    |    |     |

中国的甲骨文数字(公元前1600年左右):

|   |   |   |   |   |   |   |   |   |      |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|------|
| 一 | 二 | 三 | 四 | 五 | 六 | 七 | 八 | 九 | 十    |
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10   |
|   |   |   |   |   |   |   |   |   | 100  |
|   |   |   |   |   |   |   |   |   | 1000 |

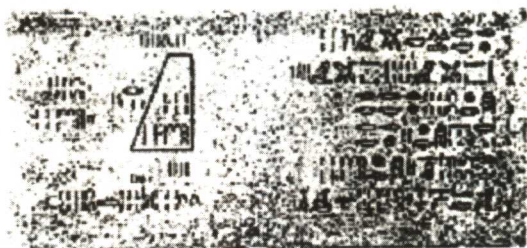
## 2. 经验几何的发展

人类在生产实践活动中,逐渐对最简单的几何概念诸如直线、圆、角、长度、面积等有了初步的认识.

在现存中国最早的数学著作《周髀算经》中,就记载了勾股定理的特例.西周开国时期(约公元前 12 世纪),周公与大夫商高讨论勾股测量问题,商高在回答周公问时,提到“勾广三,股修四,径隅五”,即现在我们常说的“勾三股四弦五”.除此之外,中国在计算一些图形的面积和体积方面也取得了进展.



莱茵德草卷



莫斯科草卷

古埃及人在几何方面同样取得了一些成就.我们对埃及古代数学的了解主要根据 19 世纪中期和末期发现的两卷纸草书.一卷是苏格兰人莱茵德(Henry Rhind)于 1858 年获得的,现存英国博物馆,称“莱茵德草卷”.大约于公元前 1650 年前后写出,其中包含 85 个数学问题.另一卷是俄国人戈列尼雪夫(В. С. Голенищев)于 1893 年获得的,并于 1912 年存入莫斯科博物馆,故称“莫斯科草卷”.据考证,它比“莱茵德草卷”早 2 个世纪,其中包括 25 个数学问题.

在这两部纸草书中,不仅有正方形、矩形、等腰梯形等图形面积的正确计算公式,而且还给出了圆面积的近似算法.此外,古埃及人在体积计算方面也达到很精确的地步,比如他们给出了计算平截头方锥体积的公式等.

两河流域的人们在几何上的成就同样引人注目,他们不仅掌握了三角形、矩形、梯形等平面图形的面积公式,而且也掌握了棱柱、平截头方锥等立体图形的体积公式,等等.这些都是通过出土的约 50 万块泥版文书而获知的.

在古印度的《绳法经》(Sulva sūtras)中,经验几何的成果也有所体现,如勾股定理、矩形对角线的性质、相似三角形、相似四边形及相似五边形的性质,一些作图法包括化圆为方,等等.

## 3. 算术

在前面介绍那两部纸草书中,我们还可以了解到,埃及人不仅掌握自然数的基本算术四则运算,并且已经把它们推广到了分数.他

## 说明

两河流域,位于底格里斯河和幼发拉底河之间,在长达几千年的时间,它一直是世界文明的中心.古代称美索不达米亚,意为两河之间的土地.

他们还发现了求近似平方根的方法,以及能够解包括一次方程和某些类型的二次方程问题.

通过已经出土的约 50 万块泥版文书得知,古代巴比伦人在算术方面也达到了相当高的水平.他们的计数系统是一套以 60 进制为主的楔形文字记数系统,他们知道“位置值”的概念,不仅擅长计算,而且表现出发展程序化算法的意向,例如开方运算;此外,古巴比伦人已经能解一般的二次三项方程式,等等.

中国的算术也十分发达.算术计算是在算板上进行的,特别是计算分数时,我们的古人已经会使用公分母的分数计算法则了.

上面,我们简单列举了一些文明古国在数学上取得的辉煌成就,但是从总体来看,解决的只是一些特殊的数学问题.这些数学成就都是由经验来确定的,仍然处于原始积累时期.这就是这一时期数学发展的特点.

## 二、初等数学(常量数学)的形成

到公元前 6 世纪,数学已经成为人类认识世界、改造世界的重要工具.随着社会和生产的发展,大量数学知识的不断累积,对其进行系统地整理与理论概括就成了一种必然趋势.直到公元 16 世纪,这些系统的整理和理论概括形成了初等数学,也是我们常说的常量数学.

初等数学包括一些主要的数学分支:算术、几何、代数、三角.它的基本成果构成了现在中学数学的主要内容.这个过程延续了两千年左右.

从内容上,初等数学可以分为两部分:几何和代数.在初等数学发展的过程中,中国、希腊、阿拉伯国家、印度等都作出了重大的贡献.在文艺复兴时期,欧洲的一些国家也为初等数学的发展作出了杰出的贡献.

下面我们简要介绍他们所作出的一些重要贡献.

### 1. 希腊

古希腊文明起始于公元前 6 世纪,终止于公元 6 世纪.在这一时期,希腊数学十分活跃,特别在公元前 3 世纪,希腊数学的发展达到了一个顶峰.古代最伟大的几何学家欧多克斯(Eudoxus,约公元前 408—公元前 347)、欧几里得(Euclid,出生年月不详)、阿基米德(Archimedes,公元前 287—公元前 212)、阿波罗尼奥斯(Apollonius of Perge,约公元前 262—公元前 190)是这个时期的代表人物.

古希腊数学最引人注目的贡献有两条:首先,古希腊人认为所有的数学结论只有通过演绎推理才能确定;其次,希腊人将数学抽象化,他们认为抽象概念才是永恒的、理想的和完美的,而物质实体则是短暂的、不完善的和易腐朽的.坚持数学中的演绎法和抽象方法,希腊人创造了我们今天所看到的这门学科.



欧几里得

在前人基础上,欧几里得对数学进行了系统整理和理论概括,他的著作《原本》(Elements)是以最基本的概念、公设、公理为推理的出发点,推导出一系列定理和结论,这就是公理化思想(更详细内容请见第三章).欧几里得的《原本》是数学史上的第一座理论丰碑,其最大的功绩在于确立了数学中的演绎范式.

除欧氏几何外,希腊人在几何方面还取得了许多非常重要的成就.他们研究了圆锥曲线:椭圆、双曲线和抛物线;证明了某些属于射影几何的定理;以天文学为指南,建立了球面几何以及三角学的原理,并计算出最初的一些正弦表;确定了一系列复杂的面积和体积;在几何学方面希腊人已接近“高等数学”;阿基米德对面积与体积的计算接近于积分计算.

在算术和代数的领域中,希腊人也做了不少工作.他们奠定了数论的基础.例如,他们证明了素数的无限性和发现了寻找素数的埃拉托斯特尼筛法(Sieve of Eratosthenes).丢番图(Diophantus)的《算术》(Arithmetica)是希腊人在代数方面取得的最高成就,书中不仅解决了许多不定方程问题,而且开始用一套缩写符号来表示代数问题,这为以后符号数学的发展开了先河.

但是希腊数学也存在着不足,他们打开了无理数的大门,却又把它关上了.他们的代数学没有负数,也没有 0.

由于罗马人的入侵,古希腊文明逐渐走向衰败,其光辉灿烂的历史慢慢降下了帷幕.西方进入了漫长的宗教统治的中世纪,古希腊人所追求的理性精神也进入了深睡状态.随着希腊文明的结束,数学发展的中心转移到了东方.

## 2. 中国

中国对于数学的贡献是独立于西方的,中国数学在这段时期取得了许多伟大的成就.《九章算术》是中国古代最重要的数学著作.据现代的考证,这部著作的成书时期至少是公元前 1 世纪,但是其中有些数学内容可以追溯到周代.《周礼》记载西周贵族子弟必学的六门课程(“六艺”)中有一门是“九数”,在刘徽《九章算术注》的“序”中,称《九章算术》是由“九数”发展而来的.《九章算术》包含了丰富的数

学成果. 例如, 算术方面的比例算法、盈不足术, 代数方面的方程术、正负术、开方术, 等等. 公元 263 年刘徽撰《九章算术注》, 其中刘徽的割圆术是极限思想的萌芽. 刘徽和南北朝时期的祖暅计算球体积的方法是积分学的萌芽. 公元 5 世纪的《张邱建算经》中提出了世界著名的百鸡问题:

“鸡翁一, 值钱五, 鸡母一, 值钱三, 鸡雏三, 值钱一. 百钱买百鸡, 问鸡翁母雏各几何?”

张邱建给出了 3 组答案, 他是数学史上给出一题多解的第一人.

当时, 中国对圆周率的探索处于世界领先地位, 下表列出了中国对圆周率计算的历史进展.

|                                       |              |
|---------------------------------------|--------------|
| 3 径一周三                                | 《周髀算经》       |
| 3.154 7                               | 刘歆(西汉末)      |
| $\frac{22}{7}$ (约率)                   | 何承天(370—447) |
| $3.141\,024 < \pi < 3.142\,704$       | 刘徽(3—4 世纪)   |
| $\frac{157}{50} = 3.14$               |              |
| $3.141\,592\,6 < \pi < 3.141\,592\,7$ | 祖冲之(529—500) |
| $\frac{355}{113}$ (密率)                | 祖冲之          |

祖冲之不但给出了密率, 而且给出了  $\pi$  的上、下界. 他的这个记录保持了一千多年的领先地位, 直到 15 世纪才为阿拉伯数学家卡西(Jemshid al-Kashi)所超过. 卡西在 1429 年算到了  $\pi$  的小数点后 16 位.

从南北朝末期到北宋初期, 约 500 年, 我国在数学上又积累了丰富的知识, 到宋元时期达到了新的高潮, 特别是在代数方面取得了一系列世界一流的成果.

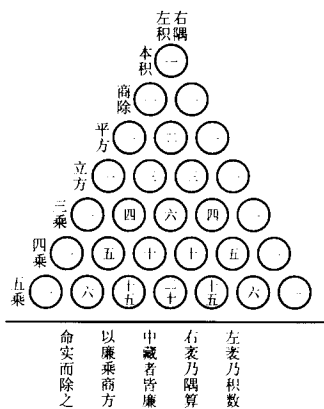
我国南朝的《孙子算经》中有“物不知数”问题, 通常称作“孙子问题”. 原题是:

“今有物不知其数, 三三数之剩二, 五五数之剩三, 七七数之剩二, 问物几何?”

这是一个解一次同余方程组的问题, 孙子给出了解法, 这就是著名的孙子定理. 在此基础上, 秦九韶(约 1202—1261)把这个问题和解法进行了推广, 他发明了用辗转相除法求乘率的一般方法, 并把这种解法叫“大衍求一术”. 此外, 他还把孙子定理推广到模不两两互素的

情形. 现在, 国际上称孙子定理为“中国剩余定理”. 在西方, 直到 18 世纪瑞士的欧拉 (L. Euler, 1707—1783) 和法国的拉格朗日 (J. L. Lagrange, 1736—1813) 才对同余式进行了系统的研究, 较之秦九韶晚了 5 个世纪.

杨辉的著作《详解九章算法》中有一张珍贵的图——“开方作法本源图”, 并指出, 此图“出《释锁算书》(已失传), 贾宪用此术”. 就是说, 这张图是贾宪创造的, 现在叫“贾宪三角”. 这张图给出了指数为正整数的二项式展开的系数表(如下图所示):



西方人把上述三角叫作“帕斯卡三角形”. 宋元数学发展的一个最深刻的动向是向代数符号化的进展, 这就是天元术与四元术的出现. 元朝李冶所著《测圆海镜》(1248) 和《益古演段》(1259) 是最先阐述天元术的著作. 天元术就是设未知数布列方程的一般方法, 用天元术列方程的方法与代数中列方程的方法类似. 首先“立天元一为某某”, “天元一”就表示未知数, 相当于  $x$ , 然后列出方程.

李冶之后, 朱世杰 (1300 前后) 把天元术从一个未知数的情况推广到两个、三个及四个的情况, 而考虑四元高次联立方程组, 这就是四元术. 李冶的天元术和朱世杰的四元术是一种半符号式的文字代数.

朱世杰在《四元玉鉴》中研究了高阶等差级数和内插法. 朱世杰还是一个教育家, 他编写了一部很好的数学启蒙教材《算学启蒙》, 在这部书中他给出了正负数乘除法的法则.

从上面的论述中可以看出, 在古代, 中国数学为世界数学的发展作出了重大贡献.

### 3. 印度和阿拉伯世界

印度人发明了现代记数法. 他们引进了负数和零, 不仅把正数

和负数的对立与财产和债务的对立联系起来,而且把正数和负数的对立与直线上两个方向的对立联系起来.在这个时期,他们已经能够像运用有理数一样运用无理数,从而为代数打开了真正的发展道路.

在代数方面阿拉伯人的第一个贡献是提供了这个学科的名称.西文“algebra”(代数)这个词起源于花拉子模的数学家和天文学家花拉子米(Mohammed ibn Mūsā al-khōwārizmī,约 783—约 850)著的《代数学》一书的书名,它可意译为《移项和消去的科学》.这部书一直保留到现在.在很长一段时间里,代数学(al-jabr 或 algebra)这个术语一直是方程学的同义词.

波斯诗人兼数学家奥马·海亚姆(Omar Khayyam, 1048? — 1131)把代数定义为解方程的科学.这个定义一直保持到 19 世纪末.他还用几何方法解出了各种类型的三次方程,并求出了这些方程的正实根.

#### 4. 欧洲文艺复兴时期

文艺复兴时期,欧洲人开始向阿拉伯人学习.在向阿拉伯人学习的过程中熟识了希腊数学,并且接受了从阿拉伯传来的印度记数法,摒弃了早先来自希腊和罗马的记数法.到 16 世纪,欧洲的数学终于走到了世界的最前列.例如,意大利人给出了三次方程和四次方程的解法.

这个时期出现了虚数.现代的代数符号也逐渐产生出来(见第二章).英国人纳皮尔(J. Napier, 1550—1617)发明了对数,并在 1614 年发表.1624 年布里格斯(H. Briggs, 1561—1631)计算出第一批十进制对数表.

当时欧洲人建立了级数的概念,开始了对“组合论”和“二项式定理”的研究,并且完成了初等数学体系的建立,为以后从常量数学向变量数学过渡奠定了基础.

### 习 题 1—1

1. 列举所了解的不同的记数方法,比较十进制与六十进制的差异.
2. 收集有关中国古代数学的成就.

## §2 从变量数学到现代数学

### 一、变量数学

16 世纪的欧洲,封建制度开始消亡,资本主义开始发展并兴盛起来.在这一时期,家庭手工业、手工业作坊逐渐地改革为工场手工业生产,并进而转化为以使用机器为主的大工业;同时,世界贸易的高涨导致航海业的空前繁荣,而航海业需要更准确的天文知识;武器的改进刺激了弹道问题的研究;等等.所有这些对数学提出了新的、更高的要求.

由于实践的需要和各门科学的发展,使自然科学转向对运动和变化的研究、对各种变化过程的研究、对各种变化着的量之间依赖关系的研究.因此,对运动和变化的研究成为了自然科学研究的中心问题.为了进一步反映“变化着的量”的一般性质和它们之间的依赖关系,数学中产生了变量和函数的概念.数学研究对象发生了根本性的拓展.这些决定了数学向新的阶段,即向变量数学的过渡.

这一阶段的肇始是解析几何与微积分的诞生与发展.

#### 1. 解析几何的诞生

解析几何的创立是变量数学发展的第一个里程碑,1637 年笛卡儿(R. Descartes, 1596—1650)的著作《几何学》是这一里程碑的标志.虽然它是作为笛卡儿哲学名著《方法论》(Discourse on Method)的附录发表的,但是它奠定了解析几何的基础.从此,变量进入了数学,运动进入了数学.恩格斯指出:

“数学中的转折点是笛卡儿的变数.有了变数,运动进入了数学,有了变数,辩证法进入了数学,有了变数,微分和积分也就立刻成为必要的了……”

(恩格斯.自然辩证法.北京:人民出版社,1971.236)

发生这个转折之前,数学中占统治地位的是常量,而在此之后,数学转向研究变量.在《几何学》里,笛卡儿给出了“字母符号的代数”和“解析几何原理”.他引进了坐标系,并利用坐标方法把含有两个未知数的代数方程看成平面上的一条曲线.

在笛卡儿之前,在数学中起主导作用的一直是几何学.笛卡儿把



笛卡儿

数学引向一个新的方向,这就使代数获得了更重大的意义.

## 2. 微积分

17 世纪后半叶,牛顿(Isaac Newton, 1642—1727)和莱布尼茨(G. W. Leibniz, 1646—1716)分别独立地建立了微积分,在变量数学的发展中,这是第二个决定性的步骤.

微积分的起源主要来自两方面的问题:一方面来自力学中的一些新问题,例如,已知路程对时间的关系,求速度;已知速度对时间的关系,求路程.另一方面来自几何学中的一些古老的问题,例如,如何作曲线的切线,如何确定面积和体积等问题.

在古希腊,阿基米德和阿波罗尼奥斯曾研究过这些问题.17 世纪初期开普勒(Johannes Kepler, 1571—1630)、卡瓦列里(Bonaventura Cavalieri, 1598—1647)、费马(Pierre de Fermat, 1601—1665)、巴罗(Isaac Barrow, 1630—1677)以及许多其他数学家也对这些问题做了较为深入的研究.但是,直到牛顿和莱布尼茨,他们才以科学家敏锐的洞察力,发现这两类问题之间的内在联系,即导数与积分的关系,并给出了解决这些问题的一般方法,得到了数学上最伟大的成就.微积分的发现不仅在数学史上具有划时代的意义,而且在科学史上也具有决定性的意义.

除了变量与函数概念以外,这个阶段还形成了极限的概念,极限不仅是微积分的基础,而且是进一步发展的整个分析的基础.

伴随着微积分的发展,还产生了分析的另外一些数学分支:级数理论、微分方程论、微分几何等.所有这些理论都是因为力学、物理学和技术问题的需要而产生并向前发展的.

在这个时期,还产生了另一个重要的数学分支——概率论.它研究“随机现象”的规律,并且给出了研究“偶然性中的必然性”的数学方法.

## 二、现代数学

从 16 世纪到 19 世纪初是数学最活跃的时期,产生了很多新的数学概念、数学思想和数学结果,奠定了现代数学发展的基础.随着这些新的数学概念、数学思想和数学结果的不断丰富和积累,一方面,人们迫切地需要对它们进行系统整理和理论概括;另一方面,人们又不断地发现数学与其他学科的联系,不断地发现数学在科学、技术和人文社会科学等各个领域中的应用.特别是在 20 世纪中期,由于计算机的诞生和飞速发展,使得数学的应用越来越广泛,越来越深入.



牛顿



莱布尼茨

### 1. 基础数学

现代数学发展的最初阶段,是以基础学科代数、几何、分析的深刻变化为特征的,它反映了数学基础的深刻变化.这些变化主要体现在研究对象的拓展、研究方法的创新和新研究领域的形成.

#### (1) 几何

19 世纪上半叶,波约(J. Bolyai, 1802—1860)和罗巴切夫斯基(N. I. Lobatchevsky, 1793—1856)建立了新的几何——非欧几何学.正是从这个时候起,几何学才发生了本质上的变化,开创了新的发展时期,改变了传统上对“几何学是什么”的认识和理解,使得几何学的研究对象与使用范围迅速扩大.继罗巴切夫斯基之后,1854 年德国著名数学家黎曼(G. F. Riemann, 1826—1866)完成了在几何学发展中最重要的工作,他提出了“几何空间种类有无限多”的一般思想,并指出这些空间可能的现实意义.

对欧几里得几何本身的研究也发生了很大的变化.研究的对象已经不再局限于平面和空间的图形,而是研究更为复杂的图形性质.出现了一些崭新的方法.在欧几里得几何研究的基础上,开拓了许多新的研究领域,例如,罗巴切夫斯基空间、射影空间,各种不同维数的欧氏空间、黎曼空间、拓扑空间等.需要强调的是,在科学技术的发展中,这些空间都找到了它们的具体实际背景和应用.

#### (2) 代数

19 世纪以前,代数是关于数字算术运算的学说.在代数中,凡是量都以字母来表示,按照一定的法则对这些字母进行运算.到了 19 世纪,代数出现了质的变化.现代代数在保持传统研究对象的同时,又把它大大地推广了.现代代数中的“量”远远超出了数的范围,例如,图形的“变换”、数字的“置换”等,这些都是现代代数中的“量”.现代代数研究对这些“量”进行运算,在某种程度上这些运算与加、减、乘、除等普通算术运算是类似的.

19 世纪前半叶,一批著名的数学家为现代代数理论的形成作出了重大贡献,法国青年数学家伽罗瓦(Evariste Galois, 1811—1832)是最杰出的代表.现代代数的概念、方法和结果在分析、几何、物理以及结晶学中都有重大的应用.群论与线性代数是现代代数中最重要的两个分支,内容丰富、应用广泛.

#### (3) 分析

以微积分为主要内容的分析也发生了深刻的变化.首先,形成了分析的严格的、精确的基础;对分析的基本概念给出了严格的定义,

例如,实数、函数、极限、微分、积分等.这些基础的建立对数学的发展产生了深刻的影响.

在分析中发展出一系列新的分支.例如,微分方程理论、积分方程理论、函数逼近论、泛函分析等.这些分支在数学的发展中起着重要的作用.

这些工作是由一批杰出的数学家完成的,其中有捷克数学家波尔查诺(B. Bolzano, 1781—1848)、法国数学家柯西(A-l. Cauchy, 1789—1851)、德国数学家魏尔斯特拉斯(Karl Weierstrass, 1815—1897)、戴德金(J. W. R. Dedekind, 1831—1916)等.

在这一发展时期,我们还必须提到德国著名数学家康托(G. Cantor, 1845—1918).他在19世纪末创立了集合论.集合论的产生改变了人们许多传统的观念,促进了许多其他数学新分支的产生和发展,对数学发展的一般进程产生了深刻的影响.例如,数理逻辑的产生,一方面,数理逻辑溯源于数学的起源和基础;另一方面,它又和计算技术的最新课题紧密相连,数理逻辑得到了许多深刻的成果.例如,哥德尔的不完全定理等.从哲学的认识论观点看来,这些成果也是非常重要的.

进入20世纪后,数学的各个分支都取得了实质性的进展.我们知道,数学问题和解决数学问题的思想方法是引领数学发展的基本动力.例如,20世纪初,著名数学家希尔伯特(David Hilbert, 1862—1943)提出了23个重要的数学问题,在很大程度上影响了20世纪数学的发展.随着这些问题的解决,推动了许多数学分支的深入发展,促进了一些新的数学分支的形成,揭示了不同数学分支之间的内在联系.20世纪出现了一大批令人鼓舞的伟大成就.例如,历时300年之久的“费马大定理”在20世纪末被英国数学家威尔斯解决,这是一项举世瞩目的成果.所有这些都表明,无论在深度上还是在广度上,数学都获得了空前的发展.

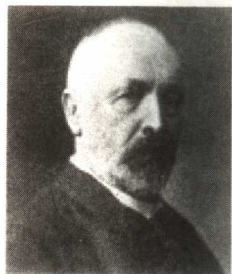
## 2. 计算机与数学

计算机的产生和发展与数学家的贡献密不可分.人们把著名的数学家图灵(A. Turing, 1912—1954)和冯·诺依曼(Von Neumann, 1903—1957)称为“计算机之父”.计算机诞生之后,数学与计算机的密切结合、相辅相成成为现代数学发展的一个重要特征.计算机是数学与工程技术完美结合的产物,也是抽象数学应用的典范.

计算机的设计、使用和改造不仅提出了大量的数学问题,为数学中许多分支的理论发展注入了新的活力,而且正日益成为数学研究



柯西



康托



图灵



冯·诺依曼