21世纪高等院校教材

XIAN XING DAI SHU

线性代数

朱砾　周勇　主编

若 $A=(a_{ij})_{m\times n}$ 与 $B=(b_{ij})_{m\times n}$ 同型，

且它们的对应元素相等，即

$a_{ij}=b_{ij}\ (i=1,2,\cdots,m;\ j=1,2,\cdots,n)$，

科学出版社
www.sciencep.com

·21世纪高等院校教材·

线性代数

朱 砾 周 勇 主编

科 学 出 版 社

北 京

内 容 简 介

本书根据高等院校经济、管理类专业数学课程的教学要求编写. 全书共七章，主要介绍行列式、矩阵、向量空间、线性方程组、矩阵对角化、二次型、线性空间与线性变换. 除第七章外，每章都配有典型例题分析.

本书体系完整，结构合理，叙述清楚，条理清晰，习题量丰富，并附有习题答案，可供高等院校经济、管理类专业学生选用，也可供科技工作者参考.

图书在版编目（CIP）数据

线性代数/朱砾,周勇主编. – 北京：科学出版社,2006
（21世纪高等院校教材）
ISBN 7-03-017067-9

I.线… II.①朱…②周… III.线性代数-高等学校-教材 IV.O151.2

中国版本图书馆CIP数据核字（2006）第025896号

责任编辑：杨瑰玉／责任校对：王望容
责任印制：高 嵘／封面设计：曹 刚

科学出版社 出版
北京东黄城根北街16号
邮政编码：100717
http://www.sciencep.com
武汉大学出版社印刷总厂印刷
科学出版社发行 各地新华书店经销
*
2006年4月第 一 版 开本：B5（720×1000）
2006年4月第一次印刷 印张：11 3/4
印数：1~6 000 字数：220 000

定价：18.00元

《线性代数》编者名单

主　编　朱　砾　周　勇

副主编　谢清明　骆先南

编　者　（以姓氏笔画为序）

丁碧文　王文强　朱　砾

杨　柳　张　燕　周　勇

周光明　骆先南　梁开福

曾红云　谢清明　颜艳华

序

经济学在历史上一开始是具有人文色彩的.语言描述成为其研究和处理问题的主要工具,推理则是叙述性的.然而,随着经济的发展以及数学向各学科领域的渗透,经济学家开始采用归纳推理的方法,广泛利用数学工具,使其迅速向数理经济学转化,以适应经济社会发展的需要.特别是随着计算机的迅速发展和数学的广泛应用,数学在经济、管理学科中占有重要的地位.这已经成为一个共识.因此,如何提高经济、管理类专业学生的数学素质和应用能力,已成为高校数学教学一项重要任务.为完成这一目标,必须要有一套合适的教科书.由湘潭大学数学与计算科学学院周勇教授等主编的系列教材《微积分》、《线性代数》和《概率论与数理统计》就是针对这类专业教学需要而编写的.这套教材的出版,为经济、管理类各专业的学生提供丰富的知识载体,以满足日益拓广的专业需要.

本书着眼于提高学生数学素质和专业发展的需要,保留了传统数学中的经典内容,增加了与经济、管理密切相关的数学理论与方法,并注重它们在该领域中的应用,旨在培养应用能力,增强创新意识;在具体编排上,体系和谐,结构严谨;在叙述方法上,重在启发、探索和揭示过程,并考虑到文科学生的思维方式和数学基础,重要概念从它们的实际背景出发逐步延伸,尽量避开数学本身的抽象;在理论推导上,科学、适度,体现了直观平易、简便适用的原则;例题和习题的选取与配置,能起到对理论的诠释和方法的示例作用,并能达到良好的练习效果.总之,本书具有鲜明的专业特色,凝聚了作者多年的教学和教材编写的经验体会,是近年来在教材建设上的又一成果.本书不仅可作为经济、管理类本科各专业的教学用书,而且对于广大经济、管理和其他科技工作者以及报考经济、管理类专业研究生的考生也是一套有实用价值的参考书.

一套教材的成熟,需要时间去雕琢,相信在同行专家的支持下,该系列教材一定会进一步趋于完善.

周维楚

2005 年 12 月

前　言

线性代数作为现代数学的重要分支，在自然科学和社会科学的各个领域都具有极其广泛的应用，正是这种广泛的应用性，今天它已成为各类专业大学生的一门重要的基础理论课，对提高学生的素质，优化知识结构，培养学生的逻辑思维能力、抽象思维能力、分析问题和解决问题的能力，提高创新意识，并为后续课程的学习打下坚实的基础起着重要的作用．

本书是我们在多年来教学实践的基础上编写而成的，全书共七章，主要介绍行列式、矩阵、向量空间、线性方程组、矩阵对角化、二次型、线性空间与线性变换．本书的内容紧扣大纲，力求简明扼要．文字叙述力求通俗易懂，深入浅出．本书除第七章外，每章都配有典型例题分析，各章都配有适量的习题，并附有习题提示和答案．书中有些内容加了 * 号，选用本教材时可根据教学需要和学时安排略去不讲．

本书适合高等院校经济、管理类各专业学生和教师使用，也可供科技工作者参考．

在本书的编写过程中，湘潭大学数学与计算科学学院、湘潭大学教务处给予了大力支持，在此深表感谢！

限于编者的学识水平和经验，书中尚有不妥之处，恳请同行和读者批评指正．

编　者

2005 年 12 月

目　　录

第一章　行　列　式

第一节　二阶与三阶行列式

一、二元线性方程组与二阶行列式

对于二元线性方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 = b_2, \end{cases} \tag{1.1}$$

使用加减消元法，当 $a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} \neq 0$ 时，方程组(1.1)有解为

$$x_1 = \frac{b_1a_{22} - b_2a_{12}}{a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}}, \quad x_2 = \frac{b_2a_{11} - b_1a_{21}}{a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}}. \tag{1.2}$$

式(1.2)中的分子、分母都是四个数分两对相乘再相减而得. 其中分母 $a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$ 是由方程组(1.1)的四个系数确定的，把这四个数按它们在方程组(1.1)中的位置，排成两行两列(横排称行、竖排称列)的数表

$$\begin{matrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{matrix} \tag{1.3}$$

表达式 $a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$ 称为数表(1.3)所确定的行列式，记作

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}, \tag{1.4}$$

数 a_{ij} $(i = 1,2;\ j = 1,2)$ 称为行列式(1.4)的元素. 元素 a_{ij} 的第一个下标 i 称为行标，表明该元素位于第 i 行；第二个下标 j 称为列标，表明该元素位于第 j 列.

上述二阶行列式的定义可用对角线法则记忆. 如图 1-1 所示，即实线连接的两个元素(主对角线)的乘积减去虚线连接的两个元素(次对角线)的乘积.

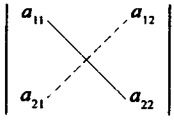

图 1-1

例 1　$\begin{vmatrix} 3 & -2 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = 3\times1-(-2)\times2=7.$

二、三阶行列式

定义 1.1 设有 9 个数排成三行三列的数表

$$\begin{matrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{matrix} \tag{1.5}$$

用记号

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

表示代数和

$$a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{11}a_{23}a_{32}.$$

上式称为数表(1.5)所确定的三阶行列式,即

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32}$$
$$- a_{13}a_{22}a_{31} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{11}a_{23}a_{32}. \tag{1.6}$$

三阶行列式表示的代数和,也可以由下面的对角线法则来记忆,如图 1-2 所示,其中各实线连接的三个元素的乘积是代数和中的正项,各虚线连接的三个元素的乘积是代数和中的负项.

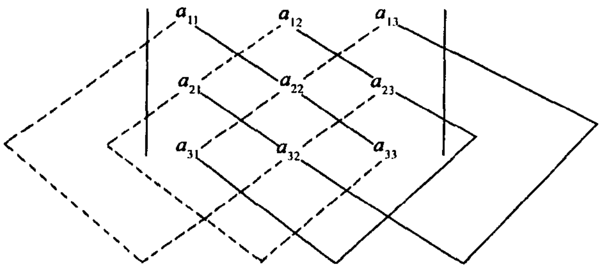

图 1-2

例 2 计算三阶行列式

$$D = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & -2 & -1 \\ -3 & 4 & -5 \end{vmatrix}.$$

解 由对角线法则

$$D = 1\times(-2)\times(-5) + 2\times(-1)\times(-3) + 3\times4\times2$$
$$-3\times(-2)\times(-3) - 2\times2\times(-5) - 1\times4\times(-1) = 46.$$

例 3 $\begin{vmatrix} a & 1 & 0 \\ 1 & a & 0 \\ 4 & 1 & 1 \end{vmatrix} > 0$ 的充分必要条件是什么？

解 由对角线法则

$$\begin{vmatrix} a & 1 & 0 \\ 1 & a & 0 \\ 4 & 1 & 1 \end{vmatrix} = a^2 - 1.$$

当且仅当 $|a| > 1$ 时 $a^2 - 1 > 0$，因此可得

$$\begin{vmatrix} a & 1 & 0 \\ 1 & a & 0 \\ 4 & 1 & 1 \end{vmatrix} > 0$$

的充分必要条件是 $|a| > 1$.

第二节 n 阶行列式的定义

一、全排列及其逆序数

把 n 个不同元素按某种次序排成一列，称为 n 个元素的全排列. n 个元素的全排列的总个数，一般用 P_n 表示，且

$$P_n = n!.$$

对于 n 个不同元素，先规定各元素间有一个标准次序(如 n 个不同的自然数，可规定由小到大为标准次序)，于是在这 n 个元素的任一排列中，当某两个元素的先后次序与标准次序不同时，就说它们构成了一个逆序. 一个排列中所有逆序的总和，称为该排列的逆序数，排列 $i_1 i_2 \cdots i_n$ 的逆序数记作 $\tau(i_1 i_2 \cdots i_n)$.

例如，对排列 32514 而言，4 与 5 就构成了一个逆序，1 与 3、2、5 也分别构成一个逆序，3 与 2 也构成一个逆序，所以，$\tau(32514)=5$.

逆序数的计算法：不失一般性，不妨设 n 个元素为 1 至 n 这 n 个自然数，并规定由小到大为标准次序，设 $i_1 i_2 \cdots i_n$ 为这 n 个自然数的一个排列，自右至左先计算排在最后一位数字 i_n 的逆序数，等于排在 i_n 前面且比 i_n 大的数字的个数，再计算 $i_{n-1} \cdots i_2$ 的逆序数，然后把所有数字的逆序数加起来，就是该排列的逆序数.

例 1 计算 $\tau[1\ 3\ 5 \cdots (2n-1) 2\ 4\ 6 \cdots (2n)]$.

解 从排列 $1\ 3\ 5 \cdots (2n-1) 2\ 4\ 6 \cdots (2n)$ 看，前 n 个数 $1\ 3\ 5 \cdots (2n-1)$ 之间没有逆序，后 n 个数 $2\ 4 \cdots (2n)$ 之间也没有逆序，只有前后 n 个数之间才构成逆序.

$2n$ 最大且排在最后，逆序数为 0；

$2n-2$ 的前面有 $2n-1$ 比它大，故逆序数为 1；

$2n-4$ 的前面有 $2n-1$ 、$2n-3$ 比它大，故逆序数为 2；

……

2 前面有 $n-1$ 个数比它大，故逆序数为 $n-1$，因此有

$$\tau[1\ 3\ 5\cdots(2n-1)2\ 4\ 6\cdots(2n)]=0+1+\cdots+(n-1)=\frac{n(n-1)}{2}.$$

逆序数为奇数的排列叫做奇排列，逆序数为偶数的排列叫做偶排列.

二、对换

在排列中，将任意两个元素对调，其余元素保持不动，这种作出新排列的方法叫做对换. 将相邻两个元素对换，叫做相邻对换.

定理 2.1 一个排列中的任意两个元素对换，排列改变奇偶性.

证 先证相邻对换的情形. 设排列为

$$a_1a_2\cdots a_m\boldsymbol{a}\boldsymbol{b}b_1b_2\cdots b_n,$$

对换 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$，变为 $a_1a_2\cdots a_m\boldsymbol{b}\boldsymbol{a}b_1b_2\cdots b_n$，显然这时排列中除 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$ 两数的顺序改变外，其他任意两数和任意一个数与 $\boldsymbol{a}$ 或 $\boldsymbol{b}$ 之间的顺序都没有变. 当 $\boldsymbol{a}>\boldsymbol{b}$ 时，经对换后，$\boldsymbol{a}$ 的逆序数不变，$\boldsymbol{b}$ 的逆序数减少 1；当 $\boldsymbol{a}<\boldsymbol{b}$ 时，对换后，$\boldsymbol{a}$ 的逆序数增加 1，$\boldsymbol{b}$ 的逆序数不变，所以新排列与原排列奇偶性不同.

再证一般对换的情形.

设排列为 $a_1a_2\cdots a_m\boldsymbol{a}b_1b_2\cdots b_n\boldsymbol{b}c_1c_2\cdots c_p$，对换 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$，变为 $a_1a_2\cdots a_m\boldsymbol{b}b_1b_2\cdots b_n\boldsymbol{a}c_1c_2\cdots c_p$. 可以把它看做将原排列作 n 次相邻对换变成 $a_1a_2\cdots a_mb_1\cdots b_n\boldsymbol{a}\boldsymbol{b}c_1\cdots c_p$，再作 $n+1$ 次相邻对换变成 $a_1a_2\cdots a_m\boldsymbol{b}b_1b_2\cdots b_n\boldsymbol{a}c_1c_2\cdots c_p$. 因此经过 $2n+1$ 次相邻对换，排列 $a_1a_2\cdots a_m\boldsymbol{a}b_1b_2\cdots b_n\boldsymbol{b}c_1c_2\cdots c_p$ 变为 $a_1a_2\cdots a_m\boldsymbol{b}b_1b_2\cdots b_n\boldsymbol{a}c_1c_2\cdots c_p$. 所以这两个排列的奇偶性不同.

三、n 阶行列式的定义

为了给出 n 阶行列式的定义，我们先研究三阶行列式的定义. 三阶行列式的定义为

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33}+a_{12}a_{23}a_{31}+a_{13}a_{21}a_{32}$$
$$-a_{13}a_{22}a_{31}-a_{12}a_{21}a_{33}-a_{11}a_{23}a_{32}.$$

由定义可看出：

(1) 上式右边的每一项都是三个元素的乘积，这三个元素位于不同的行、不同的列；每一项三个元素的第一个下标（行标）依次为 123，排成了标准次序，第二个下标（列标）排成了 $p_1p_2p_3$，它是 1,2,3 三个数的某一个排列，对应上式右端的 6 项，恰好等于这三个数排列的种数. 因此除了正负号外，右端的每一项都可以写成下列形式：

$$a_{1p_1}a_{2p_2}a_{3p_3},$$

其中 $p_1p_2p_3$ 是 1,2,3 的某一个排列,其项数等于 $P_3 = 3!$.

(2) 各项的正、负号与列标排列的逆序数有关.易验证上式右端带正号的项的列下标的排列都是偶排列,带负号的项的列下标的排列都是奇排列.因此各项所带符号由该项列下标的排列的奇偶性所决定,从而各项可表示为

$$(-1)^{\tau(p_1p_2p_3)}a_{1p_1}a_{2p_2}a_{3p_3}.$$

综合(1)、(2),可将三阶行列式写成

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \sum (-1)^{\tau(p_1p_2p_3)}a_{1p_1}a_{2p_2}a_{3p_3},$$

其中 $\tau(p_1p_2p_3)$为排列 $p_1p_2p_3$ 的逆序数. $\sum$ 表示对 1,2,3 三个数的所有全排列 $p_1p_2p_3$ 求和.

由此,我们引入 n 阶行列式的定义.

定义 2.1 设有 n^2 个数,排成 n 行 n 列的数表

$$\begin{matrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{matrix}$$

作出表中位于不同行不同列的 n 个数的乘积 $a_{1p_1}a_{2p_2}\cdots a_{np_n}$,并冠以符号 $(-1)^{\tau(p_1p_2\cdots p_n)}$,即得

$$(-1)^{\tau(p_1p_2\cdots p_n)}a_{1p_1}a_{2p_2}\cdots a_{np_n} \tag{2.1}$$

的项,由于 $p_1p_2\cdots p_n$ 为自然数 $1,2,\cdots,n$ 的一个排列,这样的排列共有 $n!$ 个,因而形如(2.1)式的项共有 $n!$ 项,所有这 $n!$ 项的代数和

$$\sum (-1)^{\tau(p_1p_2\cdots p_n)}a_{1p_1}a_{2p_2}\cdots a_{np_n}$$

称为n 阶行列式,记为

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix},$$

简记为 $\det(a_{ij})$,其中数 a_{ij} 称为行列式 $\det(a_{ij})$的元素,即

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \sum (-1)^{\tau(p_1p_2\cdots p_n)}a_{1p_1}a_{2p_2}\cdots a_{np_n}. \tag{2.2}$$

按此定义的二阶、三阶行列式,与用对角线法则定义的二阶、三阶行列式是一

致的. 特别当 $n=1$ 时，一阶行列式 $|a|=a$，注意与绝对值记号的区别.

例 2 按行列式的定义计算下三角形行列式：

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & & & \\ a_{21} & a_{22} & & \\ \vdots & \vdots & \ddots & \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix},$$

其中未写出的元素全为零(以后均此).

解 由定义，n 阶行列式中共有 $n!$ 项，其一般项为

$$(-1)^{\tau}a_{1p_1}a_{2p_2}\cdots a_{np_n},$$

其中 $\tau=\tau(p_1p_2\cdots p_n)$. 现第 1 行除 a_{11} 外其余元素全为零，故只有一个元素 a_{11}；在第 2 行中除了 a_{21}，a_{22} 外全是零，故应在 a_{21}，a_{22} 中取一个，且只能取一个，因为 a_{11} 是第一行第一列的元素，$p_1=1$，故 $p_2,\cdots,p_n$ 不能再取 1，所以 $p_2=2$，即第二行取 a_{22}；依此类推，第 n 行只能取 $p_n=n$，即取元素 a_{nn}，从而有

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & & & \\ a_{21} & a_{22} & & \\ \vdots & \vdots & \ddots & \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}=a_{11}a_{22}\cdots a_{nn},$$

即 D 等于主对角线上元素的乘积.

同理可得上三角行列式

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ & & \ddots & \vdots \\ & & & a_{nn} \end{vmatrix}=a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}.$$

作为三角形式特例的对角行列式(除对角线上的元素外，其他元素都为 0，在行列式中未写出来)

$$\begin{vmatrix} a_{11} & & & \\ & a_{22} & & \\ & & \ddots & \\ & & & a_{nn} \end{vmatrix}=a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}.$$

例 3 证明

$$\begin{vmatrix} & & & a_{1n} \\ & & a_{2,n-1} & \\ & \therefore & & \\ a_{n1} & & & \end{vmatrix}=(-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}a_{1n}a_{2,n-1}\cdots a_{n1}.$$

证 由行列式的定义

$$\begin{vmatrix} & & & a_{1n} \\ & & a_{2,n-1} & \\ & \iddots & & \\ a_{n1} & & & \end{vmatrix} = (-1)^{\tau} a_{1n} a_{2,n-1} \cdots a_{n1},$$

其中 $\tau=\tau[n(n-1)\cdots 1]$ 为排列 $n(n-1)\cdots 1$ 的逆序数，又

$$\tau[n(n-1)\cdots 1] = (n-1)+(n-2)+\cdots+1 = \frac{(n-1)n}{2},$$

所以结论得以证明.

四、n 阶行列式定义的其他形式

利用定理 2.1，我们来讨论行列式定义的其他表示法.

对于行列式的任一项

$$(-1)^{\tau(p_1 p_2 \cdots p_n)} a_{1p_1} a_{2p_2} \cdots a_{ip_i} \cdots a_{jp_j} \cdots a_{np_n},$$

其中 $1\cdots i\cdots j\cdots n$ 为自然排列，对换 a_{ip_i} 与 a_{jp_j} 成

$$(-1)^{\tau(p_1 p_2 \cdots p_n)} a_{1p_1} \cdots a_{jp_j} \cdots a_{ip_i} \cdots a_{np_n},$$

这时，该项的值不变，而行标排列与列标排列同时作了一次相应的对换. 设新的行标排列 $1\cdots j\cdots i\cdots n$ 的逆序数为 τ_1，则 τ_1 为奇数；设新的列标排列 $p_1\cdots p_j\cdots p_i\cdots p_n$ 的逆序数为 τ_2，则

$$(-1)^{\tau_2} = -(-1)^{\tau(p_1 p_2 \cdots p_n)},$$

故

$$(-1)^{\tau(p_1 p_2 \cdots p_n)} = (-1)^{\tau_1+\tau_2},$$

于是

$$(-1)^{\tau(p_1 p_2 \cdots p_n)} a_{1p_1} \cdots a_{ip_i} \cdots a_{jp_j} \cdots a_{np_n} = (-1)^{\tau_1+\tau_2} a_{1p_1} \cdots a_{jp_j} \cdots a_{ip_i} \cdots a_{np_n}.$$

这就说明，对换乘积中两元素的次序，从而行标排列与列标排列同时作了一次对换，因此行标排列与列标排列的逆序数之和并不改变奇偶性. 经过一次对换如此，经过多次对换亦如此. 于是经过若干次对换，使列标排列 $p_1 p_2\cdots p_n$[逆序数 $\tau=\tau(p_1 p_2\cdots p_n)$]变为自然排列(逆序数为 0)；行标排列则相应地从自然排列变为某个新的排列，设此新排列为 $q_1 q_2\cdots q_n$，则有

$$(-1)^{\tau(p_1 p_2 \cdots p_n)} a_{1p_1} a_{2p_2} \cdots a_{np_n} = (-1)^{\tau(q_1 q_2 \cdots q_n)} a_{q_1 1} a_{q_2 2} \cdots a_{q_n n}.$$

又若 $p_i=j$，则 $q_j=i$(即 $a_{ip_i}=a_{ij}=a_{q_j j}$)，可见排列 $q_1 q_2\cdots q_n$ 由排列 $p_1 p_2\cdots p_n$ 所惟一确定.

由此可得

定理 2.2 n 阶行列式也可定义为

$$D = \sum (-1)^{\tau(q_1 q_2 \cdots q_n)} a_{q_1 1} a_{q_2 2} \cdots a_{q_n n}. \tag{2.3}$$

证 按行列式定义，有

$$D=\sum(-1)^{\tau(p_1p_2\cdots p_n)}a_{1p_1}a_{2p_2}\cdots a_{np_n}.$$

记

$$D_1=\sum(-1)^{\tau(q_1q_2\cdots q_n)}a_{q_11}a_{q_22}\cdots a_{q_nn},$$

按上面的讨论知:对于 D 中任一项 $(-1)^{\tau(p_1p_2\cdots p_n)}a_{1p_1}a_{2p_2}\cdots a_{np_n}$,总有 D_1 中惟一的一项 $(-1)^{\tau(q_1q_2\cdots q_n)}a_{q_11}a_{q_22}\cdots a_{q_nn}$ 与之对应并相等;反之,对于 D_1 中的任一项 $(-1)^{\tau(q_1q_2\cdots q_n)}a_{q_11}a_{q_22}\cdots a_{q_nn}$,同理总有 D 中惟一的一项 $(-1)^{\tau(p_1p_2\cdots p_n)}a_{1p_1}a_{2p_2}\cdots a_{np_n}$ 与之对应并相等,所以 $D=D_1$.

更一般的

定理 2.3 n 阶行列式可定义为

$$D=\sum(-1)^{\tau_1+\tau_2}a_{p_1q_1}a_{p_2q_2}\cdots a_{p_nq_n},\tag{2.4}$$

其中 $\tau_1=\tau(p_1p_2\cdots p_n)$,$\tau_2=\tau(q_1q_2\cdots q_n)$.

第三节 行列式的性质

记

$$D=\begin{vmatrix}a_{11}&a_{12}&\cdots&a_{1n}\\a_{21}&a_{22}&\cdots&a_{2n}\\\vdots&\vdots&&\vdots\\a_{n1}&a_{n2}&\cdots&a_{nn}\end{vmatrix},$$

将其中的行与列互换,即把行列式中的各行换成相应的列,得到行列式

$$\begin{vmatrix}a_{11}&a_{21}&\cdots&a_{n1}\\a_{12}&a_{22}&\cdots&a_{n2}\\\vdots&\vdots&&\vdots\\a_{1n}&a_{2n}&\cdots&a_{nn}\end{vmatrix},$$

上式称为行列式 D 的转置行列式,记作 D^{T}(或记为 D').

性质 1 $D=D^{\mathrm{T}}$.

证 记 $D=\det(a_{ij})$ 的转置行列式

$$D^{\mathrm{T}}=\begin{vmatrix}b_{11}&b_{12}&\cdots&b_{1n}\\b_{21}&b_{22}&\cdots&b_{2n}\\\vdots&\vdots&&\vdots\\b_{n1}&b_{n2}&\cdots&b_{nn}\end{vmatrix},$$

则 $b_{ij}=a_{ji}$ $(i,j=1,2,\cdots,n)$,按行列式的定义

$$D^{\mathrm{T}}=\sum(-1)^{\tau(p_1p_2\cdots p_n)}b_{1p_1}b_{2p_2}\cdots b_{np_n}=\sum(-1)^{\tau(p_1p_2\cdots p_n)}a_{p_11}a_{p_22}\cdots a_{p_nn}.$$

由定理 2.2 知 $D^{\mathrm{T}}=D$.

此性质表明，在行列式中行与列有相同的地位，凡是有关行的性质对列同样成立；反之亦然.

性质 2 交换行列式的两行(或两列)，行列式改变符号.

证 设行列式

$$D_1=\begin{vmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ b_{n1} & b_{n2} & \cdots & b_{nn} \end{vmatrix}$$

是由行列式 $D=\det(a_{ij})$ 交换第 i、j 两行得到的，当 $k\neq i,j$ 时，$b_{kp}=a_{kp}$；当 $k=i$ 或 j 时，$b_{ip}=a_{jp}$，$b_{jp}=a_{ip}$. 于是

$$\begin{aligned} D_1 &= \sum(-1)^{\tau(p_1\cdots p_i\cdots p_j\cdots p_n)} b_{1p_1}\cdots b_{ip_i}\cdots b_{jp_j}\cdots b_{np_n} \\ &= \sum(-1)^{\tau(p_1\cdots p_i\cdots p_j\cdots p_n)} a_{1p_1}\cdots a_{jp_i}\cdots a_{ip_j}\cdots a_{np_n} \\ &= \sum(-1)^{\tau(p_1\cdots p_i\cdots p_j\cdots p_n)} a_{1p_1}\cdots a_{ip_j}\cdots a_{jp_i}\cdots a_{np_n} \\ &= -\sum(-1)^{\tau(p_1\cdots p_j\cdots p_i\cdots p_n)} a_{1p_1}\cdots a_{ip_j}\cdots a_{jp_i}\cdots a_{np_n} \\ &= -D. \end{aligned}$$

推论 如果行列式有两行(或两列)完全相同，则此行列式等于零.

证 把这两行互换，有 $D=-D$，故 $D=0$.

性质 3 行列式中某一行(或列)的各元素有公因子，则可提到行列式符号的外面，即

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ ka_{i1} & ka_{i2} & \cdots & ka_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = k\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

推论 1 行列式的某一行(或列)所有元素都乘以同一个数 k，等于用数 k 乘此行列式.

推论 2 行列式的某一行(或列)的元素全为零时，行列式的值等于零.

性质 4 若行列式中有两行(列)的元素对应成比例，则此行列式等于零.

性质 5 若行列式的某一行(列)的元素都是两数之和，如

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & (a_{1i}+a'_{1i}) & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & (a_{2i}+a'_{2i}) & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & (a_{ni}+a'_{ni}) & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix},$$

则 D 等于下列两个行列式之和，即