解析几何

林怡谋　编著

成都科技大学出版社

解析几何

林怡谋　编著

成都科技大学出版社

（川）新登字015号

责任编辑 赖晓霞 宋勤
封面设计 胡惠玲
版式设计 卢丽霞
责任校对 胡惠玲

内容提要

本书据高等师范院校《解析几何》课程的教学大纲编写。内容包括向量代数，空中平面和直线，空间中的曲面，二次曲面方程化简以及二次曲面的仿射性质，共七章。另有某些相关内容编入附录中。本书可作高等师范院校本、专科的教本，也可作为中学师资培训班的教材。

解析几何

林怡谋 编著

出版发行：成都科技大学出版社
（成都市磨子桥 邮编610065）
印 刷：闽南日报印刷厂
版 次：1997年12月第1版 1997年12月第1次印刷
开 本：787×1092 1/32 印张：13.4375
字 数：300千字 印数：1-500册
书 号：ISBN 7—5616—3567—2/O·281
定 价：24.00元

前　言

本书在内容的编排上基于如下的三点考虑：1. 有关空间中直线与平面的内容之展开应和中学里的几何课程，尤其是“立体几体”密切联系起来。2. 作为几何课程应当加强有关“运动”这一内容的叙述。3. 在关于一般二次方程的化简程序中，对传统的方法作某些改进。

另外，本书编入了三个附录，着眼于‘平面’二字，它们恰是一脉相承的：欧氏几何，仿射几何和射影几何。但在内容的处理上，三者却是各自独立的。值得指出，附录3中§1－4的叙述是详尽的，至于写得比较简略的§5－7，借助于正文第七章所学的知识，也是可以接受的。这样，接着去阅读§8，便可以领会到三种古典几何是如何在射影观点下统一的了。

在此，关于本书的使用说几句话：

首先，稍事浏览前四章即可知道，其中的不少内容可采用课堂讨论的方式进行教学，有的甚至可以让学生自学（如第四章，只重点讲授其中的“相对运动原理”就行了），没有必要按篇幅安排学时。

其次，在第六章中借半向量的引进而找到了统一的‘定位方程组’，这是本书的首创。缘此，原来显得比较麻烦的无心场合却变得比有心场合更为简单，这全得益于有关半向量作所的论证。而关于后者，只须紧紧抓住方程中系数的变化律和在第一章中叙述过的 $n-1$ 分解就不难领会。顺便指出，正如通常教本中所做的那样，§1，并应用第五章末所提供的准备直接跳到§3和§4，去引入二次曲面的切平面和直径平面方程，

尤其是二方向关于已知二次曲面的共轭概念。这是必不可少的。事实上，在学习“高等几何”时所出现的困难往往是由于学生缺乏仿射几何知识造成的。

限于笔者的学识水平，书中不妥，甚至错误之处恐在所难免，诚恳欢迎批评指正。

目　　录

附录 2 平面仿射几何初步 ……(308)

(从综合法到解析法)

附录 3 平面射影几何大意……(352)

第一章　向量的线性运算

§1 定义和性质

正如一条直线标定了方向就叫做轴一样，一个线段标定了方向就叫做有向线段或者几何向量，也常简称为向量或矢量。介于两点，A 和 B，之间的线段 AB(或BA)，随着所标定的方向不同而成为不同的向量，分别记为$\overrightarrow{AB}$和$\overrightarrow{BA}$。前者表示从点A射出而指向点B的线段，后者则是从点B射出而指向点A的线段。这样的两条有向线段，虽然长度相等，但方向不同(恰好相反)，起点(出发点)也不同，因而被看成不同的向量。如果用有向线段表示力的大小、方向和作用点，那就相当形象了。实际上，向量是相当广泛的一类物理量的数学抽象，空间中的有向线段是最简单的一种。

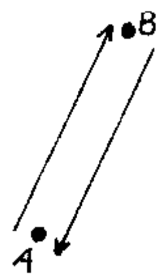


图1.1

我们分别称点A和B为向量$\overrightarrow{AB}$的起点和终点，而用$|\overrightarrow{AB}|$或AB记$\overrightarrow{AB}$的长度。为方便起见，今后也常用单个小写拉丁字母上加箭号表示向量，如$\vec{a}$、$\vec{b}$、$\vec{c}$等，相应地，分别用$|\vec{a}|$、$|\vec{b}|$、$|\vec{c}|$记其长度。

定义：空间中的两个向量，$\overrightarrow{AB}$和$\overrightarrow{CD}$，叫做相等的，如果它们

可以通过平行移动使得它们的起、终点对应地迭合。

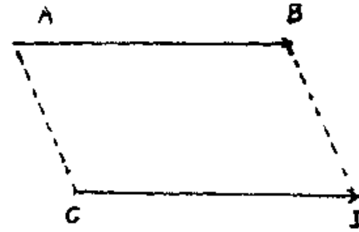


图1.2

本来,空间中所有有向线段的集合是非常“大”的。在规定了“相等”的概念后，这个集合便“缩小”了许多。按照这个向量相等的定义，我们可以将始于空间中各不同点处的有向线段统统平移到某一固定点处来考察。于是，我们事实上仅限于考察和起点无关的向量，称为自由向量。在自然科学的许多领域中所碰到的向量有些是和起点有关的，称为定位向量。对那种向量，需要各别的具体处理，我们不予涉及了。

在定义向量的线性运算之前,我们约定:起终点同一的“有向线段”叫做零向量，记为$\vec{0}$。于是按照定义,可以写$\overrightarrow{AA}=\overrightarrow{BB}=\vec{0}$。必须指出“零向量”作为一个有向线段,本来是无意义的(长度是零,方向不定),但为了运算的封闭性,人为地添加了这个元素。

向量的加法：空间中两个向量,$\overrightarrow{AB}$与$\overrightarrow{CD}$,的和(向量)是这样的一个向量，它乃是当将这两个向量的起点都平移到某点O时，按平行四边形法则所决定的有向线段$\overrightarrow{OP}$，记为

$$\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{CD}=\overrightarrow{OP}$$

根据这个定义,显然向量的加法是可交换的。并且,由于我们仅考虑自由向量,在这个定义中,和向量$\overrightarrow{OP}$和点O的位置无关。

就是说，若将二点都平移到另一点O′，则按平行四边形法则所决定的和向量相同，

$$\overrightarrow{O'P'}=\overrightarrow{OP}。$$

此外，从图1.3可见

$$\overrightarrow{OP}=\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OD}=\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{BP}$$

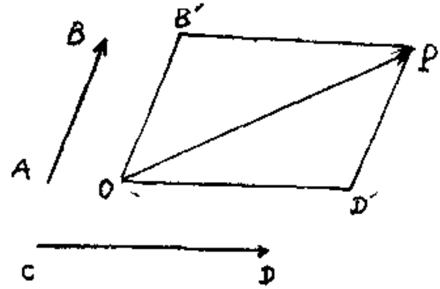


图1.3

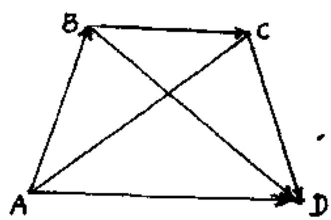
所以，为作出二向量之和，我们可以将一个向量的起点平移到另一个向量的终点，这时从前一个向量的起点指向后一个向量的终点的有向线段即为所求。缘此，向量和的平行四边形法则也叫做三角形法则。特别地，从这里我们看到，人为规定的零向量具有和实数加法中数0一样的性质：

$$\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{O}=\overrightarrow{O}+\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{AB}$$

此外，按照定义，我们立刻得到：

$$\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BA}=\overrightarrow{AA}=\overrightarrow{O}$$

所以，长度相同而方向相反的两个向量就如绝对值相等而符号相反的两个实数一样，其和为零向量，称这样的两个向量互逆(反)向量，写为



$$\overrightarrow{AB}=-\overrightarrow{BA}\text{ 或 }\overrightarrow{BA}=-\overrightarrow{AB}$$

图1.4

显然，向量的加法是可结合的，即是说

$$(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC})+\overrightarrow{CD}=\overrightarrow{AB}+(\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CD})=\overrightarrow{AD}$$

这从图1.4看是一目了然的。

向量的数乘：一个实数λ乘一个向量$\vec{a}$是这样的一个向量$\vec{b}$，它的长度是$\vec{a}$的长度的$|\lambda|$倍，而它的方向则视$\lambda>0$或$\lambda<0$一规定为和$\vec{a}$的方向相同或相反，记为

$$\vec{b}=\lambda\vec{a}$$

据这个定义，对已知的实数λ和有向线段$\vec{a}=\overrightarrow{AB}$，欲作出数乘向量$\vec{b}$，我们可将线段AB延为整条直线l，然后在l上自点A起，视$\lambda>0$或$\lambda<0$而分别沿$\overrightarrow{AB}$的方向或$\overrightarrow{BA}$的方向截取线段$AP=|\lambda|AB$，则$\overrightarrow{AP}$即为所求的$\vec{b}$。从这里容易看到、通常数轴上点和实数之间的一一对应可用“数乘”运算表述如下：设数轴x上的原点为O，单位点为I，记$\vec{e}=\overrightarrow{OI}$，则当数轴x上任一点p的坐标为x时，可写为$\overrightarrow{OP}=x\vec{e}$就是说：“点P的坐标为x”和$\overrightarrow{OP}$是数轴从原点O指向单位点I的这个向量$\vec{e}$的x倍等价。

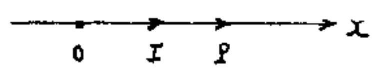


图1.5

按照这个等价说法，我们立刻知道，数乘运算具有如下性质：

(i) $1.\vec{e}=\vec{e}$

(ii) $(\lambda+\mu)\vec{e}=\lambda\vec{e}+\mu\vec{e}$

因为,只要视$\vec{e}$为某数轴上从原点指向单位点的向量,则据数乘向量的作法这无非是实数运算的已知等式而已。此外,直接按照定义(方向和大小)即可验证,对任何两个实数 λ 和 μ 有

(iii) $\lambda(\mu\vec{a})=(\lambda\mu)\vec{a}=\mu(\lambda\vec{a})$

最后,据向量加法的三角形法则和相似三角形的性质推知,数乘运算还适合

(iv) $\lambda(\vec{a}+\vec{b})=\lambda\vec{a}+\lambda\vec{b}$

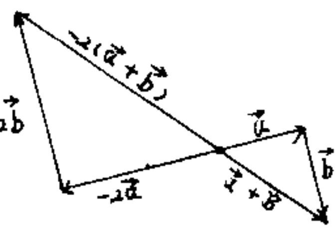


图1.6

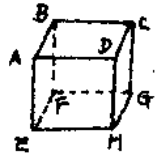
一般地,若在一个集合V上定义了一个可结合、可交换的“加法”运算,使在这种运算下有唯一的零元素且任一元素有其逆,又定义了一个取自某数域的“数乘”运算使(i)—(iv)成立,则V就称为一个域K上的线性空间。这里用到的数域K可以是实数域R,也可以是复数域C。在上面的定义中我们用到的是实数域R。综合上述可知,在添加入零向量之后,空间中的有向线段全体这个集合按所定义的两种运算——合称线性运算——而成为实数域上的线性空间。在几何中,常将线性空间叫做向量空间。

习题一

1、证明:若干个向量之和为零向量的充要条件是这些个

向量按三角形法则逐一“首尾相接”而成一条闭折线。

2、设ABCD——EFGH为一个平行六面体，试说明下列各对向量之间的关系（相等、相反）



(1)$\overrightarrow{AB}$和$\overrightarrow{CD}$ (2) $\overrightarrow{AE}$和$\overrightarrow{C}$

(3)$\overrightarrow{AC}$和 $\overrightarrow{EG}$ (4) $\overrightarrow{BE}$和$\overrightarrow{HC}$

3、试用向量的线性运算证明，任一个三角形的三条中线必共点。

4、试证：若一个四边形的对角线互相平分，则必为平行四边形。

5、已知两个向量，$\vec{a}$和$\vec{b}$，试求求$|\vec{a}+\vec{b}|=|\vec{a}-\vec{b}|$的条件。

6、记园O的n等分点为P_1、P_2……P_n，试证：

$$\overrightarrow{OP}_1+\overrightarrow{OP}_2+\cdots\cdots+\overrightarrow{OP}_n=\vec{O}$$

7、已知ΔABC，对平面上任一点P，令

$$\overrightarrow{AP}=\lambda\overrightarrow{AB}+\mu\overrightarrow{AC}$$

试证：点P在BC边上的充要条件为$\lambda+\mu=1$。

8、证明（三角不等式）

$$|\vec{a}+\vec{b}|\leqslant|\vec{a}|+|\vec{b}|$$

并说明等号在什么时候成立。

9、设□ABCD是一个空间四边形，又对角线AC和BD的中点分别是L和M，求证：

$$\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{CB}+\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{CD}=4\overrightarrow{LM}$$

10、设四面体OABC的三条棱AB、BC、CA的中点分别是L、

M、N求证：

$$\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}=\overrightarrow{OL}+\overrightarrow{OM}+\overrightarrow{ON}$$

§2 共线向量和共面向量

空间中的一个以A为始点，B为终点的有向线段，也可以抽象地用一个有序点偶来表示

(2.1) $\overrightarrow{AB}=(A,B)$

于是，二向量相等，即

(2.2) $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{CD}$

可以写成

(2.2) $(A,B)=(C,D)$

自然，(2.2)和(2.2)式的含义相同，它们都表示▱ABCD

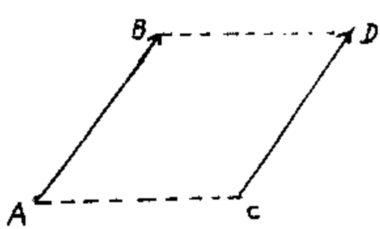


图2.1

是一个平行四边形。采用这种记法，为作出两个向量，$\overrightarrow{A_1B_1}$和$\overrightarrow{A_2B_2}$，的和向量，我们乃是根据向量相等的记法(2,2)′，先作向量$(O,A)=(A_1,B_1)$，$(O,B)=(A_2,B_2)$或者，在作出$\overrightarrow{A_1B_1}$之后，以B_1为始点，作向量

$$(B_1,C)=(A_2,B_2)$$

然后，分别据平行四边形法则或三角形法则，得到已知二向量的和向量为

$$\overrightarrow{OP}=\overrightarrow{A_1C}$$

虽然今后我们并不使用这种记法，但在初学阶段借助于这种记法去理解抽象的向量代数理论在立体几何中的具体应用将是有帮助的。

空间中的共线向量：

对空间中任意不同两点，A和B，我们用$l_{(A,B)}$表示A和B的连线。这样，对任何两个非零向量，$\overrightarrow{AB}$和$\overrightarrow{CD}$，如果$l_{(A,B)} \parallel l_{(C,D)}$，那么，显然必有

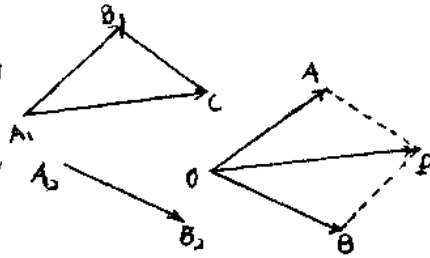


图2.2

$$(2.1) \qquad \overrightarrow{AB} = \lambda \overrightarrow{CD}$$

因为，当在$l_{(A,B)}$上任取一点C'并作$(C', D') = (C, D)$时，点$D' \in l_{(A,B)}$，当且仅当$l_{(A,B)} \parallel l_{(C,D)}$。据此，我们引入如下的说法：空间中的两个向量，$\vec{a}$和$\vec{b}$，叫做共线的，如果可以分别将它们分别表示为

$$\vec{a} = (A, B) \qquad \vec{b} = (C, D)$$

使得四点A、B、C、D是共线的。

按照这个说法，若$\vec{a}$，$\vec{b}$中有一个，例如$\vec{b}$是$\vec{o}$，则视为$A \equiv B$的特例而称$\vec{a}$和$\vec{o}$是共线的．这样一来，零向量和任何向量共线。不过必须注意，对共线的两个非零向量，代数关系式(2.3)，也可以等价地写为

$$(2.3) \qquad \overrightarrow{CD} = \mu \overrightarrow{AB} \quad \left(\mu = \frac{1}{\lambda}\right)$$

与此不同，虽然$\vec{o}$和任何非零向量$\vec{a}$共线，但作为共线性的代数表示，我们却只能写

$$\vec{b} = \vec{o} = o \cdot \vec{a}$$

而这时，不存在任何一个实数λ使得 $\vec{a}=\lambda\vec{b}$ 成立。就是说，在这种场合，$\vec{o}$ 和 $\vec{a}$ 在代数上是不平等的。因此，在向量代数中引入如下的

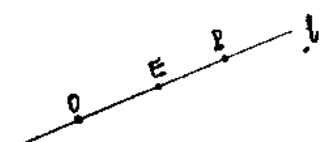
定义：向量 $\vec{a}$ 和 $\vec{b}$ 叫做线性相关的，如果存在不全为零的实数 λ 和 μ，使得

$$(2.4)\qquad \lambda\vec{a}+\mu\vec{b}=\vec{o}$$

否则，$\vec{a}$ 和 $\vec{b}$ 就叫做线性无关的。

显然，这里所引入的术语，'线性相关'和上文中的'共线'的含义相同。但按照(2.4)式，当 $\vec{b}=\vec{o}$ 时，只须取 $\lambda=0$ 而 μ 为任何实数，则它对 $\vec{o}$ 和 $\vec{a}$ 的线性相关性仍然适用。所以，用(2.4)式定义向量 $\vec{a}$ 和 $\vec{b}$ 的共线性，或即线性相关性，比起(2.3)式更一般。这里'共线'的称呼是特对几何向量而引入的。为行文简便起见，$\vec{a}$ 和 $\vec{b}$ 共线，今后也常写为 $\vec{a}\ /\!/\ \vec{b}$，也采用"$\vec{AB}$ 是直线 $l_{(A,B)}$（或与 $l_{(A,B)}$ 平行的任一直线）的一个方向向量"的说法。

设 $\vec{AB}$ 为空间中的任意一个非零向量，那么，为了考察空间中所有和 $\vec{AB}$ 共线的向量集合（显然是一个向量空间，习题）。我们只须先在 $l_{(A,B)}$ 上作出它们，然后再加以考察。例如任取 $l\ /\!/\ l_{(A,B)}$，并在 l 上任取一点O，并作向量 $\vec{e}$。



$$\vec{e}=(O,E)$$

图2.3