示范性职业技术学院建设项目系列教材

高职数学导学及习题详解

高等数学部分

总 主 编　冯素芬　赵光耀
本册主编　赵光耀

煤炭工业出版社

北京工业职业技术学院

教材编审委员会名单

出版说明

我院1994年被原国家教委确定为全国十所试办五年制高等职业教育学校之一，1999年开始试办三年制高等职业教育，2000年被教育部确定为全国首批示范性职业技术学院建设单位。

高职教育是培养生产、建设、管理、服务第一线技术应用性人才的教育，教材建设更要重视针对性和实用性，要能够及时反映生产现场的技术发展要求。为此，我院把高职教材建设作为示范性职业技术学院建设重点建设项目之一。根据教育部有关高职高专教材建设精神，结合我院《示范性职业技术学院建设方案》和《示范性职业技术学院建设管理办法》，在总结我院近10年来出版自编高职教材的基础上，组织学术水平高、实践能力强、熟悉生产实际、教学经验丰富的教师，通过推荐、遴选，针对我院重点建设专业和主要建设专业的专业课程，编写了本套示范性职业技术学院建设项目系列教材。

本系列教材注意吸收新的教学改革成果，吸收生产现场的新工艺、新技术；在尽可能保证学科体系的前提下，突出实用性和岗位针对性，力求充分体现高职特色。

由于我们的水平有限，本系列教材在编审和出版中可能存在许多缺点和不足，希望使用教材的教师和广大读者提出宝贵意见，使我们不断提高教材的编写、出版质量，共同为高职教材建设做出贡献。

北京工业职业技术学院教材编审委员会
2002年5月

前　言

为了适应我国高等职业教育的迅猛发展，满足高职在校学生的学习以及参加自学考试、成人高考和专升本考试的需要，我们以自考、成考和专升本考试大纲为指导，将全体数学教师多年的教学实践中的体会进行了全面的归纳和总结，编写了这套《高职数学导学及习题详解》，以便于学生自主学习，启发思维，掌握认知规律，形成数学能力。

本套教材紧扣高职培养目标，结合学生学习实际，以教会知识、形成能力为目的；重视基础，细而不繁，做到实处；重点面向全体，难点要求适中，因材施教重实际。本套教材分为三个分册，即《初等数学分册》《高等数学分册》和《工程数学分册》；内容分为教学要求、知识疏理、练习题和习题详解四个板块。本教材对于初中五年制和高中三年制、二年制的在校生均可使用。

《高职数学导学及习题详解》初等数学分册内容包括：集合·逻辑关系、函数、幂函数·指数函数·对数函数、任意角的三角函数、加法定理及其推论、反三角函数和简单三角方程、平面向量、复数、空间图形、直线册、二次曲线、极坐标与参数方程等。

《高职数学导学习题详解》高等数学分册内容包括：函数·极限·连续、导数与微分、中值定理、不定积分、定积分及其应用、常微分方程、多元函数微分学、无穷级数等。

《高职数学导学习题详解》工程数学分册内容为线性代数和概率论与数理统计两部分。线性代数包括：行列式、矩阵、线性方程、相似矩阵与二次型；概率论与数理统计包括：概率论的基本概念、随机变量及其分布、数理统计的基本概念、参数估计、假设检验、常用的几种统计方法等。

本套教材由冯素芬、赵光耀任总主编；冯素芬总策划，并负责组织实施，赵光耀主审。初等数学分册由冯素芬任主编，孙静、彭淑梅任副主编，参加编写的人员有：李世芳（第一章、第二章、第三章），孙静（第四章、第五章、第六章、第七章），彭淑梅（第八章、第九章），冯素芬（第十章、第十一章、第十二章），刘红梅（第十三章、第十四章）；高等数学分册由赵光耀任主编，魏树国、郭振海任副主编，参加编写的人员有：赵光耀（第一章、第二章、第三章），魏树国（第四章、第五章、第六章），郭振海（第七章、第八章）；工程数学分册由塔怀锁任主编，吴翠兰、叶承汾任副主编，参加编写的人员有：吴翠兰（第一章、第二章、第三章），塔怀锁（第五章、第六章、第七章），叶承汾（第八章、第九章），林硕蕾（第四章、第十章）。

在本套教材的编写过程中，得到了全国五年制高职教育公共课开发指导委员会吕一中主任的热情指导，得到了北京工业职业技术学院领导和基础部主任苗耀华、教学质量监控中心主任任凤国等部门领导及专家的大力支持和帮助，在此表示衷心的谢意！

由于水平有限，错误和不当之处在所难免，恳请读者批评指正！

编　者

2005 年 12 月

目　　录

第一章　函数·极限·连续

教学要求

一、函数

(1) 理解函数的定义,掌握函数值和函数定义域的求法.

(2) 理解和掌握函数的四种特性 .

(3) 熟练掌握基本初等函数的概念、性质和图像 .

(4) 理解和掌握复合函数的概念和运算 .

(5) 理解和掌握初等函数的概念 .

(6) 会建立简单实际问题的函数关系式 .

二、极限

(1) 理解函数极限的概念,会求函数在一点处的左右极限,掌握函数在一点处极限存在的充分必要条件 .

(2) 熟练掌握极限的四则运算法则 .

(3) 理解无穷小量、无穷大量的概念,掌握无穷小量的性质、无穷小量与无穷大量的关系,会运用等价无穷小量代换求极限 .

(4) 熟练掌握用两个重要极限求极限的方法 .

三、函数的连续性

(1) 理解函数在一点处连续与间断的概念,掌握函数在一点处连续与极限的关系,掌握判断函数(含分段函数)在一点处的连续性的方法 .

(2) 会求函数的间断点并确定其类型 .

(3) 掌握闭区间上连续函数的性质,会用介值定理判断方程根的存在性 .

(4) 理解和掌握初等函数在其定义区间上的连续性,会利用连续性求极限 .

知识梳理

一、函数

1. 区间定义

表示变量的取值范围 .

(1) 有限区间:设实数 a 和 b,且 $a<b$. 则:

$\{x|a<x<b\}$,称为开区间,记作 (a,b);

$\{x\mid a\leqslant x\leqslant b\}$,称为闭区间,记作 $[a,b]$;

$\{x \mid a \leqslant x < b\}$,称为半开区间,记作$[a,b)$;

$\{x \mid a < x \leqslant b\}$,称为半开区间,记作$(a,b]$.

(2) 无限区间:

$[a, +\infty) = \{x \geqslant a\}$; $(a, +\infty) = \{x > a\}$; $(-\infty, b] = \{x \leqslant b\}$;

$(-\infty, b) = \{x < b\}$; $(-\infty, +\infty) = \{-\infty < x < +\infty\}$.

2. 函数定义

设 x 和 y 是两个变量,D 是一个给定的非空数集,若对于每一个 $x \in D$,按照某一确定的法则 f,变量 y 总有确定的数值与之对应,则称变量 y 是变量 x 的函数,记作

$$y = f(x), x \in D.$$

其中,x 为自变量,y 为因变量,数集 D 为该函数的定义域.

若 $x_0 \in D$,则称函数 $f(x)$在 x_0 处有定义,使函数有定义的实数的全体称为定义域,即定义中的数集 D;称 $f(x_0)$为函数值,记作 $y_0 = f(x_0)$.

3. 函数的表示法

(1) 列表法:将自变量 x 的值与对应的函数值 y 列成表格表示其函数关系;

(2) 图像法:用几何图形表示变量 x 与 y 之间的函数关系;

(3) 解析法:用数学表达式表示变量 x 与 y 之间的函数关系.

4. 分段函数

两个变量之间的函数关系有时要用两个或多于两个的数学式子来表达,即对于一个函数,在其定义域的不同部分用不同的数学式子来表达,称为**分段函数**. 例如:

$$f(x) = \begin{cases} 2\sqrt{x}, & 0 \leqslant x \leqslant 1, \\ 1 + x, & x > 1. \end{cases}$$

其图像如图 1-1 所示.

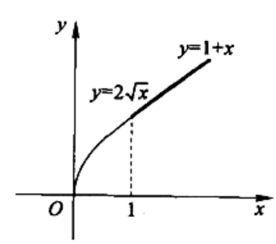

图 1-1

5. 函数的四种特性

(1) 函数的有界性:设函数 $f(x)$在区间 I 上有定义,若存在正数 M,使得对于一切 $x \in I$,有

$$|f(x)| \leqslant M,$$

则称函数 $f(x)$在区间 I 上有界;如果这样的 M 不存在,就称函数 $f(x)$在区间 I 上无界.

有界性的几何意义:如果函数 $f(x)$有界,则其图形必介于两条平行于 x 轴的直线 $y = -M$ 和 $y = M$ $(M > 0)$之间.

(2) 函数的单调性:设函数 $f(x)$在区间 I 上有定义,若对于 I 中任意两点 x_1 和 x_2,当 $x_1 < x_2$ 时,恒有:

① $f(x_1) < f(x_2)$,则称函数 $f(x)$在区间 I 上单调增加;

② $f(x_1) > f(x_2)$,则称函数 $f(x)$在区间 I 上单调减少.

单调增加和单调减少的函数统称为单调函数;区间 I 称为函数的单调区间. 如图 1-2 所示.

(3) 函数的奇偶性:设函数 $f(x)$的定义域 D 关于原点对称. 若对任意 $x \in D$,有:

① $f(-x) = f(x)$,则称 $f(x)$为偶函数;

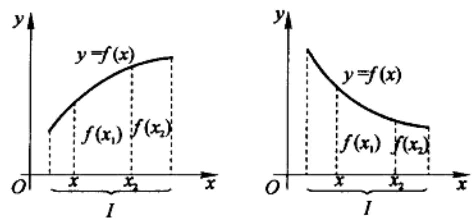

图 1－2

② $f(-x)=-f(x)$，则称 $f(x)$ 为奇函数 .

奇函数的图形关于坐标原点对称，偶函数的图形关于 y 轴 . 如图 1－3 所示 .

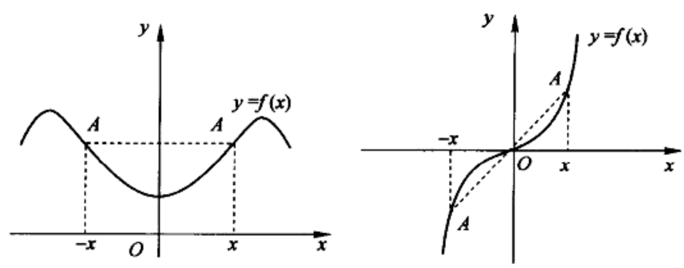

图 1－3

(4) 函数的周期性：设函数 $f(x)$ 的定义域为 D. 若存在一个正数 T，使得对于任意 $x\in D$ 有 $x\pm T\in D$，且

$$f(x+T)=f(x)$$

恒成立，则称 $f(x)$ 为周期函数，T 称为 $f(x)$ 的周期 . 通常称周期函数的周期是指最小正周期，如图 1－4 所示 .

6. 反函数

定义：已知函数

$$y=f(x),\qquad x\in D\ ,y\in Z,$$

若对每一个 $y\in Z$，D 中只有一个 x 值，使得

$$f(x)=y$$

成立，这就以 Z 为定义域确定了一个函数，这个函数称为函数 $y=f(x)$ 的反函数，记作

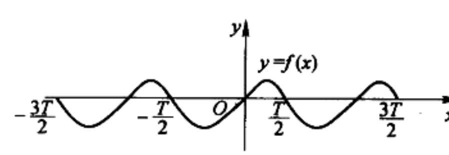

图 1－4

$$x=f^{-1}(y),\qquad y\in Z.$$

按照习惯记法，通常用 x 表示自变量，y 表示因变量，函数 $y=f(x)$ 的反函数记作

$$y=f^{-1}(x),\qquad x\in Z.$$

单调函数必有反函数，并且单调增加函数的反函数是单调增加的，单调减少函数的反函数是单调减少的 .

在同一直角坐标系中，函数 $f(x)$ 与其反函数 $y=f^{-1}(x)$ 的图形关于直线 $y=x$ 对称，如图 1－5 所示 .

7. 基本初等函数

(1) 幂函数 $y=x^{\alpha}$,(α 为实数).

常用幂函数:

$\alpha=-1, y=\dfrac{1}{x}, x\in(-\infty,0)\cup(0,+\infty)$;

$\alpha=\dfrac{1}{2}, y=\sqrt{x}, x\in[0,+\infty)$;$\alpha=1, y=x, x\in(-\infty,+\infty)$;

$\alpha=2, y=x^2, x\in(-\infty,+\infty)$;$\alpha=3, y=x^3, x\in(-\infty,+\infty)$.

其图形如图 1-6 所示 .

(2) 指数函数 $y=a^x$ $(a>0,a\neq1)$,定义域$(-\infty,+\infty)$,值域$(0,+\infty)$. 当 $a>1$ 时,该函数是单调增加的;当 $0<a<1$ 时,该函数是单调减少的 . 因为 $a^0=1$,所以,函数过点(0,1),且图形总位于 y 轴的上侧(图 1-7).

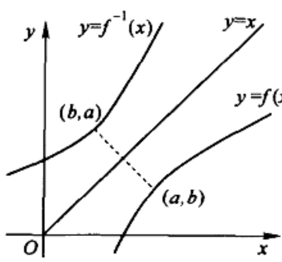

图 1-5

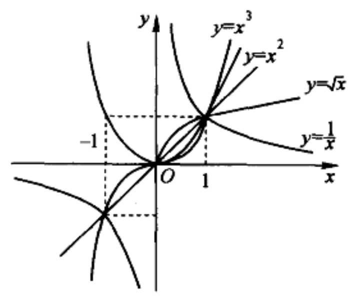

图 1-6

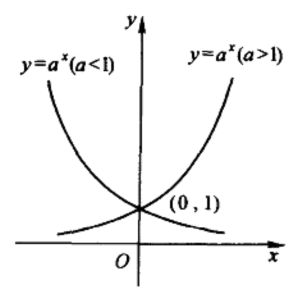

图 1-7

(3) 对数函数 $y=\log_a x$ $(a>0,a\neq1)$,定义域$(0,+\infty)$,值域$(-\infty,+\infty)$. 当 $a>1$ 时,该函数是单调增加的;当 $0<a<1$ 时,该函数是单调减少的 . 因为 $\log_a 1=0$,所以,函数过点(1,0),且它的图形总位于 x 轴的右侧(图 1-8).

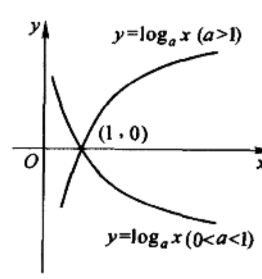

图 1-8

(4) 三角函数:三角函数的解析式、定义域、值域及性质见表 1-1. 其图形如图 1-9 所示 .

另外,正割函数 $y=\sec x=\dfrac{1}{\cos x}$;余割函数 $y=\csc x=\dfrac{1}{\sin x}$.

表 1-1

函数	解析式	定义域	值 域	周 期	有界性
正弦函数	$y=\sin x$	$(-\infty,+\infty)$	$[-1,1]$	2π	$\lvert\sin x\rvert\leqslant1$
余弦函数	$y=\cos x$	$(-\infty,+\infty)$	$[-1,1]$	2π	$\lvert\cos x\rvert\leqslant1$
正切函数	$y=\tan x$	$x\neq n\pi+\frac{\pi}{2}$ $n=0,\pm1,\pm2\cdots,$	$(-\infty,+\infty)$	π	无界
余切函数	$y=\cot x$	$x\neq n\pi$ $n=0,\pm1,\pm2\cdots,$	$(-\infty,+\infty)$	π	无界

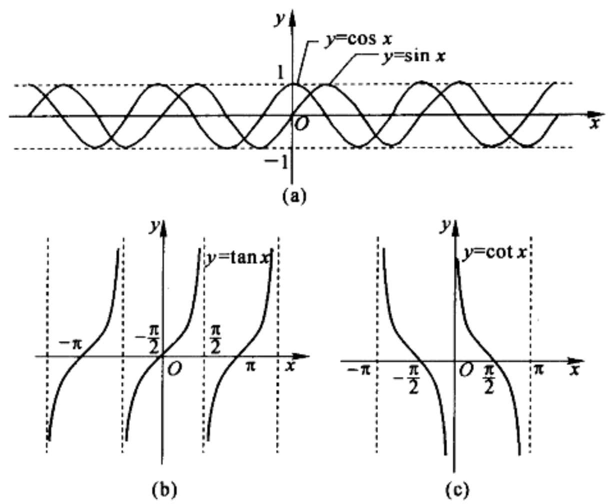

图 1－9

(5) 反三角函数：反三角函数的解析式、定义域、值域及性质见表 1－2.

表 1－2

函数	解析式	定义域	值域	单调性
反正弦函数	$y=\arcsin x$	$[-1,1]$	$\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$	递增
反余弦函数	$y=\arccos x$	$[-1,1]$	$[0,\pi]$	递减
反正切函数	$y=\arctan x$	$(-\infty,+\infty)$	$\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)$	递增
反余切函数	$y=\operatorname{arccot} x$	$(-\infty,+\infty)$	$(0,\pi)$	递减

其图形如图 1－10 所示．

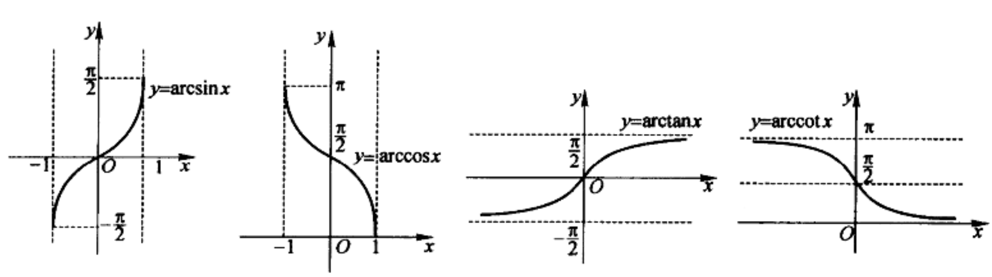

图 1－10

以上五类函数统称为基本初等函数，

8．复合函数

定义：设函数 $y=f(u)$，$u\in U$，而函数 $u=\varphi(x)$的值域为 U^*，则当 $U\cap U^*\neq\varnothing$ 时，通过 u 的联系，x 也是y 的函数，则称 y 是x 的复合函数，记作

$$y=f[\varphi(x)].$$

其中,变量 u 称为中间变量 .

9. 初等函数

由常数和基本初等函数经过有限次的四则运算和有限次的复合步骤所构成并可以用一个式子表示的函数,称为**初等函数** .

二、极限

1. 数列的极限

(1) 数列定义:如果按照某个法则,对于每一个 $n\in N$,对应着一个确定的实数 x_n,这些实数按照下标 n 从小到大排列得到一个序列

$$x_1,x_2,\cdots,x_n\cdots$$

叫做数列,简记为$\{x_n\}$.

(2) 数列极限定义:设数列$\{x_n\}$,若存在常数 a,使得当 n 无限增大时,x_n 总趋向于确定的常数a,则称数列$\{x_n\}$以 a 为极限,记作

$$\lim_{n\to\infty}x_n=a \text{ 或 } x_n\to a(n\to\infty),$$

此时,也称数列收敛于 a;否则,称数列是发散的 .

(3) 收敛数列的性质:

① 极限的唯一性 . 如果数列$\{x_n\}$收敛,那么它的极限唯一 .

② 收敛数列的有界性 . 如果数列$\{x_n\}$收敛,那么数列$\{x_n\}$一定有界 .

2. 函数的极限

(1) 当 $x\to x_0$ 时 $f(x)$的极限定义:

① **定义**:设函数 $f(x)$在点 x_0 的某个邻域内有定义(在 x_0 处可以没有定义),当 $x\to x_0$ 时,函数 $f(x)$总趋向于确定的常数 A,则称函数 $f(x)$当 x 趋向于x_0 时以 A 为极限,记作

$$\lim_{x\to x_0}f(x)=A \text{ 或 } f(x)\to A(x\to x_0).$$

若当 $x\to x_0^-$(从 x_0 的左侧趋向于 x_0,即 $x<x_0$)时,函数 $f(x)$趋向于确定的常数 A,则称函数 $f(x)$以 A 为左极限,记作

$$f(x_0^-)=\lim_{x\to x_0^-}f(x)=A \text{ 或 } f(x)\to A(x\to x_0^-).$$

若当 $x\to x_0^+$(从 x_0 的右侧趋向于 x_0,即 $x>x_0$)时,函数 $f(x)$趋向于确定的常数 A,则称函数 $f(x)$以 A 为右极限,记作

$$f(x_0^+)=\lim_{x\to x_0^+}f(x)=A \text{ 或 } f(x)\to A(x\to x_0^+).$$

左极限和右极限统称为单侧极限 .

② 全极限存在的充分必要条件是:左右极限各自存在且相等 . 即

$$\lim_{x\to x_0}f(x)=A\Leftrightarrow\lim_{x\to x_0^-}f(x)=A=\lim_{x\to x_0^+}f(x) .$$

3. 当 $x\to\infty$时 $f(x)$的极限定义

① **定义**:设函数 $f(x)$在$|x|>a(a>0)$时有定义,若当 $x\to\infty$时,函数趋向于常数 A,则称函数 $f(x)$当 x 趋向于无穷时以A 为极限,记作

$$\lim_{x\to\infty}f(x)=A \text{ 或 } f(x)\to A(x\to\infty) .$$

若 $x\to-\infty$ 时,函数 $f(x)$ 以 A 为极限,记作 $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=A$.

若 $x\to+\infty$ 时,函数 $f(x)$ 以 A 为极限,记作 $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=A$.

以上两个极限称为单侧极限 .

② 极限 $\lim\limits_{x\to\infty}f(x)$ 存在的充分必要条件是两个单侧极限各自存在且相等,即

$$\lim_{x\to x\infty}f(x)=A\Leftrightarrow\lim_{x\to-\infty}f(x)=A=\lim_{x\to+\infty}f(x).$$

4. 无穷小量与无穷大量

(1) 无穷小量:以零为极限的变量称为无穷小量,简记为无穷小,记作

$$\lim_{\substack{x\to x_0\\(x\to\infty)}}f(x)=0\ .$$

无穷小与函数极限的关系:是在自变量的同一变化过程 $x\to x_0$(或 $x\to\infty$)中,函数 $f(x)$ 具有极限 A 的充分必要条件所示 $f(x)=A+\alpha$,其中 α 是无穷小,即

$$\lim f(x)=A\quad\Leftrightarrow\quad f(x)=A+\alpha\ (\alpha\to0).$$

(2) 无穷小的性质:

① 有限个无穷小的和是无穷小 .

② 有限个无穷小的乘积是无穷小 .

③ 常数与无穷小的乘积是无穷小 .

(3) 无穷大量:绝对值无限增大的变量称为无穷大量,简记为无穷大,记作

$$\lim_{\substack{x\to x_0\\(x\to\infty)}}f(x)=\infty.$$

(4) 无穷小与无穷大的关系:在自变量的同一变化过程 $x\to x_0$(或 $x\to\infty$)中,如果 $f(x)$ 为无穷大,则 $\dfrac{1}{f(x)}$ 为无穷小;反之,若 $f(x)$ 为无穷小,且 $f(x)\neq0$,则 $\dfrac{1}{f(x)}$ 为无穷大 .

(5) 无穷小的比较:设 $\alpha(\alpha\neq0)$ 和 β 是同一变化过程中的无穷小 .

若 $\lim\dfrac{\beta}{\alpha}=0$,则称 β 是比 α 高阶的无穷小,记作 $\beta=0(\alpha)$;

若 $\lim\dfrac{\beta}{\alpha}=\infty$,则称 β 是比 α 低阶的无穷小;

若 $\lim\dfrac{\beta}{\alpha}=C(C\neq0)$,则称 β 与 α 是同阶的无穷小;

若 $\lim\dfrac{\beta}{\alpha}=1$,则称 β 与 α 是等价无穷小,记作 $\alpha\sim\beta$.

(6) 利用等价无穷小求极限法则:设 $\alpha\sim\alpha'$, $\beta\sim\beta'$,且 $\lim\dfrac{\beta}{\alpha}$ 存在,则

$$\lim\frac{\beta}{\alpha}=\lim\frac{\beta'}{\alpha'}\ .$$

5. 极限四则运算法则

设 $\lim f(x)=A$, $\lim g(x)=B$,则

(1) $\lim[f(x)\pm g(x)]=\lim f(x)\pm\lim g(x)=A\pm B$;

(2) $\lim[f(x)\cdot g(x)]=\lim f(x)\cdot\lim g(x)=A\cdot B$;

(3) $\lim Cf(x)=C\lim f(x)=CA$;

(4) $\lim\dfrac{f(x)}{g(x)}=\dfrac{\lim f(x)}{\lim g(x)}=\dfrac{A}{B}\quad(B\neq0)$;

(5) $\lim f^n(x)=[\lim f(x)]^n=A^n \quad (n\in \mathbf{N}^+)$.

6. 两个重要的极限

(1) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{x}=1$.

常见变形形式：$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\tan x}{x}=1$；$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\arcsin x}{x}=1$；$\lim\limits_{\varphi(x)\to 0}\dfrac{\sin\varphi(x)}{\varphi(x)}=1$.

(2) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^x=\mathrm{e}$.

常见变形形式：$\lim\limits_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}}=\mathrm{e}$ ；$\lim\limits_{\varphi(x)\to\infty}\left[1+\dfrac{1}{\varphi(x)}\right]^{\varphi(x)}=\mathrm{e}$；$\lim\limits_{\varphi(x)\to 0}\left[1+\varphi(x)\right]^{\frac{1}{\varphi(x)}}=\mathrm{e}$.

7. 复合函数的极限法则

设函数 $y=f[\varphi(x)]$是由 $y=f(u)$与函数 $u=\varphi(x)$复合而成，$f[\varphi(x)]$在点 x_0 的去心邻域内有定义，若 $\lim\limits_{x\to x_0}\varphi(x)=u_0$，$\lim\limits_{u\to u_0}f(u)=A$，且在该去心邻域内有 $\varphi(x)\neq u_0$，则

$$\lim_{x\to x_0}f[\varphi(x)]=\lim_{u\to u_0}f(u)=A.$$

三、函数的连续性

1. 函数在一点处连续的定义

(1) 设函数 $y=f(x)$在 x_0 的某个邻域内有定义，如果

$$\lim_{\Delta x\to 0}\Delta y=\lim_{\Delta x\to 0}[f(x_0+\Delta x)-f(x_0)]=0 ,$$

则称函数 $y=f(x)$在点 x_0 处连续，称 x_0 为函数的连续点 .

(2) 如果函数 $y=f(x)$满足：

① 在 x_0 的某个邻域内有定义；

② 极限 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)$存在；

③ $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=f(x_0)$.

则称函数 $y=f(x)$在点 x_0 处连续 .

(3) 左右连续的概念：

若 $\lim\limits_{x\to x_0^-}f(x)=f(x_0)$，则称函数 $f(x)$在点 x_0 左连续；

若 $\lim\limits_{x\to x_0^+}f(x)=f(x_0)$，则称函数 $f(x)$在点 x_0 右连续 .

函数 $f(x)$在点 x_0 连续的充分必要条件是，函数 $f(x)$在点 x_0 既左连续，又右连续，即

$$\lim_{x\to x_0}f(x)=f(x_0) \quad\Leftrightarrow\quad \lim_{x\to x_0^-}f(x)=f(x_0)=\lim_{x\to x_0^+}f(x).$$

若函数 $f(x)$在区间(a,b)内的每一点都连续，则称函数 $f(x)$在开区间(a,b)内连续，或称函数 $f(x)$为区间内的连续函数，区间(a,b)为函数 $f(x)$的连续区间；对于闭区间$[a,b]$，如果在端点处有

$$\lim_{x\to a^+}f(x)=f(a),\ \lim_{x\to b^-}f(x)=f(b),$$

则称函数 $f(x)$在闭区间$[a,b]$上连续 .

2. 函数间断点

(1) 间断点　使函数不连续的点，称为间断点 . 如果函数 $f(x)$在点 x_0 的某去心邻域内有定义，且若函数 $f(x)$有下列三种情形之一：

① 在 $x=x_0$ 处没有定义；

② 虽在 $x=x_0$ 处有定义，但 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)$ 不存在；

③ 虽在 $x=x_0$ 处有定义，且 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)$ 存在，但 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)\neq f(x_0)$.

则函数 $f(x)$ 在点 x_0 不连续，点 x_0 称为函数 $f(x)$ 的不连续点或间断点．

(2) 函数间断点的分类　间断点分成第一类和第二类间断点，其分类可以通过左右极限来区分，具体分类为

$$
\text{间断点}\begin{cases}
\text{第一类}\quad \lim\limits_{x\to x_0^-}f(x)\text{、}\lim\limits_{x\to x_0^+}f(x)\text{ 均存在}\begin{cases}\text{跳跃间断点}\quad \lim\limits_{x\to x_0^-}f(x)\neq\lim\limits_{x\to x_0^+}f(x)\ (\text{即 }\lim\limits_{x\to x_0}f(x)\text{存在})\text{；}\\[2ex] \text{可去间断点}\quad \lim\limits_{x\to x_0^-}f(x)=\lim\limits_{x\to x_0^+}f(x)\text{；}\end{cases}\\[6ex]
\text{第二类}\quad \lim\limits_{x\to x_0^-}f(x)\text{、}\lim\limits_{x\to x_0^+}f(x)\text{ 至少有一个不存在}\begin{cases}\text{无穷间断点}\quad \lim\limits_{x\to x_0^-}f(x)\text{、}\lim\limits_{x\to x_0^+}f(x)\text{ 有一个是无穷大；}\\[2ex] \text{振荡间断点}\quad \lim\limits_{x\to x_0}f(x)\text{不存在，其值在某范围内摆动多次．}\end{cases}
\end{cases}
$$

3．*连续函数的运算*

(1) 连续函数的和、差、积、商的连续性　设函数 $f(x)$ 和 $g(x)$ 在点 x_0 连续，则它们的和(差) $f(x)\pm g(x)$、积 $f(x)\cdot g(x)$ 和商 $\dfrac{f(x)}{g(x)}$ (当 $g(x_0)\neq 0$ 时)都在点 x_0 连续．

(2) 反函数的连续性　如果函数 $y=f(x)$ 在区间 I_x 上单调增加(或单调减少)且连续，那么，它的反函数 $x=f^{-1}(y)$ 也在对应的区间 $I_y=\{y\mid y=f(x),x\in I_x\}$ 上单调增加(或单调减少)且连续．

(3) 复合函数的连续性　设函数 $u=\varphi(x)$ 在点 x_0 连续，且 $\varphi(x_0)=u_0$，而函数 $y=f(u)$ 在点 u_0 连续，那么，复合函数 $y=f[\varphi(x)]$ 在点 x_0 也连续．

4．*初等函数的连续性*

(1) 基本初等函数在它们的定义域内都是连续的．

(2) 一切初等函数在其定义区间内都是连续的．

5．*闭区间上连续函数的性质*

(1) 有界性与最大值最小值定理　在闭区间上连续的函数在该区间上有界且一定取得它的最大值和最小值．

(2) 零点定理　设函数 $f(x)$ 在闭区间 $[a,b]$ 上连续，且 $f(a)$ 与 $f(b)$ 异号(即 $f(a)\cdot f(b)<0$)，那么，在开区间 (a,b) 内至少存在一点 ξ，使

$$f(\xi)=0\quad(a<\xi<b).$$

该定理的几何解释如图 1-11(a)所示．

(3) 介值定理　设函数 $f(x)$ 在闭区间 $[a,b]$ 上连续，且在区间的端点处取不同的函数值，即

$$f(a)=A\ \text{及}\ f(b)=B,$$

那么，对于 A 与 B 之间的任意一个数 C，在开区间 (a,b) 内至少存在一点 ξ，使得

$$f(\xi)=C\quad(a<\xi<b).$$

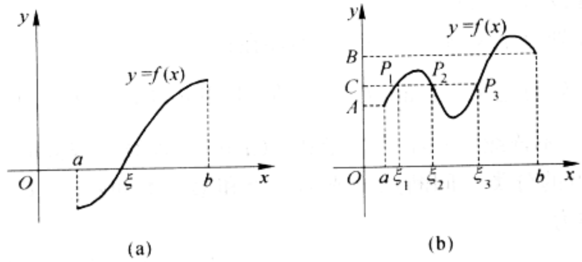

图 1－11

该定理的几何解释如图 1－11(b)所示．

6．曲线的渐近线

若曲线 $y=f(x)$上的点 $P(x,y)$沿曲线无限远离原点时，点 P 与某条定直线的距离趋于零，则称该直线是曲线 $y=f(x)$的渐近线．

如果 $\lim\limits_{x\to\infty}f(x)=a$，则称直线 $y=a$ 为曲线 $y=f(x)$的水平渐近线．

如果 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=\infty$，则称直线 $x=x_0$ 为曲线 $y=f(x)$的铅直渐近线．

练习题

一、是非题

1．$f(x)=x+1$ 与 $g(x)=\sqrt{x^2}+1$ 是同一个函数．（　　）

2．$f(x)=5-x$ 与 $g(x)=\dfrac{25-x^2}{5+x}$是同一个函数．（　　）

3．已知 $y=f(x)$是偶函数，$x=\varphi(t)$是奇函数，那么函数 $y=f[\varphi(t)]$必是奇函数．（　　）

4．$f(x)=\dfrac{1}{x}$不是单调函数．（　　）

5．已知 $f(x)$是单调增加函数，则 $f[f(x)]$也是单调增加的函数．（　　）

6．基本初等函数的和必是初等函数．（　　）

7．常数零是无穷小量．（　　）

8．无穷小量的倒数必定是无穷大量．（　　）

9．$f(x)$在 x_0 处无定义，则 $f(x)$当 $x\to x_0$ 时一定没有极限．（　　）

10．若 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=A$，则 $f(x_0)=A$．（　　）

11．$f(x)$在区间(a,b)内连续，则对于区间(a,b)内的每一点 x_0，当 $x\to x_0$ 时 $f(x)$都有极限．（　　）

12．基本初等函数的定义域就是它的连续区间．（　　）

13．$f(x)$当 $x\to x_0$ 时有极限，则 $f(x)$在 x_0 处一定连续．（　　）

14．如果函数 $f(x)$在(a,b)内连续，则函数 $f(x)$必有界．（　　）

15．如果函数 $f(x)$在$[a,b]$上有界，则函数 $f(x)$必有最大值和最小值．（　　）

二、填空题

1. 函数 $f(x)=\sqrt{x^2-x-6}+\arcsin\dfrac{2x-1}{7}$的定义域是______ .

2. 函数 $f(x)=\dfrac{1}{\ln(x-5)}$的定义域是______.

3. 若 $f(x)=\dfrac{x}{1-x}$,则 $f\left(\dfrac{1}{x}\right)=$______.

4. 设 $f(x)=\begin{cases}1-x, & x<1\\ 0, & x=1\\ x-1, & x>1\end{cases}$,则 $f(0)+f(1)+f(2)=$______.

5. 设 $f(x)=\begin{cases}x+1, & x>0\\ \pi, & x=0\\ 0, & x<0\end{cases}$,则 $f\{f[f(-1)]\}=$______.

6. 函数 $f(x)=[\arcsin(3x^5-1)]^2$ 的复合过程是______.

7. 设函数 $f(x)=\ln x, g(x)=\sin x$,则 $f[g(x)]=$______, $g[f(x)]=$______ .

8. 若 $f(x)=\dfrac{1}{x}$,则 $f[f(x)]=$______.

9. $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=A$ 的充要条件是左右极限______且______.

10. 设 $f(x)=\dfrac{x^2-1}{|x-1|}$,那么 $\lim\limits_{x\to1^-}f(x)=$______, $\lim\limits_{x\to1^+}f(x)=$______.

11. 设 $f(x)=\begin{cases}-\dfrac{1}{x-1}, & x<0\\ 0, & x=0\\ x+1, & x>0\end{cases}$,则 $\lim\limits_{x\to0}f(x)=$______.

12. 设 $y=x-\arctan x$,则 $\lim\limits_{x\to-\infty}(y-x)=$______.

13. 如果 $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2x^3-3x^2+1}{(x-1)(4x^n+7)}=\dfrac{1}{2}$,则 $n=$______ .

14. 设 $f(x)=\dfrac{x^2}{(x-1)^2}$,当 $x\to$______ $f(x)$是无穷大,当 $x\to$______ $f(x)$是无穷小 .

15. 当 $x\to\infty$, $\sin^2\dfrac{1}{x}$与$\dfrac{1}{x^k}$是等价无穷小,则 $k=$______.

16. 如果函数 $y=f(x)$在 x_0 处连续,那么 $\lim\limits_{x\to x_0}[f(x)-f(x_0)]=$______.

17. 如果函数 $y=f(x)$在 x_0 处连续,且 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=\dfrac{1}{3}$,则 $f(x_0)=$______.

18. 若函数 $f(x)$连续,则 $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{6}}f(x\sin x)=$______.

19. 函数 $f(x)=\dfrac{x^2-1}{x^2+3x+2}$的间断点为______.

20. 设 $f(x)=\begin{cases}x^2, x\neq4\\ A, x=4\end{cases}$,为使 $f(x)$在 $x=4$ 处连续,则 $A=$______.

三、单项选择题

1. 下列各对函数中,表示同一个函数的是(　　).