

普通高等教育基础课规划教材

# 线性代数

李志斌 主编



机械工业出版社  
CHINA MACHINE PRESS



中国海洋大学出版社

# 线性代数

第二版

中国海洋大学出版社



普通高等教育基础课规划教材

# 线性代数

主编 李志斌  
参编 刘勇 郑成德 高静华  
主审 刘晓东



机械工业出版社

本书是针对近几年普通高校大量扩招后一般学生的实际水平而编写的教材。教材选材精炼,以够用、必需为度,以少而精为原则,精选符合国家课程教学大纲最基本要求的内容;结构清晰,以矩阵为起点,用矩阵的理论求解线性方程组,以线性方程组求解为主线,贯穿全书,形成矩阵、行列式、方程组、向量空间、二次型、线性空间和线性变换的知识结构;叙述简明,注重深入浅出,直观明了,言简意赅;淡化严格推理,削弱运算技巧,突出重点,循序渐进,不时总结归纳,对初学者,尤其是对一般院校的学生是有益的。

全书内容包括矩阵与行列式、线性方程组、向量空间、相似矩阵及二次型、线性空间与线性变换等五章,各章均配有一定量的习题,书末附有习题答案。

本书可作为高等院校数学基础课程教材,也可供自学者和科技工作者参考。

### 图书在版编目(CIP)数据

线性代数/李志斌主编. —北京:机械工业出版社,2006. 8  
普通高等教育基础课规划教材  
ISBN 7-111-19564-7

I. 线... II. 李... III. 线性代数 - 高等学校 - 教材  
IV. 0151. 2

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2006)第 077036 号

机械工业出版社(北京市百万庄大街 22 号 邮政编码 100037)

责任编辑:张祖凤 版式设计:张世琴

责任校对:李秋荣 责任印制:杨 曦

北京机工印刷厂印刷

2006 年 8 月第 1 版第 1 次印刷

169mm × 239mm · 5.125 印张 · 187 千字

定价:13.50 元

凡购本书,如有缺页、倒页、脱页,由本社发行部调换

本社购书热线电话(010)68326294

编辑热线电话(010)88379711

封面无防伪标均为盗版

# 前 言

线性代数是一门对本科多数专业学生开设的课程。针对近几年普通高校大量扩招后一般学生的实际水平,我们组织编写了这本教材。本教材突出以下特点:

(1)选材精炼。以够用、必需为度,以少而精为原则,在保证科学性的基础上,精选符合国家课程教学大纲的最基本要求的内容。教学时数约 32 学时。

(2)结构清晰。以矩阵为起点,用矩阵的理论求解线性方程组;以线性方程组求解为主线,贯穿全书。形成矩阵、行列式、方程组、向量空间、二次型、线性空间的知识结构。

(3)叙述简明。注重深入浅出,直观明了,言简意赅。淡化严格推理,削弱运算技巧,突出重点,循序渐进。注重学生基本运算能力和分析问题、解决问题能力的培养,注重理论联系实际,内容通俗易懂。

(4)总结归纳。每章开头有本章内容简介,介绍本章要讲什么;每章结尾有本章小结,总结本章内容是怎么讲的,有何应用,内容之间是如何安排的。对重点内容,作者将多年教学的体会融于教材中,并进行归纳、总结。这对初学者,尤其是对一般院校的本科学生来说,使他们加强对各章知识的学习、归纳、类比、巩固、提高是有益的。

本书是在大连交通大学教材立项资助下组织编写的,作者对大连交通大学教务处的关怀、鼓励及支持深表谢意!

本书由李志斌教授任主编,负责修改、统稿、定稿。具体编写分工如下:刘勇副教授编写第 1 章,郑成德教授编写第 2 章,李志斌教授编写第 3、4 章,高静华副教授编写第 5 章。大连理工大学刘晓东教授在百忙中对本书进行了认真审阅,并提出许多宝贵意见,在此深表感谢。

由于编者水平有限,书中错、漏或欠妥之处在所难免,敬请专家、读者批评指正。

编 者

2006 年 1 月 18 日

# 目 录

## 前言

<b>第 1 章 矩阵与行列式</b> .....	1
1.1 矩阵的概念及运算 .....	1
1.1.1 矩阵的概念 .....	1
1.1.2 矩阵的运算 .....	2
1.1.3 矩阵的转置 .....	6
1.1.4 分块矩阵 .....	8
1.2 行列式 .....	11
1.2.1 二阶、三阶行列式 .....	11
1.2.2 $n$ 阶行列式的定义 .....	12
1.2.3 $n$ 阶行列式的性质 .....	15
1.2.4 $n$ 阶行列式的计算 .....	19
1.3 逆矩阵与矩阵的秩 .....	22
1.3.1 逆矩阵的概念和性质 .....	22
1.3.2 克莱姆法则 .....	27
1.3.3 矩阵的秩 .....	30
1.4 矩阵的初等变换与应用 .....	31
1.4.1 矩阵的初等变换与初等矩阵 .....	31
1.4.2 利用初等变换化简矩阵 .....	34
1.4.3 初等变换的应用 .....	36
小结 .....	39
习题 1 .....	40
<b>第 2 章 线性方程组</b> .....	44
2.1 线性方程组的消元解法及相容性 .....	44
2.1.1 高斯消元法 .....	44
2.1.2 线性方程组的相容性定理 .....	49
2.2 向量组的线性相关性 .....	55
2.2.1 $n$ 维向量 .....	55
2.2.2 向量组的线性相关性 .....	57
2.2.3 线性相关性的判别定理 .....	62
2.2.4 向量组的最大无关组与向量组的秩 .....	67
2.3 线性方程组解的结构 .....	72

2.3.1	齐次线性方程组解的结构	73
2.3.2	非齐次线性方程组解的结构	79
2.3.3	线性方程组的解法举例	82
小结		86
习题 2		86
<b>第 3 章</b>	<b>向量空间</b>	<b>92</b>
*3.1	向量空间的定义与子空间	92
3.1.1	向量空间的定义	92
3.1.2	向量空间的基与维数	94
3.1.3	坐标与坐标变换	95
3.2	向量的内积及正交阵	97
3.2.1	内积、距离与夹角	97
3.2.2	向量与正交化	99
3.2.3	正交矩阵	102
小结		104
习题 3		104
<b>第 4 章</b>	<b>相似矩阵及二次型</b>	<b>107</b>
4.1	矩阵的相似	107
4.1.1	矩阵相似的概念	107
4.1.2	矩阵相似的性质	109
4.2	矩阵的特征值与特征向量	110
4.2.1	矩阵的特征值与特征向量的概念	110
4.2.2	特征值与特征向量的性质	113
4.3	矩阵的对角化	114
4.3.1	一般 $n$ 阶矩阵的相似对角化	114
4.3.2	实对称矩阵的相似对角化	119
4.4	实二次型	121
4.4.1	实二次型的定义及矩阵表示	122
4.4.2	矩阵的合同	123
4.4.3	用正交变换与配方法化二次型为标准形	124
4.4.4	正定二次型	127
小结		128
习题 4		129
*第 5 章	线性空间与线性变换	131
5.1	线性空间的定义与性质	131
5.2	维数、基与坐标	135
5.3	基变换与坐标变换	137

5.4 线性变换及其矩阵表示 .....	140
小结 .....	146
习题 5 .....	146
习题答案 .....	149
参考文献 .....	158



# 第 1 章 矩阵与行列式

矩阵是数学中一个重要的概念,广泛应用于现代管理、自然科学、工程技术等领域中,是代数特别是线性代数的一个主要研究对象之一.

本章主要介绍矩阵的概念及运算、行列式、矩阵的秩与逆矩阵、初等变换及应用等.

## 1.1 矩阵的概念及运算

### 1.1.1 矩阵的概念

矩阵在科学计算和日常生活中经常用到,如某厂向两个商店发送三种产品的数量,我们可以用一个矩形数表表示如下:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{pmatrix}$$

其中  $a_{ij}$  ( $i=1, 2; j=1, 2, 3$ ) 为工厂向第  $i$  个商店发送第  $j$  种产品的数量. 下面我们给出矩阵的一般概念.

**定义 1.1** 由  $m \times n$  个数  $a_{ij}$  ( $i=1, 2, \dots, m; j=1, 2, \dots, n$ ) 排成  $m$  行 (横排)  $n$  列 (竖排) 的数表

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} \quad (1.1)$$

叫做  $m$  行  $n$  列矩阵, 简称  $m \times n$  矩阵, 其中  $a_{ij}$  表示第  $i$  行第  $j$  列元素.

通常用大写字母  $A$ 、 $B$ 、 $C$  等来表示矩阵, 如上述定义中的矩阵可记

为  $A = (a_{ij})_{m \times n}$  或  $A = (a_{ij})$  或  $A_{m \times n}$ .

当  $m = n$  时,  $A_{n \times n}$  称为  $n$  阶方阵或  $n$  阶矩阵.

只有一行的矩阵  $A = (a_{11} \ a_{12} \ \cdots \ a_{1n})$  叫做行矩阵或行向量.

只有一列的矩阵  $B = \begin{pmatrix} b_{11} \\ b_{21} \\ \vdots \\ b_{m1} \end{pmatrix}$  叫做列矩阵或列向量.

元素都是零的矩阵称为零矩阵, 记作  $O$ .

若方阵  $A = (a_{ij})_{n \times n}$  的元素  $a_{ij} = 0$  ( $i \neq j$ ), 则称  $A$  为对角矩阵, 即  $A =$

$$\begin{pmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a_{22} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} \text{ 这里 } a_{11}, a_{22}, \cdots, a_{nn} \text{ 称为主对角线元素.}$$

特别地, 在对角方阵中, 当  $a_{11} = a_{22} = \cdots = a_{nn} = 1$  时, 这个方阵称为单位矩阵, 简称单位阵, 记作  $E_n$  或  $I_n$ , 即

$$E_n = I_n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix}$$

形如  $\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$ ,  $\begin{pmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$  的方阵分别称为上三角

矩阵和下三角矩阵.

当两个矩阵的行数相等、列数也相等时, 称为同型矩阵. 如果  $A = (a_{ij})$  与  $B = (b_{ij})$  是同型矩阵, 并且它们对应元素相等, 即  $a_{ij} = b_{ij}$  ( $i = 1, 2, \cdots, m; j = 1, 2, \cdots, n$ ), 那么就称矩阵  $A$  与矩阵  $B$  相等, 记作  $A = B$ .

注意, 不同型的零矩阵是不同的.

### 1.1.2 矩阵的运算

#### 1. 矩阵的加法

定义 1.2 设有两个  $m \times n$  矩阵,  $A = (a_{ij})$ ,  $B = (b_{ij})$ , 那么矩阵  $A$  与  $B$  的和记作  $A + B$ , 规定为



$$A + B = (a_{ij} + b_{ij}) = \begin{pmatrix} a_{11} + b_{11} & a_{12} + b_{12} & \cdots & a_{1n} + b_{1n} \\ a_{21} + b_{21} & a_{22} + b_{22} & \cdots & a_{2n} + b_{2n} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ a_{m1} + b_{m1} & a_{m2} + b_{m2} & \cdots & a_{mn} + b_{mn} \end{pmatrix} \quad (1.2)$$

应当注意，只有同型矩阵才能相加。

如：\$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix}\$, \$B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}\$, \$A + B\$ 无意义。

矩阵加法满足下列运算规律（设 \$A, B, C, O\$ 都是 \$m \times n\$ 矩阵）：

- (1) \$A + B = B + A\$;
- (2) \$(A + B) + C = A + (B + C)\$;
- (3) \$A + O = O + A = A\$.

设矩阵 \$A = (a\_{ij})\$，则称 \$-A = (-a\_{ij})\$ 为 \$A\$ 的负矩阵，由此定义矩阵的减法为 \$A - B = A + (-B)\$。

## 2. 矩阵的数量乘法

定义 1.3 数 \$k\$ 与矩阵 \$A\$ 的乘积，称为数 \$k\$ 与矩阵 \$A\$ 的数量乘积，简称数乘，记作 \$kA\$，规定为

$$kA = \begin{pmatrix} ka_{11} & ka_{12} & \cdots & ka_{1n} \\ ka_{21} & ka_{22} & \cdots & ka_{2n} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ ka_{m1} & ka_{m2} & \cdots & ka_{mn} \end{pmatrix} \quad (1.3)$$

如：\$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \\ 5 & 6 \end{pmatrix}\$，则 \$3A = \begin{pmatrix} 3 & 6 \\ 9 & 12 \\ 15 & 18 \end{pmatrix}\$。

数乘矩阵满足下列运算规律（设 \$A, B\$ 为 \$m \times n\$ 矩阵，\$\lambda, \mu\$ 为数）：

- (1) \$(\lambda\mu)A = \lambda(\mu A)\$;
- (2) \$(\lambda + \mu)A = \lambda A + \mu A\$;
- (3) \$\lambda(A + B) = \lambda A + \lambda B\$.

## 3. 矩阵的乘法

定义 1.4 设 \$A = (a\_{ij})\_{m \times s}\$, \$B = (b\_{ij})\_{s \times n}\$，规定矩阵 \$A\$ 与矩阵 \$B\$ 的乘积是一个 \$m \times n\$ 矩阵 \$C = (c\_{ij})\_{m \times n}\$，其中

$$c_{ij} = a_{i1}b_{1j} + a_{i2}b_{2j} + \cdots + a_{is}b_{sj} = \sum_{k=1}^s a_{ik}b_{kj} \\ (i = 1, 2, \cdots, m; j = 1, 2, \cdots, n),$$

记为 \$C = AB\$。

按此定义, 矩阵  $A$  与  $B$  的乘积  $C$  的第  $i$  行第  $j$  列元素等于第一个矩阵  $A$  的第  $i$  行与第二个矩阵  $B$  的第  $j$  列对应元素乘积之和.

特别地, 一个  $1 \times s$  行矩阵与一个  $s \times 1$  列矩阵的乘积是一个 1 阶方阵, 也就是一个数.

如:  $(1 \ 2 \ 3) \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} = 1 \times 1 + 2 \times 2 + 3 \times 3 = 14.$

注意, 在乘法的定义中, 只有当第一个矩阵的列数等于第二个矩阵的行数时, 两个矩阵才能相乘.

**例题 1-1** 已知  $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 3 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ ,  $B = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 5 \end{pmatrix}$ , 求  $AB$ ,  $BA$ .

解  $AB = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 3 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \times 2 + 0 \times 1 & 2 \times 3 + 0 \times 5 \\ 3 \times 2 + 1 \times 1 & 3 \times 3 + 1 \times 5 \\ 1 \times 2 + 1 \times 1 & 1 \times 3 + 1 \times 5 \end{pmatrix}$   
 $= \begin{pmatrix} 4 & 6 \\ 7 & 14 \\ 3 & 8 \end{pmatrix}$

因为矩阵  $B$  的列数为 2, 矩阵  $A$  的行数为 3, 两者不等, 所以  $BA$  没有意义.

**例题 1-2** 设  $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ ,  $B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ , 求  $AB$  及  $BA$ .

解 显然  $AB = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ ,  $BA = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ .

由例题 1-1、例题 1-2 可知, 矩阵的乘法不满足交换律, 即在一般情况下,  $AB \neq BA$ , 但矩阵乘法仍满足下列运算规律:

(1)  $(AB)C = A(BC)$ ;

(2)  $A(B+C) = AB+AC$ ,

$(A+B)C = AC+BC$ ;

(3)  $\lambda(AB) = (\lambda A)B = A(\lambda B)$ , 其中  $\lambda$  为数.

矩阵乘法还有一个不同于数乘法的特点, 即两个不等于零的矩阵相乘有可能等于零矩阵. 事实上, 例题 1-2 已经告诉我们这一点了. 由于这个缘故, 对矩阵的乘法来说, 消去律一般是不成立的, 即由  $AB=AC$ , 不能推出  $B=C$  这一结论.

## 例题 1-3

设  $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ ,  $B = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ ,  $C = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ , 则  $AB = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ ,  $AC = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ , 虽然  $AB = AC$ , 但  $B \neq C$ .

尽管矩阵的乘法一般不满足交换律, 但对于单位矩阵  $E$ , 容易验证

$$EA = AE = A.$$

有了矩阵的乘法, 可以定义  $n$  阶方阵的幂.

**定义 1.5** 设  $A$  是  $n$  阶方阵, 规定  $A$  的  $k$  次幂为  $k$  个  $A$  的乘积, 记作  $A^k$ , 即

$$A^k = \underbrace{AA \cdots A}_{k \uparrow}, \quad A^{k+1} = A^k A^1.$$

由定义可知, 方阵的幂满足下列运算规律:

$$A^m A^n = A^{m+n}, \quad (A^m)^n = A^{mn}, \quad \text{其中 } m, n \text{ 为正整数.}$$

但是, 由于矩阵乘法一般不满足交换律, 所以对于两个  $n$  阶方阵  $A, B$ , 一般来说  $(AB)^k \neq A^k B^k$ .

**定义 1.6** 设  $f(x) = a_n x^n + \cdots + a_1 x + a_0$  是  $x$  的  $n$  次多项式,  $A$  是  $n$  阶方阵, 则

$$f(A) = a_n A^n + a_{n-1} A^{n-1} + \cdots + a_1 A + a_0 E$$

称为矩阵  $A$  的  $n$  次多项式.

## 例题 1.4

已知  $A = BC$ , 其中

$$B = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad C = (3 \quad -1 \quad 1).$$

求  $A^{10}$ .

$$\text{解 } A = BC = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} (3 \quad -1 \quad 1) = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 1 \\ 6 & -2 & 2 \\ 3 & -1 & 1 \end{pmatrix},$$

所以  $A^2 = (BC)(BC) = B(CB)C$ .

$$\text{而 } CB = (3 \quad -1 \quad 1) \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} = 2,$$

$$\text{因此 } A^2 = 2BC = 2 \begin{pmatrix} 3 & -1 & 1 \\ 6 & -2 & 2 \\ 3 & -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

$$\text{同理 } A^{10} = \underbrace{(BC)(BC) \cdots (BC)}_{10 \uparrow} = B \underbrace{(CB)(CB) \cdots (CB)}_{9 \uparrow} C$$

$$= B \cdot 2^0 \cdot C = 2^0 BC = 2^0 \begin{pmatrix} 3 & -1 & 1 \\ 6 & -2 & 2 \\ 3 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

### 1.1.3 矩阵的转置

定义 1.7 已知  $m \times n$  矩阵  $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$ , 将行列依次互

换, 所得到的  $n \times m$  矩阵称为矩阵  $A$  的转置矩阵, 记为  $A^T$  或  $A'$ , 即

$$A^T = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & \cdots & a_{m1} \\ a_{12} & a_{22} & \cdots & a_{m2} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} \quad (1.4)$$

例如:  $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 5 & 6 & 8 \end{pmatrix}_{2 \times 3}$ ,  $A^T = \begin{pmatrix} 1 & 5 \\ 2 & 6 \\ 4 & 8 \end{pmatrix}_{3 \times 2}$ .

矩阵的转置适合以下规律:

- (1)  $(A^T)^T = A$ ;
- (2)  $(A + B)^T = A^T + B^T$ ;
- (3)  $(kA)^T = kA^T$  ( $k$  是常数);
- (4)  $(AB)^T = B^T A^T$ .

这里仅对规律 (4) 加以证明, 其余的证明留给读者自己完成.

证明 设  $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$ ,  $B = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ b_{i1} & b_{i2} & \cdots & b_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ b_{n1} & b_{n2} & \cdots & b_{nn} \end{pmatrix}$ ,

$AB$  的第  $i$  行第  $j$  列元素为  $\sum_{k=1}^n a_{ik} b_{kj}$ , 所以  $(AB)^T$  的第  $i$  行第  $j$  列元素为

$$\sum_{k=1}^n a_{jk} b_{ki}$$

又  $B^T$  的第  $i$  行第  $k$  列元素是  $b_{ki}$ ,  $A^T$  的第  $k$  行第  $j$  列元素是  $a_{jk}$ , 因此  $B^T A^T$  的第  $i$  行第  $j$  列元素为

$$\sum_{k=1}^n b_{ki} a_{jk} = \sum_{k=1}^n a_{jk} b_{ki}$$

比较上述两式，即得规律(4)成立。

**例题 1.5** 已知  $A = (1 \ 2 \ -1)$ ,  $B = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 0 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$ , 求  $(AB)^T$ .

解 因为  $AB = (1 \ 2 \ -1) \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 0 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} = (1 \ 0)$ ,

所以  $(AB)^T = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ .

或者  $(AB)^T = B^T A^T = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ -1 & 2 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ .

注: 对于规律(4)可以推广为  $(A_1 A_2 \cdots A_k)^T = A_k^T A_{k-1}^T \cdots A_2^T A_1^T$ .

**定义 1.8** 设  $A$  为  $n$  阶方阵, 若  $A^T = A$ , 则称矩阵  $A$  为对称矩阵; 若  $A^T = -A$ , 则称矩阵  $A$  为反对称矩阵.

例如:  $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 5 \\ 2 & 3 & -6 \\ 5 & -6 & 7 \end{pmatrix}$ ,  $\begin{pmatrix} 0 & -5 \\ 5 & 0 \end{pmatrix}$  分别为对称矩阵和反对称矩阵. 显

然, 若  $A = (a_{ij})_{n \times n}$  是对称矩阵, 则对任意  $i, j$  有  $a_{ij} = a_{ji}$  ( $i, j = 1, 2, \dots, n$ ).

容易看到, 同阶对称矩阵之和仍为对称矩阵, 数乘对称矩阵仍为对称矩阵. 但是, 对称矩阵乘积未必是对称矩阵.

如:  $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$  和  $B = \begin{pmatrix} -1 & 6 \\ 6 & 2 \end{pmatrix}$  均为对称矩阵, 但

$$AB = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 6 \\ 6 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 11 & 10 \\ 4 & 14 \end{pmatrix}$$

为非对称矩阵.

那么, 对称矩阵的积何时为对称矩阵呢? 我们有:

**定理 1.1** 设  $A$  与  $B$  为两个  $n$  阶对称矩阵, 则  $AB$  是对称矩阵的充要条件是  $AB = BA$ .

**证明** 若  $AB = BA$ , 则有

$$(AB)^T = B^T A^T = BA = AB.$$

即  $AB$  为对称矩阵.

反之, 若  $AB$  为对称矩阵, 即  $(AB)^T = AB$ , 则

$$AB = (AB)^T = B^T A^T = BA. \text{ 证毕.}$$

### 1.1.4 分块矩阵

为了计算简捷或理论研究的需要,有时我们可以把一个行数、列数都较多的矩阵分成若干个小矩阵,这种做法称为把矩阵分块。它是矩阵运算中的一种简化技巧,是处理阶数较高的矩阵的重要方法。

**定义 1.9** 用若干条纵线和横线把矩阵  $A$  分成许多个小矩阵,每一个小矩阵称为  $A$  的一个子块,以子块为元素的形式上的矩阵称为分块矩阵。

例如:  $A = \begin{pmatrix} 2 & 5 & -1 & 6 \\ 4 & 7 & 3 & -2 \\ 1 & 1 & 3 & 5 \end{pmatrix}$  就是一个分块矩阵。

若记  $A_{11} = \begin{pmatrix} 2 & 5 & -1 \\ 4 & 7 & 3 \end{pmatrix}, A_{12} = \begin{pmatrix} 6 \\ -2 \end{pmatrix}, A_{21} = (1 \ 1 \ 3), A_{22} = (5).$

则  $A$  可表示为  $A = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{pmatrix}.$

一个矩阵可以有各种各样的分块方法,究竟怎么分比较好,要看具体需要而定。

例如,设矩阵  $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$ , 如果把矩阵  $A$  的每一列看成一

个子块,那么矩阵  $A$  可以表示为

$$A = (a_1 \ a_2 \ \cdots \ a_n)$$

其中  $a_j = \begin{pmatrix} a_{1j} \\ a_{2j} \\ \vdots \\ a_{mj} \end{pmatrix} (j=1, 2, \dots, n).$

分块矩阵的运算规则与普通矩阵的运算规则相类似,具体说明如下:

#### 1. 加法

设  $A, B$  都是  $m \times n$  型矩阵,且分块方法相同,即

$$A = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} & \cdots & A_{1r} \\ A_{21} & A_{22} & \cdots & A_{2r} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ A_{s1} & A_{s2} & \cdots & A_{sr} \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} B_{11} & B_{12} & \cdots & B_{1r} \\ B_{21} & B_{22} & \cdots & B_{2r} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ B_{s1} & B_{s2} & \cdots & B_{sr} \end{pmatrix} \quad (1.5)$$



其中  $A_{ij}$  和  $B_{ij}$  ( $i=1,2,\dots,s; j=1,2,\dots,r$ ) 是同型的子块, 则

$$A + B = \begin{pmatrix} A_{11} + B_{11} & A_{12} + B_{12} & \cdots & A_{1r} + B_{1r} \\ A_{21} + B_{21} & A_{22} + B_{22} & \cdots & A_{2r} + B_{2r} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ A_{s1} + B_{s1} & A_{s2} + B_{s2} & \cdots & A_{sr} + B_{sr} \end{pmatrix}, \quad (1.6)$$

即对应子块相加.

## 2. 数与矩阵相乘

设  $m \times n$  型矩阵写成分块矩阵形式

$$A = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} & \cdots & A_{1r} \\ A_{21} & A_{22} & \cdots & A_{2r} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ A_{s1} & A_{s2} & \cdots & A_{sr} \end{pmatrix},$$

则

$$\lambda A = \begin{pmatrix} \lambda A_{11} & \lambda A_{12} & \cdots & \lambda A_{1r} \\ \lambda A_{21} & \lambda A_{22} & \cdots & \lambda A_{2r} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \lambda A_{s1} & \lambda A_{s2} & \cdots & \lambda A_{sr} \end{pmatrix}. \quad (1.7)$$

即用  $\lambda$  乘每个子块.

## 3. 两矩阵相乘

设矩阵  $A$  的列数等于矩阵  $B$  的行数, 且  $A$  的列的分块与  $B$  的行的分块法相同, 即

$$A = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} & \cdots & A_{1r} \\ A_{21} & A_{22} & \cdots & A_{2r} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ A_{s1} & A_{s2} & \cdots & A_{sr} \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} B_{11} & B_{12} & \cdots & B_{1t} \\ B_{21} & B_{22} & \cdots & B_{2t} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ B_{r1} & B_{r2} & \cdots & B_{rt} \end{pmatrix},$$

其中子块  $A_{ik}$  的列数等于子块  $B_{kj}$  的行数, 则

$$AB = \begin{pmatrix} C_{11} & C_{12} & \cdots & C_{1t} \\ C_{21} & C_{22} & \cdots & C_{2t} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ C_{s1} & C_{s2} & \cdots & C_{st} \end{pmatrix}$$

其中  $C_{ij} = A_{i1}B_{1j} + A_{i2}B_{2j} + \cdots + A_{ir}B_{rj}$  ( $i=1,2,\dots,s; j=1,2,\dots,t$ ), (1.8)

即以子块为元素按矩阵相乘的法则进行.